

Schreibweise von Tensoren (Vektoren)

DIN
1303

Notation of tensors (vectors)

Skalare, Vektoren, Tensoren

Man unterscheidet:

Skalare, das sind Tensoren nullter Stufe,
Vektoren, das sind Tensoren 1. Stufe,
Tensoren (schlechthin), das sind Tensoren 2. Stufe,
Tensoren 3. Stufe, 4. Stufe usw.

Skalare werden mit gewöhnlichen Buchstaben (ohne besondere Kennzeichnung) bezeichnet.

Bei Tensoren höherer Stufe unterscheidet man zwei verschiedene Darstellungen mit entsprechend verschiedenen Schreibweisen.

1. Darstellung A

Vektoren und höhere Tensoren werden durch besonders gekennzeichnete Buchstaben bezeichnet, und zwar:

Vektoren durch Frakturbuchstaben

oder Fettdruck $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots a, b, \dots$

$A, B, \dots a, b, \dots$,

oder auch durch übergesetzte Pfeile

$\vec{A}, \vec{B}, \dots \vec{a}, \vec{b}, \dots$,

Tensoren zweiter Stufe durch griechische Buchstaben, bevorzugt Großbuchstaben, oder auch Fettdruck.

Für die Rechenoperationen werden die Zeichen der Algebra nach besonderen Vereinbarungen benutzt, und zwar:

Addition: $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}, A + B, \vec{A} + \vec{B},$

Subtraktion: $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}, A - B, \vec{A} - \vec{B},$

Skalares (inneres) Produkt:

$\mathfrak{A}\mathfrak{B}, AB, \vec{A}\vec{B},$ sprich: AB

oder: $\mathfrak{A} \cdot \mathfrak{B}, A \cdot B, \vec{A} \cdot \vec{B}$ sprich: A Punkt B

Vektoriell (äußeres) Produkt:

$\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}, A \times B, \vec{A} \times \vec{B}$ sprich: A Kreuz B oder Vektorprodukt AB

oder: $[\mathfrak{A}\mathfrak{B}], [AB], [\vec{A}\vec{B}]$

Produkte werden von anderen Faktoren durch runde Klammern getrennt, z. B.

$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}$

oder $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})\mathfrak{C}$

oder $(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}) \times \mathfrak{C}$

Man nennt

$(\mathfrak{A} \times \mathfrak{B})\mathfrak{C} = (\mathfrak{C} \times \mathfrak{A})\mathfrak{B} = (\mathfrak{B} \times \mathfrak{C})\mathfrak{A} = [\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathfrak{C}]$
das Spatprodukt.

Betrag eines Vektors:

$$A = |\mathfrak{A}| = |A| = |\vec{A}|$$

Die Komponente eines Vektors $\mathfrak{A}$ in der Richtung $\mathfrak{B}$ wird geschrieben

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{B}}, A_{\mathfrak{B}}, \vec{A}_{\mathfrak{B}}$$

Der Betrag dieses Vektors, das ist die Projektion des Vektors $\mathfrak{A}$ auf die Richtung $\mathfrak{B}$, ist

$$A_{\mathfrak{B}}, A_{\mathfrak{B}}.$$

Wenn die Richtung $\mathfrak{B}$ diejenige der x -Achse eines Koordinatensystems ist, so wird die Projektion von $\mathfrak{A}$ auf diese Achse die Koordinate von $\mathfrak{A}$ in der Richtung x genannt und mit

$$A_x$$

bezeichnet.

Den Einsvektor (Einheitsvektor) in Richtung eines Vektors $\mathfrak{A}$ schreibt man

$$\mathfrak{A}^0.$$

Die Einsvektoren in Richtung der Achsen (x, y, z) eines rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystems sind

$$i, j, k.$$

Es gilt:

$$i i = j j = k k = 1 \\ i j = j i = k i = i k = 0.$$

Ein Vektor $\mathfrak{A}$ läßt sich dann in der Form

$$\mathfrak{A} = A_x i + A_y j + A_z k.$$

darstellen.

Drei ebenenfremde Vektoren (Dreibein) als Basis eines schiefwinkligen Parallelkoordinatensystems schreibt man

$$e_1, e_2, e_3$$

$$\text{oder } \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3 \text{ oder } \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3.$$

Es gilt

$$\mathfrak{A} = A^1 e_1 + A^2 e_2 + A^3 e_3,$$

wobei A^1, A^2, A^3 die kontravarianten Koordinaten des Vektors in Bezug auf die Basis e_1, e_2, e_3 sind. Ist e^1, e^2, e^3 das reziproke Dreibein entsprechend

$$e^1 = \frac{e_2 \times e_3}{[e_1 e_2 e_3]}, \quad e^2 = \frac{e_3 \times e_1}{[e_1 e_2 e_3]}, \quad e^3 = \frac{e_1 \times e_2}{[e_1 e_2 e_3]}$$

so ist

$$\mathfrak{A} = A_1 e^1 + A_2 e^2 + A_3 e^3$$

wobei A_1, A_2, A_3 die kovarianten Koordinaten von $\mathfrak{A}$ sind.

Fortsetzung Seite 2 und 3
Erläuterungen Seite 3 bis 5

Differentialoperator: ∇ sprich: Nabla

Gradient eines Skalarfeldes φ :

$$\text{grad } \varphi = \nabla \varphi$$

Divergenz eines Vektorfeldes $\mathfrak{A}$:

$$\text{div } \mathfrak{A} = \nabla \mathfrak{A}, \quad \text{div } \mathbf{A} = \nabla \mathbf{A},$$

$$\text{div } \vec{A} = \nabla \vec{A}.$$

Rotor eines Vektorfeldes $\mathfrak{A}$:

$$\text{rot } \mathfrak{A} = \nabla \times \mathfrak{A}, \quad \text{rot } \mathbf{A} = \nabla \times \mathbf{A},$$

$$\text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A}.$$

Laplacescher Operator: Δ sprich: Delta

$$\Delta \varphi = \nabla \nabla \varphi = \text{div grad } \varphi.$$

2. Darstellung B

2.1. Allgemeines

Es werden mit Indizes versehene Buchstaben angewendet, welche die Koordinaten der betrachteten Größen im zugrunde gelegten Koordinatensystem darstellen. Die Koordinaten sind der Reihe nach durch Indizes 1, 2, 3... gekennzeichnet. Es bedeutet z. B. A_i die Koordinaten A_1, A_2 und A_3 eines Vektors in einem rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem im dreidimensionalen Raum. Für jeden allgemeinen Index, z. B. i, j oder k usw., darf man jede der Zahlen 1, 2, 3... einsetzen. Alle aufgeschriebenen Beziehungen bleiben gültig, wenn für jeden allgemeinen Index an jeder vorkommenden Stelle die gleiche Zahl gesetzt wird.

Man nennt solche Indizes freie Indizes.

Beispiel: $A_i = B_i$ bedeutet, daß $A_1 = B_1$
 $A_2 = B_2$
 $A_3 = B_3$ usw.

Die Anzahl der Indizes entspricht der Stufe des Tensors:

Vektor: A_i

Tensor 2. Stufe: A_{ij} , Tensor 3. Stufe: A_{ijk} usw.

Das (Einsteinsche) Summationsübereinkommen besagt, daß über jeden an einem Tensor oder in einem Produkt zweimal vorkommenden Index über die Gesamtzahl der Koordinaten zu summieren ist. Man nennt solche Indizes gebundene Indizes.

Beispiel: $T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33}$
 oder $A_i B_i = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$ { im dreidimensionalen Raum bei rechtwinkligen kartesischen Koordinaten

Unter dem allgemeinen Produkt zweier Tensoren versteht man einen Tensor, dessen Stufe gleich der Summe der Stufen der Faktoren ist und dessen Koordinaten durch Multiplikation aller Koordinaten des einen Tensors mit denen des anderen gebildet werden.

Beispiel:

$$T_{ik} = A_i B_k \text{ bedeutet, daß}$$

$$T_{11} = A_1 B_1, T_{12} = A_1 B_2, T_{13} = A_1 B_3,$$

$$T_{21} = A_2 B_1, T_{22} = A_2 B_2 \text{ usw.}$$

Unter Verjüngung versteht man das Gleichsetzen zweier Indizes eines Tensors bei Anwendung des Summationsübereinkommens.

Beispiel:

Verjüngung von T_{ijk} nach j und k liefert

$$T_{ijj} = T_{i11} + T_{i22} + T_{i33} + \dots$$

Zur Darstellung der Verjüngung dient auch der δ -Tensor (das Kroneckersche δ):

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j \\ 0, & \text{wenn } i \neq j \end{cases} \text{ somit } \delta_{jk} T_{ijk} = T_{ijj}.$$

Man nennt einen Tensor T_{mijn} symmetrisch (in den Indizes i, j), wenn $T_{mijn} = T_{mjin}$, alternierend (in den Indizes i, j), wenn $T_{mijn} = -T_{mjin}$.

Die Multiplikation von Tensoren mit nachträglicher Verjüngung heißt Überschiebung.

Beispiel:

$$A_{ij} B_{jk} = C_{ik}$$

oder das skalare Produkt $\delta_{ij} A_i B_j = A_i B_i$

2.2. Koordinatensysteme

2.2.1. Rechtwinkliges kartesisches Rechtssystem
 in einem dreidimensionalen euklidischen Raum. Man schreibt alle Indizes unten.

Addition: $A_i + B_i$

Subtraktion: $A_i - B_i$

Skalares (inneres) Produkt: $A_i B_i = \delta_{ij} A_i B_j$

Betrag des Vektors: $A = \sqrt{A_i A_i}$

Vektoriell (äußeres) Produkt: $C_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$

Dabei ist der ε -Tensor ein Tensor 3. Stufe, für den in einem Rechtssystem gilt:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 0, & \text{wenn zwei Indizes gleich} \\ 1, & \text{wenn } i, j, k \text{ eine gerade Permutation von } 1, 2, 3 \\ -1, & \text{wenn } i, j, k \text{ eine ungerade Permutation von } 1, 2, 3 \end{cases}$$

Für ein Linkssystem sind die Vorzeichen der Koordinaten des ε -Tensors zu vertauschen.

Es gilt der Entwicklungssatz:

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}$$

Die Differentialoperationen werden in der üblichen Weise bezeichnet, wobei an Stelle von $\frac{\partial}{\partial x_i}$ auch ∂_i geschrieben werden kann, falls kein Zweifel besteht, daß die Ableitung nach den Ortskoordinaten gemeint ist. Man schreibt dann z. B.

$$\partial_i \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \text{ für den Gradienten von } \varphi,$$

$$\partial_i A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x_i} \text{ für die Divergenz von } A_i,$$

$$\varepsilon_{ijk} \partial_j A_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} \text{ für den Rotor von } A_i,$$

$$\partial_i \partial_i = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \text{ für den Laplaceschen Operator.}$$