

Vektoren, Matrizen, Tensoren

Zeichen und Begriffe

DIN
1303

Vectors, matrices, tensors; symbols and concepts

Ersatz für Ausgabe 08.59x
und DIN 5486/12.62

In der vorliegenden Norm werden Zeichen und Begriffe behandelt, die Vektoren, Matrizen und Tensoren betreffen. Dabei wird nur die algebraische Struktur dargestellt. Zu den Operatoren der Vektoranalysis vergleiche man DIN 4895 Teil 1 und Teil 2 über orthogonale Koordinatensysteme. Es wird ferner auf die folgenden weiteren Normen verwiesen, in denen auch geometrische Begriffe behandelt werden: DIN 1302 „Allgemeine mathematische Zeichen und Begriffe“, DIN 1312 „Geometrische Orientierung“, DIN 13 302 „Mathematische Strukturen; Zeichen und Begriffe“.

Die vorliegende Norm ist in der Form einer Tabelle gegeben, die (mit Ausnahme der Abschnitte 3 und 9) folgendermaßen aufgebaut ist:

Spalte 2 zeigt die in dieser Norm empfohlenen Zeichen und formalen Schreibweisen, Spalte 3 gibt eine sprachliche Formulierung, die als Sprechweise aber nicht in jedem Fall wörtlich eingehalten zu werden braucht. Spalte 4 enthält die Definition für die formalen Ausdrücke in Spalte 2. Die Spalte 2 ist bisweilen leer, wenn für einen Begriff keine formale Bezeichnung eingeführt wird, sondern nur eine umgangssprachliche Formulierung des Begriffes in Spalte 3 gegeben wird, die dann in Spalte 4 definiert wird. Spalte 5 enthält Hinweise, Zusätze oder Beispiele. Sofern diese umfangreicher sind, erscheinen sie in den Anmerkungen.

An einigen Stellen in der Norm werden die Symbole

$$\delta_{k_1 \dots k_m}^{i_1 \dots i_m}, \delta_k^i, \delta_{ik}, \operatorname{sgn}(\sigma)$$

verwendet, die in Abschnitt 10 erklärt sind. Für das Konjugiert-Komplexe wird nur eine Bezeichnung, nämlich die durch Überstreichen, verwendet.

Inhalt

	Seite
1 Vektoren	2
2 Basen und Koordinaten für Vektoren	6
3 Darstellung der Vektoroperationen in Koordinaten ..	9
4 Matrizen	10
5 Lineare und multilineare Abbildungen	15
6 Tensoren	16
7 Multivektoren	18
8 Basen und Koordinaten für Tensoren	21
9 Darstellung der Tensoroperationen in Koordinaten ..	23
10 Permutationssymbole	25

Fortsetzung Seite 2 bis 27

Normenausschuß Einheiten und Formelgrößen (AEF) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V.

1 Vektoren

Vektoren sind in der Physik Größen, die durch einen Betrag und eine Richtung gekennzeichnet werden. Man kann Vektoren zueinander addieren und sie mit skalaren Werten multiplizieren (vervielfachen). Diese beiden Operationen (siehe Nr 1.5 und Nr 1.6) sind konstituierend für den Begriff des Vektorraumes oder des linearen Raumes (siehe Nr 1.1). Zu diesen linearen Grundbegriffen tritt als metrischer Grundbegriff der des Skalarproduktes (siehe Nr 1.10 und Nr 1.18) mit der Möglichkeit, Beträge von Vektoren zu definieren (siehe Nr 1.11).

1	2	3	4	5
Nr	Zeichen	Sprechweise, Begriff	Definition	Bemerkungen
1.1		Vektorraum, linearer Raum	Eine Struktur, die gegeben ist durch eine Menge V, deren Elemente Vektoren, und eine Menge K, deren Elemente Skalare heißen, sowie folgende Verknüpfungen: Eine Addition von Vektoren mit den Eigenschaften von Nr 1.5 und eine Multiplikation von Skalaren und Vektoren mit den Eigenschaften von Nr 1.6. Ferner kann man Skalare addieren und multiplizieren, so daß K ein Körper im Sinne der Algebra ist.	Man sagt auch, daß V ein Vektorraum über K ist. V ist ein reeller bzw. komplexer Vektorraum, wenn der Skalarbereich K der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen bzw. der Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen ist. Andere Fälle werden in dieser Norm nicht betrachtet. In den Anwendungen treten auch reelle bzw. komplexe Größenwerte als Skalare auf. Beispiel 1: Der Raum der Verschiebungsvektoren oder Verbindungsvektoren besteht aus den Vektoren, die von einem Anfangspunkt zu einem Endpunkt führen. Zwei solche Verbindungsvektoren sind genau dann gleich, wenn dieselbe Parallelverschiebung jeweils die Anfangspunkte in die Endpunkte überführt. Beispiel 2: Die möglichen Werte der elektrischen Feldstärke in einem Punkt bilden einen Vektorraum. Beispiel 3: Die Menge aller (n, m)-Matrizen reeller Zahlen bildet einen linearen Raum. Siehe Anmerkungen.
1.2	$a, b, c, \dots, x, y, z, \dots$ oder $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \dots, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \dots$		Zeichen für Vektoren	In dieser Norm wird die erste Darstellung benutzt. Oft rechnet man direkt mit Koordinaten und benutzt dann keine Zeichen für die Vektoren selbst. Für die Koordinaten benutzt man magere Buchstaben mit oberen oder unteren Indizes (siehe Nr 2.7, Nr 2.8 und Abschnitt 3). Siehe Anmerkungen.
1.3	$a, b, c, \dots, x, y, z, \dots$		Zeichen für Skalare	Siehe Anmerkungen.
1.4	$\mathbf{o}$ oder $\vec{0}$	Nullvektor	neutrales Element bezüglich der Vektoraddition (siehe Nr 1.5)	Es gilt: $\mathbf{a} + \mathbf{o} = \mathbf{o} + \mathbf{a} = \mathbf{a}$

Fortsetzung

1	2	3	4	5
Nr	Zeichen	Sprechweise, Begriff	Definition	Bemerkungen
1.5	$a + b$	a plus b , Summe von a und b	Grundbegriff im Vektorraum. Es gilt für alle a, b, c : $a + b$ ist ein Vektor, $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a + b = b + a$, es gibt ein x mit $a + x = b$	Die Lösung x der Gleichung $a + x = b$ ist eindeutig durch a, b bestimmt. Sie wird mit $b - a$ bezeichnet. o ist die Lösung von $a + x = a$, $-a$ ist die Lösung von $a + x = o$.
1.6	$x a$	x mal a , x -faches von a	Grundbegriff im Vektorraum. Es gilt für alle a, b, x, y : $x a$ ist ein Vektor, $x(a + b) = x a + x b$, $(x + y) a = x a + y a$, $x(y a) = (x y) a$, $1 a = a$	Man setzt auch: $a x = \text{def } x a$ Der Vektorraum wird dadurch zu einem zweiseitigen Vektorraum im Sinne von DIN 13302, Ausgabe Juni 1978, Nr 7.3. Der Skalarbereich, der im allgemeinen auch ein nicht kommutativer Körper sein darf, muß dann kommutativ sein.
1.7		$a_1, \dots, a_n$ sind linear unabhängig	es gilt: $o = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$ nur für $x_1 = \dots = x_n = 0$	Wenn $a_1, \dots, a_n$ nicht linear unabhängig sind, so sind sie linear abhängig (auch kollinear für $n=2$, komplanar für $n=3$).
1.8		V ist n -dimensional	es gibt n linear unabhängige Vektoren $a_1, \dots, a_n$, so daß jeder Vektor a sich als Linearkombination $a = x_1 a_1 + \dots + x_n a_n$ dieser Vektoren darstellen läßt.	Die Zahl n ist eindeutig durch V bestimmt. Die Definition erfaßt nur den Fall endlich-dimensionaler Vektorräume. Im folgenden seien alle auftretenden Vektorräume endlich-dimensional. Siehe Anmerkungen.
1.9		euklidischer Vektorraum	reeller Vektorraum mit einem Skalarprodukt nach Nr 1.10.	
1.10	$a \cdot b$	a mal b , inneres Produkt von a und b , Skalarprodukt von a und b	Grundbegriff in euklidischen Vektorräumen. Es gilt für alle a, b, c, x : $a \cdot b$ ist ein (reeller) Skalar, $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$, $(x a) \cdot b = x(a \cdot b)$, $a \cdot b = b \cdot a$, $a \cdot a \geq 0$, $a \cdot a = 0$ nur für $a = o$	Das Skalarprodukt ist auch im zweiten Faktor linear. Es gilt: $a \cdot (x b) = x(a \cdot b)$ Wenn künftig das innere Produkt oder darauf aufbauende Begriffe benutzt werden, so soll der zugrunde gelegte Vektorraum euklidisch sein. Wie bei anderen Produkten wird der Punkt als Multiplikationszeichen oft weggelassen. Doch vermeide man Verwechslungen mit anderen Verknüpfungen, z. B. dem dyadischen Produkt (siehe Nr 6.10, Spalte 5). Unter Benutzung von Betrag (siehe Nr 1.11) und Winkel (siehe Nr 1.13) läßt sich das Skalarprodukt auch so ausdrücken: $a \cdot b = a b \cos \angle(a, b)$

Fortsetzung

1	2	3	4	5
Nr	Zeichen	Sprechweise, Begriff	Definition	Bemerkungen
1.11	$ \mathbf{a} $	Betrag von $\mathbf{a}$	$\sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$	Es gilt $ \mathbf{a} \geq 0$ und $ \mathbf{a} = 0$ nur für $\mathbf{a} = \mathbf{o}$. Es wird auch $\ \mathbf{a}\ $ verwendet. Es wird empfohlen, Vektor und Betrag durch entsprechende halbfette und magere Buchstaben zu bezeichnen, z.B. $ \mathbf{a} = a$.
1.12	$\mathbf{e}_a$	Einheitsvektor in Richtung von $\mathbf{a}$	$\frac{1}{ \mathbf{a} } \mathbf{a}$	Dabei muß $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ vorausgesetzt werden. $\mathbf{e}_a$ hat den Betrag 1. Jeder Vektor vom Betrag 1 wird als Einheitsvektor oder normierter Vektor bezeichnet.
1.13	$\angle (\mathbf{a}, \mathbf{b})$	Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$	$\arccos \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ \mathbf{a} \mathbf{b} }$	Es muß $\mathbf{a} \neq \mathbf{o} \neq \mathbf{b}$ vorausgesetzt werden. Es gilt: $0 \leq \angle (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \leq \pi$
1.14	$\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$	$\mathbf{a}$ ist orthogonal zu $\mathbf{b}$	$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$	
1.15	$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$	$\mathbf{a}$ kreuz $\mathbf{b}$, Vektorprodukt von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$	$\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ist durch die folgenden Bedingungen eindeutig festgelegt: $ \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b} \sin \angle (\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \perp \mathbf{b}$, wenn $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ nicht kollinear sind, so ist $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a} \times \mathbf{b})$ ein Rechtssystem	Es wird hierbei vorausgesetzt, daß der Vektorraum dreidimensional ist und der Rechtsschraubensinn als Orientierung ausgezeichnet ist. Ein Rechtssystem ist dann ein Tripel nicht komplanarer Vektoren, das diese Orientierung bestimmt. Zum Begriff der Orientierung siehe DIN 1312. Beachte: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$
1.16	$[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$	Spatprodukt von $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$	$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$	Es gilt: $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = [\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}]$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}] = -[\mathbf{b}, \mathbf{a}, \mathbf{c}]$
1.17		unitärer Vektorraum	komplexer Vektorraum mit einem (Hermiteschen) Skalarprodukt nach Nr 1.18	
1.18	$(\mathbf{a}, \mathbf{b})$	$\mathbf{a}$ mal $\mathbf{b}$, (Hermitesches) inneres Produkt von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$, (Hermitesches) Skalarprodukt von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$	Grundbegriff in unitären Vektorräumen. Es gilt für alle $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, x$: $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ist ein (komplexer) Skalar, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}, \mathbf{c}) = (\mathbf{a}, \mathbf{c}) + (\mathbf{b}, \mathbf{c})$, $(x\mathbf{a}, \mathbf{b}) = x(\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \overline{(\mathbf{b}, \mathbf{a})}$, $(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ ist reell und nicht negativ, $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$ nur für $\mathbf{a} = \mathbf{o}$	Man beachte, daß das Hermitesche Skalarprodukt im zweiten Faktor nicht linear ist. Es gilt vielmehr: $(\mathbf{a}, x\mathbf{b}) = \overline{x}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ Beträge von Vektoren und der Begriff der Orthogonalität werden wie in Nr 1.11 und Nr 1.14 mit Hilfe des Hermiteschen Skalarprodukts eingeführt.
1.19		Vektorraum mit Konjugierung	unitärer Vektorraum mit einer Konjugierung nach Nr 1.20	

Fortsetzung

1	2	3	4	5
Nr	Zeichen	Sprechweise, Begriff	Definition	Bemerkungen
1.20	$\bar{a}$ oder a^*	konjugiert-komplexer Vektor von a	Grundbegriff in Vektorräumen mit Konjugierung. Es gilt für alle a, b, x: $\overline{a + b} = \bar{a} + \bar{b},$ $\overline{\bar{x} a} = x \bar{\bar{a}},$ $\bar{\bar{a}} = a,$ $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{\bar{a}}, \bar{\bar{b}})$	In Nr 1.21 und Nr 1.22 sei ein Vektorraum mit Konjugierung zugrunde gelegt.
1.21		a ist reell	$a = \bar{a}$	Die reellen Vektoren bilden einen euklidischen Vektorraum derselben Dimensionszahl.
1.22	$a \cdot b$	bilineares Produkt von a und b	$(a, \bar{b})$	Dieses Produkt ist kommutativ und in beiden Faktoren linear. Es stimmt für reelle Vektoren mit dem Skalarprodukt überein. Das Hermitesche Skalarprodukt läßt sich dann schreiben als: $(a, b) = a \cdot \bar{b}$
1.23		Kovektor von V	Abbildung u von V in den Skalarbereich K, so daß für alle a, b, x gilt: $u(a + b) = u(a) + u(b),$ $u(xa) = xu(a)$	Ein Kovektor von V ist dasselbe wie eine Linearform auf V, d. h. eine lineare Abbildung von V in den Skalarbereich K. Ein Kovektor kann also auf einen Vektor angewendet werden (wobei diese Funktionsanwendung als Produkt aufgefaßt wird), so daß sich als Wert ein Skalar ergibt.
1.24	V^*	Dualraum von V	die Menge der Kovektoren von V zusammen mit den Verknüpfungen, die definiert sind durch: $(u + v)(a) = u(a) + v(a),$ $(xu)(a) = xu(a)$	Der Dualraum von V ist ein Vektorraum über K . Es ist der Raum der linearen Abbildungen von V in K im Sinne von Nr 5.6.
1.25		kanonische Identifizierung von V mit V^{**}	die Zuordnung, die jedem $a \in V$ den Kovektor $\langle u \mapsto u(a) \rangle$ von V^* zuordnet	Es handelt sich um einen Isomorphismus von V auf den Dualraum V^{**} von V^*, den man zur Identifizierung benutzt. Siehe Anmerkungen.
1.26	$\langle u a \rangle$	natürliche Bilinearform, angewendet auf u, a , Produkt von u, a	$u(a)$	Hierbei sei $u \in V^*, a \in V$. Die Funktionsanwendung wird als Produkt (zwischen Funktion und Argument) aufgefaßt. Im Sinne der Identifizierung nach Nr 1.25 kann man auch $\langle a u \rangle$ bilden, und es bedeutet dasselbe. Das Produkt ist also kommutativ, es ist in beiden Faktoren linear.

Fortsetzung

1	2	3	4	5
Nr	Zeichen	Sprechweise, Begriff	Definition	Bemerkungen
1.27		kanonische Identifizierung von V mit V^* in euklidischen Vektorräumen bzw. in Vektorräumen mit Konjugierung	die Zuordnung, die jedem $a \in V$ den Kovektor $\langle b \rightarrow a \cdot b \rangle$ von V zuordnet	Es handelt sich um einen Isomorphismus von V auf V^* , den man zur Identifizierung benutzt. Im Sinne dieser Identifizierung kann man auf die Betrachtung von Kovektoren verzichten und z. B. Kraft, Feldstärke als Vektoren von V auffassen. Ferner gilt dann: $\langle a b \rangle = a \cdot b$ In euklidischen Vektorräumen kann deshalb $\langle a b \rangle$ auch als Skalarprodukt bezeichnet werden. Siehe Anmerkungen.

2 Basen und Koordinaten für Vektoren

In diesem und in den folgenden Abschnitten sei V ein n -dimensionaler und W ein m -dimensionaler Vektorraum.

1	2	3	4	5
Nr	Zeichen	Sprechweise, Begriff	Definition	Bemerkungen
2.1		Basis	ein n -Tupel linear unabhängiger Vektoren	Jeder Vektor läßt sich eindeutig als Linearkombination von Basisvektoren darstellen. Jede Basis enthält so viele Vektoren, wie die Dimensionszahl des Raumes beträgt.
2.2		Orthogonalbasis	Basis aus Vektoren, die paarweise zueinander orthogonal sind	
2.3		Orthonormalbasis	Orthogonalbasis aus normierten Vektoren	
2.4	$(e_1, \dots, e_n)$		Bezeichnung für die Vektoren einer Basis	Eine solche Basis sei im folgenden fixiert. Im dreidimensionalen Fall benutzt man auch (i, j, k) für (e_1, e_2, e_3) , vorzugsweise, wenn es sich um eine Orthonormalbasis handelt, die ein Rechtssystem bildet. Es gilt dann: $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1$ $i \cdot j = j \cdot k = k \cdot i = 0$ $i \times j = k, j \times k = i, k \times i = j$

Fortsetzung

1	2	3	4	5
Nr	Zeichen	Sprechweise, Begriff	Definition	Bemerkungen
2.5	$(e^1, \dots, e^n)$	duale Basis zu $(e_1, \dots, e_n)$	e^j ist derjenige Kovektor auf V mit $\langle e^j e_k \rangle = \delta_k^j$	$(e^1, \dots, e^n)$ bilden eine Basis im Dualraum V^* von V . Die duale Basis von $(e^1, \dots, e^n)$ ist $(e_1, \dots, e_n)$. In euklidischen Vektorräumen ist eine Basis genau dann Orthonormalbasis, wenn sie gleich ihrer Dualbasis ist, d. h. wenn $e^i = e_i$ ($i = 1, \dots, n$) gilt. Es gilt dann: $e_i \cdot e_k = \delta_{ik}$ Siehe Anmerkungen.
2.6		Koordinaten eines Vektors	die (eindeutig bestimmten) Skalare in einer Darstellung des Vektors als Linearkombination der Basisvektoren	Es liegt ein Bezug auf eine Basis vor, der bei der Verwendung von Koordinaten aus dem Kontext ersichtlich sein muß. Siehe Anmerkungen.
2.7	$a^1, \dots, a^n$		Bezeichnung für die Koordinaten eines Vektors a von V , d. h. es gilt: $a = a^1 e_1 + \dots + a^n e_n$	Man beachte: $a^i = \langle a e^i \rangle$ Die oberen Indizes sind keine Exponenten. Man nennt die Skalare a^i auch kontravariante Koordinaten von a , um sie von den Skalaren nach Nr 2.8 (in euklidischen Vektorräumen) zu unterscheiden.
2.8	$u_1, \dots, u_n$		Bezeichnung für die Koordinaten eines Kovektors u auf V bezüglich der Dualbasis, d. h. es gilt: $u = u_1 e^1 + \dots + u_n e^n$	Man beachte: $u_i = \langle u e_i \rangle$ Wenn man in einem euklidischen Vektorraum den Kovektor u (sowie $e^1, \dots, e^n$) im Sinne von Nr 1.27 auch als Vektoren von V auffaßt, so nennt man $u_1, \dots, u_n$ die kovarianten Koordinaten von u . Entsprechendes gilt in unitären Vektorräumen mit Konjugierung. Für eine Orthonormalbasis stimmen kontravariante und kovariante Koordinaten überein. Die Unterscheidung von hochgestellten und tiefgestellten Indizes verliert dann ihre Bedeutung. Dann werden die Indizes tiefgestellt: $a = a_1 e_1 + \dots + a_n e_n$
2.9		Koordinatentransformation	Wechsel in den Koordinaten, der sich durch Übergang zu einer anderen Basis ergibt	Neben der Basis $(e_1, \dots, e_n)$ sei jetzt eine Basis $(e'_1, \dots, e'_n)$ von V gegeben. Kovektoren werden jeweils auf die dualen Basen bezogen.

1	2	3	4	5
Nr	Zeichen	Sprechweise, Begriff	Definition	Bemerkungen
2.10		Transformation der Basen	Die neue Basis $(e'_1, \dots, e'_n)$ drücke sich in folgender Weise durch die alte Basis $(e_1, \dots, e_n)$ aus: $e'_i = \sum_k a_i^k e_k \quad (i = 1, \dots, n)$ Umgekehrt sei $e_k = \sum_l b_l^k e'_l \quad (k = 1, \dots, n)$	Die Skalare a_i^k ($i, k = 1, \dots, n$) und b_l^k ($l, k = 1, \dots, n$) bilden quadratische Matrizen, die Übergangsmatrizen, die folgendermaßen zusammenhängen: $\sum_k a_i^k b_k^l = \delta_i^l, \quad \sum_l b_l^k a_i^l = \delta_i^k$ Die Übergangsmatrizen sind invers zueinander (vgl. Nr 4.18). Bei Verwendung von Orthonormalbasen werden die Indizes tiefgestellt, also: $a_{ik} \text{ und } b_{kl} \text{ statt } a_i^k \text{ bzw. } b_k^l$ Siehe Anmerkungen.
2.11		Transformation der Koordinaten eines Vektors	Die neuen Koordinaten und die alten Koordinaten drücken sich in folgender Weise durch einander aus: $a^k = \sum_i a_i^k a'^i$ $a'^l = \sum_k b_k^l a^k$	Man sagt, daß sich die Koordinaten eines Vektors kontragredient zur Basis transformieren. Das Transformationsverhalten ist kontravariant.
2.12		Transformation der Koordinaten eines Kovektors	Die neuen Koordinaten und die alten Koordinaten drücken sich in folgender Weise durch einander aus: $u'_i = \sum_k a_i^k u_k$ $u_k = \sum_l b_k^l u'_l$	Man sagt, daß sich die Koordinaten eines Kovektors kogredient zur Basis transformieren. Das Transformationsverhalten ist kovariant.
2.13	g_{ik}	kovariante Koordinaten des Maßtensors (Metrikensors)	$e_i \cdot e_k$	Die g_{ik} sind die kovarianten Koordinaten eines Tensors 2. Stufe, seine kontravarianten Koordinaten sind die g^{ik} aus Nr 2.14, seine gemischten Koordinaten sind die δ_i^k. Die kovarianten Koordinaten eines Vektors von V errechnen sich aus den kontravarianten folgendermaßen: $a_i = \sum_k g_{ik} a^k$
2.14	g^{ik}	kontravariante Koordinaten des Maßtensors (Metrikensors)	$e^i \cdot e^k$	Die Matrix aus den g^{ik} ist die Inverse der Matrix aus den g_{ik}. Die kontravarianten Koordinaten eines Vektors von V errechnen sich aus den kovarianten folgendermaßen: $a^k = \sum_i g^{ik} a_i$ Wenn eine Orthonormalbasis zugrunde gelegt ist, so gilt: $g_{ik} = g^{ik} = \delta_{ik}$

3 Darstellung der Vektoroperationen in Koordinaten

1	2	3	4	5	6
Nr	Operation	Operanden	Koordinaten	Koordinaten des Ergebnisses	Bemerkungen
3.1	$a + b$	a, b	a^i, b^i ($i = 1, \dots, n$)	$a^i + b^i$ ($i = 1, \dots, n$)	
3.2	$x a$	x, a	a^i ($i = 1, \dots, n$)	$x a^i$ ($i = 1, \dots, n$)	
3.3	$a \cdot b$	a, b	a^i, b_i ($i = 1, \dots, n$)	$\sum_i a^i b_i$	Hierbei sind a^i die kontravarianten und b_i die kovarianten Koordinaten von a bzw. b . Unter Benutzung nur kontravarianter Koordinaten erhielte man: $\sum_{i,k} g_{ik} a^i b^k$
3.4	$a \times b$	a, b	a^i, b^i ($i = 1, 2, 3$)	Die drei kovarianten Koordinaten des Vektorproduktes sind: $[e_1, e_2, e_3] \begin{vmatrix} a^2 & a^3 \\ b^2 & b^3 \end{vmatrix}, [e_1, e_2, e_3] \begin{vmatrix} a^3 & a^1 \\ b^3 & b^1 \end{vmatrix}, [e_1, e_2, e_3] \begin{vmatrix} a^1 & a^2 \\ b^1 & b^2 \end{vmatrix}$	Die kontravarianten Koordinaten errechnen sich daraus nach Nr 2.14 mit den g^{ik} . Eine Merkregel für die Koordinaten ist in Determinantenform: $[e_1, e_2, e_3] \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \end{vmatrix}$
3.5	$[a, b, c]$	a, b, c	a^i, b^j, c^j ($i = 1, 2, 3$)	$[e_1, e_2, e_3] \begin{vmatrix} a^1 & a^2 & a^3 \\ b^1 & b^2 & b^3 \\ c^1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix}$	Der Faktor $[e_1, e_2, e_3]$ in Nr 3.4 und Nr 3.5 ist insbesondere dann 1, wenn die Basisvektoren e_1, e_2, e_3 ein orthonormiertes Rechtssystem bilden. Es gilt: $[i, j, k] = 1$
3.6	(a, b)	a, b	a^i, b_i ($i = 1, \dots, n$)	$\sum_i a^i \bar{b}_i$	Hierbei sei ein unitärer Vektorraum mit Konjugierung vorausgesetzt. Die a^i sind die kontravarianten und die b_i die kovarianten Koordinaten von a bzw. b bezüglich einer reellen Basis.
3.7	$\langle u a \rangle$	u, a	u_i, a^i	$\sum_i u_i a^i$	Mit der Identifizierung nach Nr 1.27 in euklidischen Vektorräumen geht Nr 3.7 in Nr 3.3 über.