

Schwingungen und schwingungsfähige Systeme
Teil 2: Lineare, zeitinvariante schwingungsfähige Systeme
mit einem Freiheitsgrad

DIN
1311-2

ICS 17.160

Ersatz für
DIN 1311-2:1974-12

(Mechanical) vibrations, oscillations and vibration systems –
Part 2: Linear vibration systems with single degree of freedom

Vibrations (mécaniques), oscillations et systèmes de vibrations –
Partie 2: Systèmes de vibrations linéaires à 1 degré de liberté

Vorwort

Diese Norm wurde vom Gemeinschaftsarbeitsausschuss NATG-A.32/NALS C 1 „Schwingungslehre“ erarbeitet.
DIN 1311 „Schwingungen und schwingungsfähige Systeme“ besteht aus:

- Teil 1: Grundbegriffe, Einteilung
- Teil 2: Lineare, zeitinvariante schwingungsfähige Systeme mit einem Freiheitsgrad
- Teil 3: Lineare, zeitinvariante schwingungsfähige Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden

Normen über „Lineare Kontinua, Kontinuumsschwingungen, Wellen“ sowie „Schwingungen nichtlinearer, selbsterregter und parametererregter Systeme“ sind in Vorbereitung.

Die Anhänge A und B sind informativ.

Änderungen

Gegenüber DIN 1311-2:1974-12 wurden folgende Änderungen vorgenommen:

- a) Um Arten der Erregungen und Schwingungsantworten erweitert;
- b) Um Beschreibungen im Frequenzbereich mittels Übertragungsfunktionen erweitert;
- c) Inhalt vollständig überarbeitet.

Frühere Ausgaben

DIN 1311-2: 1955-06, 1974-12

Fortsetzung Seite 2 bis 49

Normenausschuss Technische Grundlagen (NATG) – Einheiten und Formelgrößen –
im DIN Deutsches Institut für Normung e.V.
Normenausschuss Akustik, Lärminderung und Schwingungstechnik (NALS) im DIN und VDI

1 Anwendungsbereich

Diese Normenreihe legt Begriffe zu Schwingungen und schwingungsfähigen Systemen vorwiegend im Bereich der Mechanik fest und gibt zusätzlich Leitlinien für deren Anwendung. Der vorliegende Teil 2 behandelt schwingungsfähige Systeme mit einem Freiheitsgrad. Im Einzelfall werden Hinweise zu analogen Begriffsbestimmungen in der Akustik und Elektrotechnik gegeben.

Diese Norm soll Grundlage für andere Normen bezüglich der Begriffe, Bezeichnungen und Definitionen in den genannten Fachgebieten sein. Sie soll die interdisziplinäre Zusammenarbeit durch einheitliche Begriffe und allgemein gültige Darstellung der Zusammenhänge erleichtern.

2 Normative Verweisungen

Diese Norm enthält durch datierte oder undatierte Verweisungen Festlegungen aus anderen Publikationen. Diese normativen Verweisungen sind an den jeweiligen Stellen im Text zitiert, und die Publikationen sind nachstehend aufgeführt. Bei datierten Verweisungen gehören spätere Änderungen oder Überarbeitungen dieser Publikationen nur zu dieser Norm, falls sie durch Änderung oder Überarbeitung eingearbeitet sind. Bei undatierten Verweisungen gilt die letzte Ausgabe der in Bezug genommenen Publikation (einschließlich Änderungen).

DIN 1311-1:2000-02, *Schwingungen und schwingungsfähige Systeme – Teil 1: Grundbegriffe, Einteilung*

3 Beschreibung des Systems

Bei einem **schwingungsfähigen System mit einem Freiheitsgrad** kann die momentane Lage (Auslenkung oder Drehung) durch eine einzige Koordinate vollständig beschrieben werden.

Für die Beschreibung eines **Systems** mit einem Freiheitsgrad sind neben der Angabe einer Koordinate auch noch Angaben über die Strukturelemente und ihre Merkmale (Parameter) erforderlich (siehe Abschnitt 13 von DIN 1311-1:2000-02).

Die Anordnung der Strukturelemente kann dabei unterschiedlich sein (Bild 1). Die Reihenschaltung von Feder und Dämpfer wird vielfach als 2-Parameter-Modell (Maxwell-Modell, Bild 1c) für die Beschreibung der Eigenschaften viskoelastischer Flüssigkeiten verwendet. In der vorliegenden Norm werden nur schwingungsfähige Systeme mit einem Freiheitsgrad mit einem masselosen Feder-Dämpfer-Element in Parallelschaltung von Feder und Dämpfer (Bild 1a) behandelt.

Die Strukturelemente werden in idealer Form zugrunde gelegt, also z. B. eine Feder als masselos und ohne dissipative Eigenschaften.

Für die eindeutige Beschreibung des **momentanen Zustands** eines schwingungsfähigen Systems mit einem Freiheitsgrad ist die Angabe von zwei Zustandsgrößen erforderlich. Neben der Angabe der momentanen Lage durch eine Koordinate ist also noch die Angabe des Momentanwertes einer weiteren Zustandsgröße, im Allgemeinen der Schwinggeschwindigkeit, notwendig.

Mit der Beschreibung des **Zeitverlaufs** einer Zustandsgröße werden auch weitere Zustandsgrößen in ihrem Zeitverlauf erfasst, d. h., für die Beschreibung des Verhaltens eines schwingungsfähigen Systems mit einem Freiheitsgrad kann an die Stelle der Momentanwerte zweier Zustandsgrößen der Zeitverlauf einer Zustandsgröße treten.

4 Lineares System

Für ein lineares, zeitinvariantes, schwingungsfähiges System mit einem Freiheitsgrad muss ein linearer Zusammenhang zwischen den Zustandsgrößen und den Kraftwirkungen der Strukturelemente bestehen. Es gilt das Superpositionsprinzip (siehe Abschnitt 13 von DIN 1311-1:2000-02). Bei den nachfolgend zugrunde gelegten zeitinvarianten Systemen sind die Kennwerte und Kennfunktionen der Strukturelemente zeitlich konstant.

ANMERKUNG Gehorcht die Zustandsgröße x zur Beschreibung eines schwingungsfähigen Systems einer linearen Differentialgleichung der Form

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = p(t), \quad (1)$$

wobei die Koeffizienten m , d und k konstant sind und nicht wie die Erregerkraft $p(t)$ von der Zeit t abhängen, so heißt das schwingungsfähige System zeitinvariant und linear.

5 Strukturelemente

5.1 Übersicht

Die Strukturelemente in einem linearen System sind zu unterteilen in Energiespeicher und dissipative Strukturelemente. Die Summe der Energien in den Energiespeichern kann sich durch dissipative Strukturelemente vermindern oder durch Energiezufuhr von außen vergrößern. Wird die Energiesumme durch dissipative Strukturelemente vermindert, so wird das System als „gedämpft“ bezeichnet. Wenn die Verminderung der Energie infolge der dissipativen Strukturelemente durch eine kontinuierliche Energiezufuhr von außen kompensiert wird, so entstehen stationäre erzwungene Schwingungen. Ist die zugeführte Energie größer als die dissipierte Energie, so ergeben sich angefachte Schwingungen.

Die Masse m und die Federsteifigkeit k eines translatorisch schwingenden Systems nach Gleichung (1) bzw. das Massenträgheitsmoment J und die Drehfedersteifigkeit k_t eines rotatorisch linearen schwingungsfähigen Systems sowie der Dämpfungskoeffizient d werden als Parameter der Strukturelemente bezeichnet.

ANMERKUNG Angefachte Schwingungen können infolge nichtlinearer Eigenschaften der Strukturelemente in stationäre, periodische Schwingungen übergehen.

5.2 Energiespeicher

5.2.1 Allgemeines

Ein schwingungsfähiges System mit einem Freiheitsgrad besitzt zwei, durch je einen Parameter gekennzeichnete Energiespeicher: einen für die kinetische Energie E_{kin} und einen für die potentielle Energie E_{pot} . Zwischen diesen Energiespeichern findet während einer Schwingung ein ständiger Energieaustausch statt.

Der zeitliche Verlauf des Energieaustausches zwischen den beiden Energiespeichern wird für freie ungedämpfte Schwingungen durch die Blindleistung P_q mit der Gleichung

$$P_q = \frac{d}{dt} E_{\text{kin}} = -\frac{d}{dt} E_{\text{pot}} \quad (2)$$

beschrieben.

Speicher für kinetische Energie sind starre Körper. Speicher für potentielle Energie sind Potentialfelder und elastische Elemente. Letztere werden als Federn bezeichnet.

5.2.2 Masse und Massenträgheitsmoment als Speicher kinetischer Energie

Bei einer translatorischen Bewegung mit der Koordinate $x(t)$ stellt die Masse m des starren Körpers den Speicher für die kinetische Energie dar. Wird der starre Körper dabei als punktförmig mit der Masse m angenommen, so wird er als Massenpunkt bezeichnet. Die darin gespeicherte kinetische Energie ist

$$E_{\text{kin}}(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t). \quad (3)$$

Bei einer rotatorischen Bewegung mit der Koordinate $\varphi(t)$ stellt das Massenträgheitsmoment J bezüglich der Drehachse des starren Körpers den Speicher für die kinetische Energie dar. Die gespeicherte kinetische Energie ist:

$$E_{\text{kin}}(t) = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2(t). \quad (4)$$

5.2.3 Feder und Potentialfeld als Speicher potentieller Energie

Bei einer translatorischen Bewegung mit der Koordinate $x(t)$ stellt die Feder den Speicher für die potentielle Energie dar. Bei einer linearen Feder gilt für den Zusammenhang zwischen der Rückstellkraft F_{elast} und der Auslenkung x aus der Ruhelage der lineare Zusammenhang

$$F_{\text{elast}}(x(t)) = kx(t). \quad (5)$$

Dabei ist k die Federsteifigkeit (der Federkoeffizient, die Federsteife).

Damit ergibt sich für die gespeicherte potentielle Energie:

$$E_{\text{pot}}(t) = \int F_{\text{elast}}(x(t)) dx$$

$$E_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2} kx^2(t),$$
(6)

wobei der Ruhelage des Systems die potentielle Energie null zugeordnet wird.

Bei einer linearen Drehfeder eines drehschwingungsfähigen Systems gilt analog für das Rückstellmoment M_{elast} :

$$M_{\text{elast}}(\varphi(t)) = k_t \varphi(t).$$
(7)

Dabei ist k_t die Drehfedersteifigkeit (der Drehfederkoeffizient, die Drehfedersteife). Für die darin gespeicherte potentielle Energie gilt:

$$E_{\text{pot}}(t) = \int M_{\text{elast}}(\varphi(t)) d\varphi$$

$$E_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2} k_t \varphi^2(t).$$
(8)

Bei z. B. Pendelbewegungen eines Massenpunkts oder Biegeschwingungen eines Systems in einem Potentialfeld (z. B. Gravitationsfeld, Fliehkraftfeld) resultieren Rückstellmomente bzw. Rückstellkräfte aus der am Massenpunkt angreifenden Kraft (z. B. Gewichtskraft, Fliehkraft).

5.3 Dissipatives Strukturelement

Bei einem linearen dissipativen Strukturelement gilt für den Zusammenhang zwischen der Dämpfungskraft F_{diss} und der Schwinggeschwindigkeit $\dot{x}(t)$ der lineare Zusammenhang:

$$F_{\text{diss}}(\dot{x}(t)) = d \dot{x}(t).$$
(9)

Dabei ist d der Dämpfungskoeffizient. Die dissipierte Energie E_{diss} ist:

$$E_{\text{diss}}(t) = \int F_{\text{diss}}(\dot{x}(t)) dx.$$
(10)

Für die Integration muss der Zeitverlauf der Schwinggeschwindigkeit $\dot{x}(t)$ bekannt sein. Die Dämpfung eines dissipativen Strukturelementes, dessen Eigenschaften durch den Zusammenhang von Dämpfungskraft und Schwinggeschwindigkeit beschrieben werden, wird Bauteildämpfung eines Dämpfers genannt.

ANMERKUNG 1 Der lineare Zusammenhang zwischen der Dämpfungskraft und der Schwinggeschwindigkeit mit dem Dämpfungskoeffizienten d (in ISO 2041 Damping coefficient c) wird vielfach als Näherung zur Beschreibung von Werkstoffdämpfung, Bauteildämpfung, Flüssigkeitsdämpfung, nicht aber von nichtlinearer Dämpfung (trockener Reibung, Coulombsche Reibung) einschließlich Turbulenzdämpfung verwendet.

ANMERKUNG 2 Die Dämpfung in einem linearen System, die mit der verzögerten Speicherung und Abgabe von Schwingungsenergien auftritt, wird durch den Verlustfaktor η beschrieben. Er ist für harmonische Schwingungen definiert durch

$$\eta = \frac{E_V}{E_r},$$
(11)

wobei E_V die pro Periode durch Dissipation, Fortleitung oder Abstrahlung aus dem System herausgeführte Energie und E_r das Maximum der potentiellen Energie bezeichnen. Der Verlustwinkel δ_V ist bestimmt durch

$$\delta_V = \arctan \eta.$$
(12)

5.4 Lineare Strukturelemente

Federn und Potentialfelder zur Speicherung potentieller Energie und dissipative Strukturelemente sind dann linear, wenn ihre kennzeichnenden Parameter unabhängig von den Zustandsgrößen sind.

ANMERKUNG In der Praxis zeigen die Speicher für die potentielle Energie und die dissipativen Strukturelemente häufig ein nichtlineares Verhalten, so dass nur für die in der Regel auftretenden kleinen Auslenkungen näherungsweise eine Linearisierung vorgesehen werden kann.

5.5 Komplexe Federsteifigkeit eines Feder-Dämpfer-Elementes

Wird ein masseloses Feder-Dämpfer-Element mit Parallelanordnung von Feder und Dämpfer harmonisch verformt und dafür die komplexe Darstellung nach DIN 1311-1:2000-02 Abschnitt 5.1 mit der Erregerkreisfrequenz Ω und dem Nullphasenwinkel $\varphi_0 = 0$ verwendet, also

$$\underline{x}(t) = \hat{x} e^{i\Omega t}, \quad (13)$$

so kann die Gesamtkraft $\underline{F}(t)$ als Summe von Rückstellkraft und Dämpfungskraft angegeben werden zu

$$\underline{F}(t) = k \underline{x}(t) + d \dot{\underline{x}}(t), \quad (14)$$

also

$$\underline{F}(t) = (k + di\Omega) \hat{x} e^{i\Omega t} \quad (15)$$

und mit Gleichung (13)

$$\underline{F}(t) = (k + di\Omega) \underline{x}(t). \quad (16)$$

Der Koeffizient in Gleichung (16) wird komplexe Federsteifigkeit $\underline{k}_k$ genannt:

$$\underline{k}_k = k + di\Omega. \quad (17)$$

Die Verwendung komplexer Federsteifigkeiten von Feder-Dämpfer-Elementen in den Differentialgleichungen der schwingungsfähigen Systeme ist nicht zulässig. Von der komplexen Steifigkeit eines Feder-Dämpfer-Elementes ist die ebenfalls komplexe dynamische Federsteifigkeit eines Strukturelements (siehe 5.6) oder eines schwingungsfähigen Systems (siehe 7.5.2), bei der Trägheitswirkungen der Masse des Strukturelements oder des schwingungsfähigen Systems berücksichtigt werden, zu unterscheiden.

5.6 Dynamische Federsteifigkeit eines Strukturelements

Weist ein massebehaftetes, lineares Strukturelement viskoelastische Eigenschaften (2-Parameter-Modell, Voigt-Kelvin-Modell) auf und können diese Eigenschaften als Parallelschaltung verstanden werden, so entsteht bei einer harmonischen Verformung

$$\underline{x}(t) = \hat{x} e^{i\Omega t} \quad (18)$$

$$\underline{x}(t) = \hat{x} (\cos \Omega t + i \sin \Omega t)$$

an der Stelle der eingeleiteten Verformung die Gesamtkraft $\underline{p}(t)$ als Summe von Rückstellkraft, Dämpfungskraft und Trägheitskraft gemäß

$$\underline{p}(t) = k \underline{x} + d \dot{\underline{x}} + m^* \ddot{\underline{x}}, \quad (19)$$

dann gilt mit Gleichung (18)

$$\underline{p}(t) = (k - m^* \Omega^2 + i\Omega d) \hat{x} e^{i\Omega t}. \quad (20)$$

Der Koeffizient in Gleichung (20) wird komplexe dynamische Federsteifigkeit $\underline{k}_d$ genannt. Die Masse m^* ist die dynamisch relevante Masse, deren Größe von der Verteilung der Masse und der Verformung innerhalb des Strukturelementes abhängig ist, die jedoch immer kleiner ist als die Gesamtmasse des Strukturelementes. In der Praxis wird vielfach der Betrag der komplexen dynamischen Federsteifigkeit als dynamische Steifigkeit k_d angegeben. Er ist stark frequenzabhängig.

ANMERKUNG Sofern die harmonische Verformung als Eingang auf ein schwingungsfähiges System einwirkt und die Reaktionskraft an einem gewählten Ausgang des schwingungsfähigen Systems betrachtet wird, ist die inverse Übertragungsfunktion $H_{px}(i\Omega)$ die komplexe dynamische Steifigkeit des schwingungsfähigen Systems zwischen Ausgang und Eingang (siehe 7.5.2).

6 Freie Schwingungen

6.1 Freie ungedämpfte Schwingungen

Freie ungedämpfte Schwingungen sind freie Schwingungen (siehe 4.2.2.1 von DIN 1311-1:2000-02) eines schwingungsfähigen Systems ohne dissipative Strukturelemente. Für das vorausgesetzte lineare schwingungsfähige System erfolgt ein periodischer Energieaustausch zwischen den Energiespeichern für kinetische und potentielle Energie.

Mit der zeitabhängigen Koordinate x kann das lineare schwingungsfähige System mit einem Freiheitsgrad nach Bild 1 a mit den Parametern der Strukturelemente, Masse m , Federsteifigkeit k und Dämpfungskoeffizient $d = 0$, durch die Bewegungsdifferentialgleichung

$$m\ddot{x} + kx = 0 \quad (21)$$

beschrieben werden. Aufgrund der vorausgesetzten Zeitinvarianz des schwingungsfähigen Systems sind die Parameter der Strukturelemente zeitlich konstant. Die Lösung

$$x(t) = \hat{x} \cos(\omega_0 t + \varphi_{0c}) \quad (22)$$

der Differentialgleichung beschreibt die Eigenschwingung mit der Eigenkreisfrequenz des ungedämpften Systems:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (23)$$

Die Amplitude $\hat{x}$ und der Nullphasenwinkel φ_{0c} bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen.

ANMERKUNG Die Periodendauer T_0 der Eigenschwingung des ungedämpften Systems ist

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}, \quad (24)$$

die Eigenfrequenz f_0 des ungedämpften Systems ist

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}. \quad (25)$$

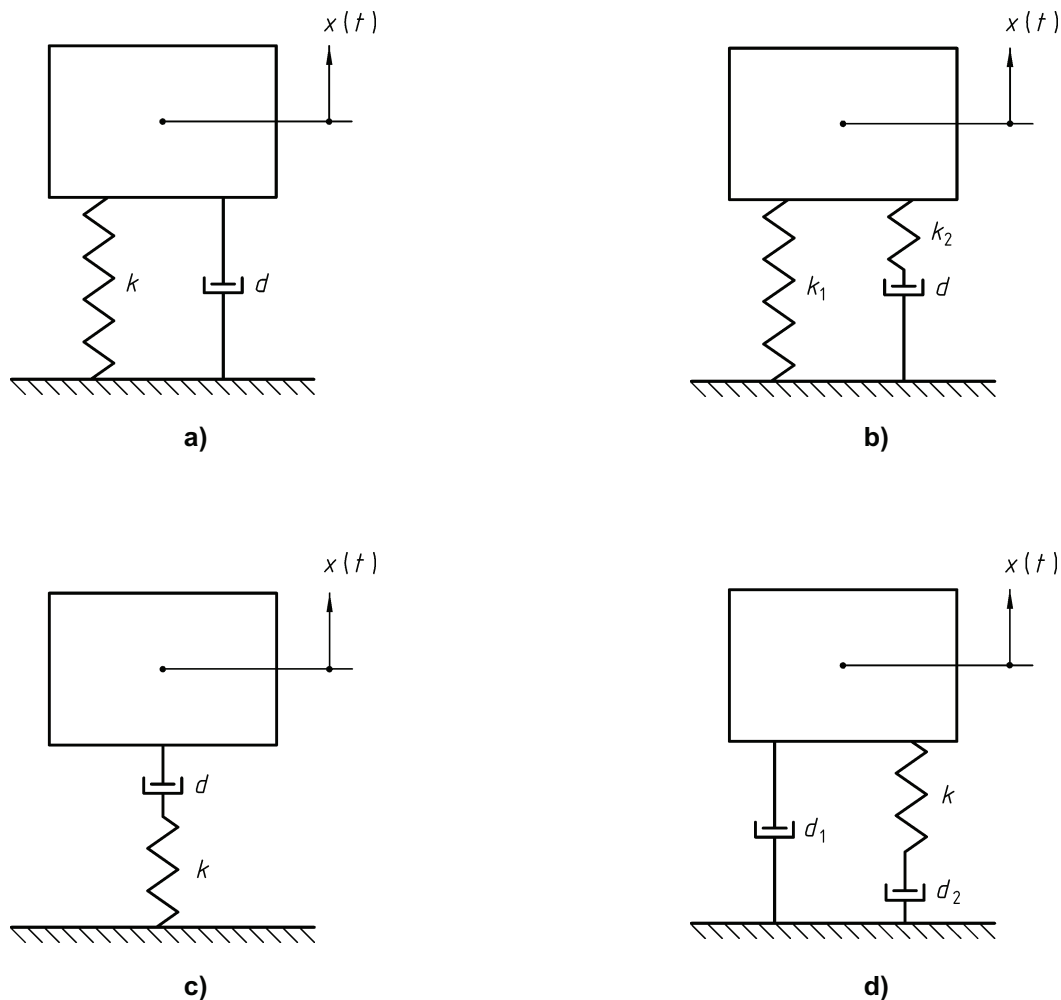


Bild 1 – Verschiedene schwingungsfähige Systeme mit einem Freiheitsgrad $x(t)$, jeweils bezogen auf die statische Ruhelage

6.2 Freie gedämpfte Schwingungen

6.2.1 Allgemeines

Freie gedämpfte Schwingungen sind freie Schwingungen eines schwingungsfähigen Systems mit dissipativen Strukturelementen. Die Bewegungsdifferentialgleichung für ein lineares schwingungsfähiges System mit einem Freiheitsgrad nach Bild 1a lautet dafür

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = 0. \quad (26)$$

Dabei ist d der Dämpfungskoeffizient nach 5.3.

Im Folgenden wird die Lösung der Differentialgleichung in Abhängigkeit vom Dämpfungsgrad

$$\vartheta = \frac{d}{2\sqrt{mk}} \quad (27)$$

beschrieben.

6.2.2 Schwach und stark gedämpftes System

Für Werte des Dämpfungsgrades $\vartheta \ll 1$ heißt das schwingungsfähige System schwach gedämpft und für $\vartheta < 1$ stark gedämpft. Die Lösung der Differentialgleichung ist in diesen Fällen

$$x(t) = Ae^{-\delta t} \cos(\omega_d t + \varphi_{0c}), \quad (28)$$

also eine quasiharmonische Schwingung. Diese wird wie beim ungedämpften System als Eigenschwingung bezeichnet. In der Lösung wird

$$\delta = \frac{d}{2m} \quad (29)$$

als Abklingkoeffizient und

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \vartheta^2} \quad (30)$$

als Eigenkreisfrequenz des gedämpften schwingungsfähigen Systems bezeichnet. Es sind A und φ_0 Integrationskonstanten, die sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen.

ANMERKUNG 1 Die Quasi-Periodendauer T_d der Eigenschwingung bestimmt sich zu

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d}. \quad (31)$$

Die Eigenfrequenz f_d ist

$$f_d = \frac{\omega_d}{2\pi}. \quad (32)$$

ANMERKUNG 2 Nach 4.1 von DIN 1311-3:2000-02 können der Abklingkoeffizient δ und die Eigenkreisfrequenz ω_d des gedämpften Systems zu den konjugiert komplexen Eigenwerten

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm i\omega_d \quad (33)$$

zusammengefasst werden.

6.2.3 Sehr stark gedämpftes System

Für Werte des Dämpfungsgrades $\vartheta \geq 1$ heißt das schwingungsfähige System sehr stark gedämpft. Die Eigenwerte λ_1, λ_2 sind in diesem Fall negativ (siehe 3.1 von DIN 1311-3:2000-02). Die Lösung der Differentialgleichung ist daher im Fall $\vartheta > 1$

$$x(t) = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t} \quad (34)$$

mit $\lambda_1, \lambda_2 < 0$,

was als aperiodische Schwingung (Kriechbewegung) bezeichnet wird.

Im Fall $\vartheta = 1$ ist

$$x(t) = (A_1 t + A_2) e^{\lambda t} \quad (35)$$

mit $\lambda < 0$, was als aperiodischer Grenzfall bezeichnet wird.

Die Integrationskonstanten A_1 und A_2 bestimmen sich aus den Anfangsbedingungen.

7 Erzwungene Schwingungen

Begriff siehe 6.3.2 von DIN 1311-1:2000-02.

7.1 Allgemeines

Eine systemtheoretische Betrachtungsweise ist in DIN 1311-1:2000-02 Bild 16 gezeigt.

Wird mit der Koordinate $x(t)$ die Bewegung um die statische Ruhelage des schwingungsfähigen Systems gekennzeichnet, kann das System durch die Bewegungsdifferentialgleichung

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = p(t) \quad (36)$$

beschrieben werden. Dabei ist $p(t)$ die äußere Erregung.

ANMERKUNG Nach ISO 31-3 und DIN 1304-1 wird für die Kraft das Formelzeichen F benutzt. In der vorliegenden Norm wird abweichend davon $p(t)$ benutzt, um das Fourier-Spektrum der Kraft mit $P(i\Omega)$ bezeichnen zu können.

Die allgemeine Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung setzt sich zusammen aus der allgemeinen Lösung der zugehörigen homogenen Differentialgleichung nach 6.2 und einer partikulären Lösung der inhomogenen Differentialgleichung. Bei harmonischer Erregung mit

$$p(t) = \hat{p} \cos \Omega t \quad (37)$$

ist diese partikuläre Lösung

$$x(t) = \hat{x} \cos(\Omega t - \zeta). \quad (38)$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Differentialgleichung beschreibt die freien Schwingungen nach Abschnitt 6. Infolge der in der Praxis stets vorhandenen Dämpfung klingen die freien Schwingungen ab. Es verbleiben die Schwingungen, die durch die partikuläre Lösung beschrieben werden.

Ein wesentliches Merkmal erzwungener Schwingungen ist die Art der Schwingungserregung. Zur Beschreibung der Schwingungsantwort kann nach 7.5 auf verschiedene Beschreibungsformen der Übertragungseigenschaften des schwingungsfähigen Systems zurückgegriffen werden.

7.2 Arten der Erregung und Schwingungsantworten

7.2.1 Allgemeines

Nachfolgend werden fünf prinzipielle Arten der Erregung eines schwingungsfähigen Systems mit einem Freiheitsgrad beschrieben. In allen Fällen wird eine Rückwirkung des schwingungsfähigen Systems auf die Erregung nicht berücksichtigt. Als Schwingungsantwort wird in allen Fällen zunächst die Absolutbewegung $x(t)$ der Masse m betrachtet. Es können auch andere Schwingungsantworten betrachtet werden. Nachfolgend werden dafür Beispiele gegeben.

7.2.2 Krafterregung

Die Erregung erfolgt durch eine auf die Masse einwirkende Kraft $p(t)$. Als Schwingungsantwort kann die Absolutbewegung $x(t)$ der Masse m oder die Fußpunktkraft $p_F(t)$ betrachtet werden (siehe Bild 2).

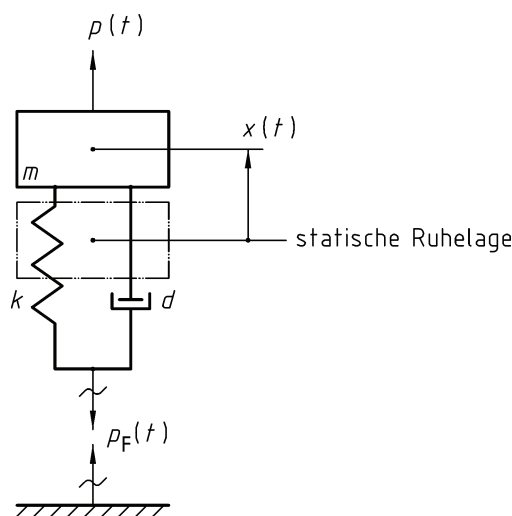


Bild 2 – Krafterregung

ANMERKUNG 1 Beispiele für eine Krafterregung: Gaskräfte, elektromagnetische Kräfte, elektrodynamische Kräfte, hydraulische Kräfte.

ANMERKUNG 2 Die Betrachtung der auf den Fußpunkt einwirkende Kraft $p_F(t)$ bei der Krafterregung entspricht der Quellenisolation (siehe DIN EN 1299) bei der Schwingungsisolation.

7.2.3 Unwuchterregung (Massenkrafterregung)

Die Erregung erfolgt z. B. durch zwei gegenläufig, mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit Ω am Radius r umlaufende Unwuchtmassen $\frac{m_u}{2}$. Als Schwingungsantwort kann die Absolutbewegung $x(t)$ der Masse m oder die Fußpunktkraft $p_F(t)$ betrachtet werden (siehe Bild 3). Mit $m = m_1 + m_u$ gilt für die auf die Masse m einwirkende Massenkraft:

$$p(t) = m_u r \Omega^2 \sin \Omega t. \quad (39)$$

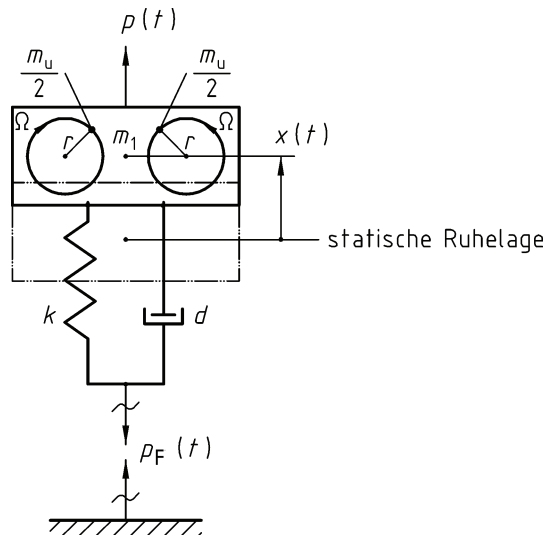


Bild 3 – Unwuchterregung (Massenkrafterregung)

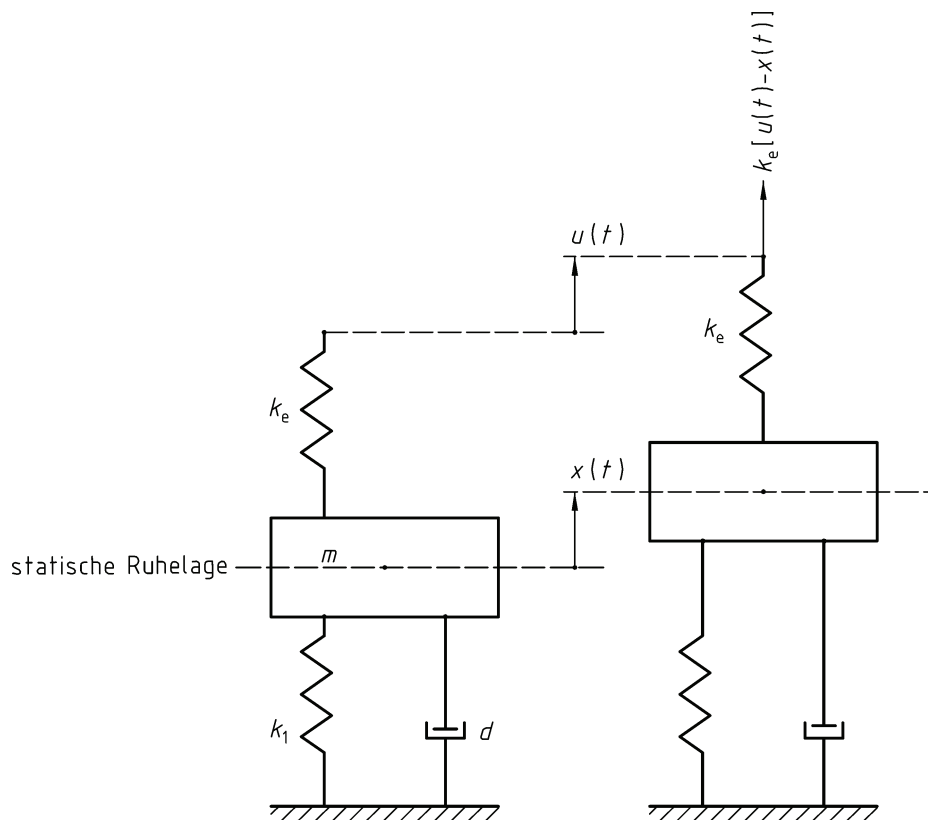


Bild 4 – Federkrafterregung

7.2.4 Federkrafterregung

Die Federkrafterregung erfolgt als Wegerregung $u(t)$. Sie führt an der Masse m zu einer Krafterregung

$$p(t) = k_e[u(t) - x(t)] \quad (40)$$

(siehe Bild 4).

Für die Federsteifigkeit k des schwingungsfähigen Systems ist dann in der Differentialgleichung $k = k_1 + k_e$ einzusetzen, so dass die Differentialgleichung (31) hier lautet

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = k_e u(t). \quad (41)$$

7.2.5 Dämpfungserregung

Die Dämpfungserregung erfolgt als Wegerregung $u(t)$ am Dämpfer (siehe Bild 5). Sie führt an der Masse m zu einer Krafterregung

$$p(t) = d_e[\dot{u}(t) - \dot{x}(t)]. \quad (42)$$

Für den Dämpfungskoeffizienten d des schwingungsfähigen Systems ist dann in der Differentialgleichung $d = d_1 + d_e$ einzusetzen, so dass die Differentialgleichung (36) hier lautet

$$m\ddot{x} + d\dot{x} + kx = d_e \dot{u}(t). \quad (43)$$

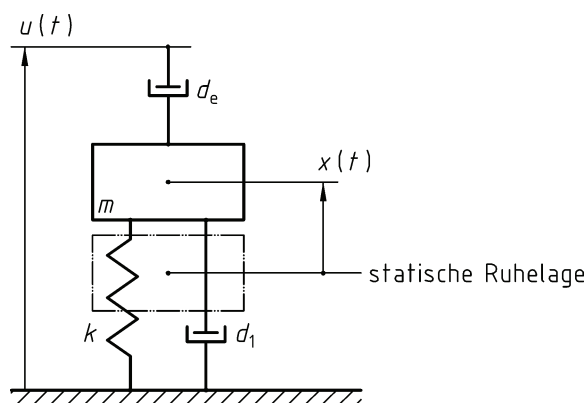


Bild 5 – Dämpfungserregung

7.2.6 Fußpunkterregung

Die Fußpunkterregung erfolgt als Wegerregung $u(t)$ am Fußpunkt des Systems. Sie führt über die Feder mit der Federsteifigkeit k und den Dämpfer mit dem Dämpfungskoeffizient d zu der Krafterregung

$$p(t) = ku(t) + d\dot{u}(t). \quad (44)$$

Als Schwingungsantwort kann die Absolutbewegung $x(t)$ der Masse m oder die Relativbewegung $x_{\text{rel}}(t)$, bezogen auf den Fußpunkt, betrachtet werden (siehe Bild 6).

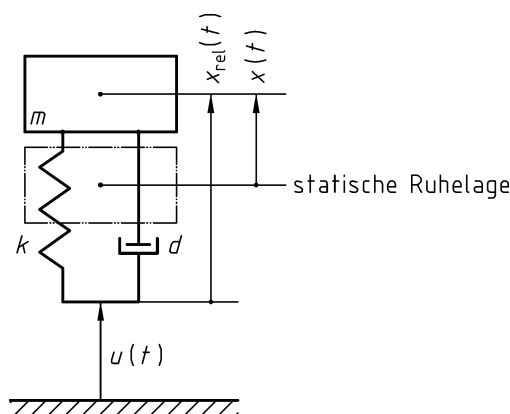


Bild 6 – Fußpunkterregung

ANMERKUNG 1 Der Fall der Fußpunkterregung mit Betrachtung der Absolutbewegung der Masse beschreibt die Empfängerisolation (siehe DIN EN 1299) bei der Schwingungsisolation.

ANMERKUNG 2 Die Betrachtung der Relativbewegung $x_{\text{rel}}(t)$ der Masse bei der Fußpunkterregung entspricht dem seismischen (Absolut-)Messprinzip in der Schwingungsmesstechnik (siehe DIN 45662).

7.3 Darstellungsformen für Schwingungserregungen und Schwingungsantworten

7.3.1 Allgemeines

Schwingungserregungen und Schwingungsantworten können üblicherweise als Zeitverläufe (siehe Bild 7a) dargestellt werden. Durch andere Darstellungen im Zeitbereich können bestimmte Eigenschaften der Zeitverläufe oder des schwingungsfähigen Systems leichter erkannt oder ausgewertet werden. Besonders geeignet sind

- Hystereseschleife (siehe Bild 7b) und
- Zeigerdarstellung (siehe Bild 7c).

7.3.2 Kraft-Weg-Diagramm

Das Kraft-Weg-Diagramm ist die Auftragung aller Momentanwerte von Schwingungserregung und Schwingungsantwort als Wertepaare, wobei die Zeit ein Parameter dieser Darstellung ist.

Bei einer harmonischen Erregung entsteht bei einem linearen, zeitinvarianten schwingungsfähigen System auch eine harmonische Systemantwort. In diesem Fall zeigt die Darstellung der Momentanwerte eine Ellipse.

ANMERKUNG Aus der Form der Ellipse kann keine Aussage über die Größe der Dämpfung gemacht werden, da neben dem elastischen und dämpfenden Kraftanteil auch Trägheitskräfte enthalten sind (Bild 7b).

7.3.3 Zeigerdarstellung

Die Zeigerdarstellung entspricht der Darstellung nach Bild 3 von DIN 1311-1:2000-02. Bild 7c enthält ein Beispiel.

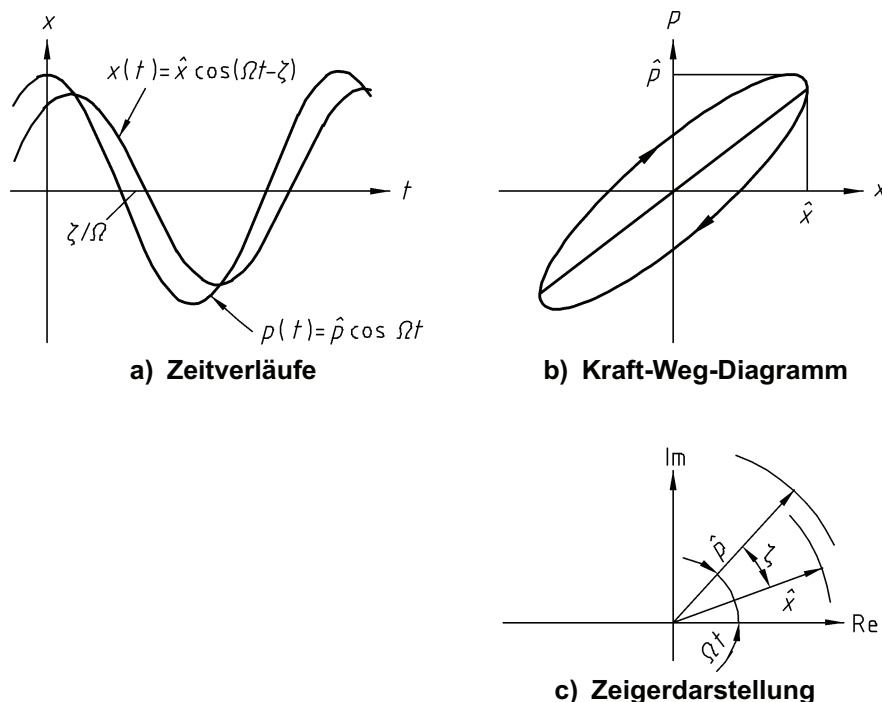


Bild 7 – Darstellungsformen im Zeitbereich

7.4 Schein-, Blind- und Wirkleistung bei stationären Schwingungen

Ebenso wie bei Wechselströmen (siehe 3.3 von DIN 40110-1:1994-03) lassen sich auch für harmonisch belastete Strukturelemente der Mechanik, insbesondere für Federn und dissipative Strukturelemente, Augenblicks- und Mittelwerte der Leistung ableiten. Für ein mit der harmonischen Kraft

$$p(t) = \hat{p} \cos \Omega t$$

(45)

nach Bild 1 belastetes schwingungsfähiges System mit einem Freiheitsgrad stellt sich die phasenverschobene Auslenkung

$$x(t) = \hat{x} \cos(\Omega t - \zeta) \quad (46)$$

ein. Mit der Federkraft

$$p_{\text{elast}}(t) = kx(t) = k\hat{x} \cos(\Omega t - \zeta), \quad (47)$$

der Trägheitskraft

$$p_{\text{m}}(t) = m\ddot{x}(t) = -m\hat{x}\Omega^2 \cos(\Omega t - \zeta) \quad (48)$$

und der Dämpferkraft

$$p_{\text{diss}}(t) = d\dot{x}(t) = -d\hat{x}\Omega \sin(\Omega t - \zeta) \quad (49)$$

ergibt sich die gesamte wirksame Erregerkraft $p(t)$ zu

$$p(t) = p_{\text{elast}}(t) + p_{\text{m}}(t) + p_{\text{diss}}(t). \quad (50)$$

Daraus resultiert die **Scheinleistung**

$$P_{\text{S}}(t) = p(t) \dot{x}(t) \quad (51)$$

mit Gleichungen (51), (45) und (46) zu

$$P_{\text{S}}(t) = \frac{1}{2} \hat{p} \hat{x} \Omega (\sin \zeta - \sin(2\Omega t - \zeta)). \quad (52)$$

Mit Gleichungen (51), (50), (47), (48), (49) und (46) lässt sich die Scheinleistung darstellen als

$$P_{\text{S}}(t) = -\frac{1}{2} \hat{x}^2 \Omega (k - m\Omega^2) \sin 2(\Omega t - \zeta) + \frac{1}{2} \hat{x}^2 \Omega^2 d (1 - \cos 2(\Omega t - \zeta)). \quad (53)$$

Die Scheinleistung $P_{\text{S}}(t)$ lässt sich aufteilen gemäß

$$P_{\text{S}} = P_{\text{q}}(t) + P_{\text{p}}(t), \quad (54)$$

in die **Blindleistung** $P_{\text{q}}(t)$ infolge der Strukturelemente Feder und Masse, also

$$P_{\text{q}}(t) = \frac{1}{2} \hat{x}^2 \Omega (m\Omega^2 - k) \sin 2(\Omega t - \zeta) \quad (55)$$

und in die **Wirkleistung** $P_{\text{p}}(t)$ (Verlustleistung) durch das dissipative Strukturelement, also

$$P_{\text{p}}(t) = \frac{1}{2} \hat{x}^2 \Omega^2 d (1 - \cos 2(\Omega t - \zeta)). \quad (56)$$

Die Mittelwerte davon sind

$$\begin{aligned} \overline{P_{\text{q}}} &= 0, \\ \overline{P_{\text{p}}} &= \frac{1}{2} \hat{x}^2 \Omega^2 d, \quad \text{also} \\ \overline{P_{\text{S}}} &= \overline{P_{\text{p}}}. \end{aligned} \quad (57)$$

Für den Sonderfall der Erregung mit der Eigenkreisfrequenz ω_0 des ungedämpften Systems gemäß

$$\Omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{\pi}{2} \quad (58)$$

gilt

$$P_q(t) = 0,$$

$$P_S(t) = \frac{1}{2} \dot{x}^2 \omega_0^2 d(1 + \cos 2 \omega_0 t). \quad (59)$$

ANMERKUNG Dieser Sonderfall wird häufig angestrebt bei der Bemessung von Nutzschaingern (Schwingförderer, -siehe u. ä.), da dann keine Blindleistungskräfte aufgebracht zu werden brauchen.

7.5 Beschreibungsformen der Übertragungseigenschaften des Systems

7.5.1 Allgemeines

Im Hinblick auf den Zusammenhang zwischen Schwingungserregung und erzwungenen Schwingungen können die Übertragungseigenschaften eines Systems in verschiedener Form angegeben werden. Im Zeitbereich ist dies vorzugsweise die Stoßantwortfunktion $h(t)$, im Frequenzbereich wird dafür in erster Linie auf die Übertragungsfunktion (Frequenzgang) und auf die modalen Größen zurückgegriffen.

7.5.2 Stoßantwortfunktion

Die Stoßantwortfunktion $h(t)$ ist die Antwort eines zum Zeitpunkt $t = 0$ in der Ruhelage befindlichen linearen, zeitinvarianten, schwingungsfähigen Systems auf eine Stoßerregung mit der Kraft

$$p(t) = q \delta(t) \quad (60)$$

und dem Einheitsstoß $\delta(t)$ (Dirac-Funktion)

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{für } t = 0 \\ 0 & \text{für } t \neq 0 \end{cases} \quad (61)$$

mit der Nebenbedingung

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (62)$$

Der Koeffizient q hat die Dimension Kraft mal Zeit, $\delta(t)$ hat nach Gleichung (60) die Dimension Zeit⁻¹.

ANMERKUNG 1 In vielen Fällen werden der Einheitsstoß und die Stoßantwortfunktion auch als Einheitsimpuls bzw. Impulsantwortfunktion bezeichnet.

ANMERKUNG 2 Der Einheitsstoß $\delta(t)$ darf nicht mit dem Abklingkoeffizienten δ nach Abschnitt 8 verwechselt werden.

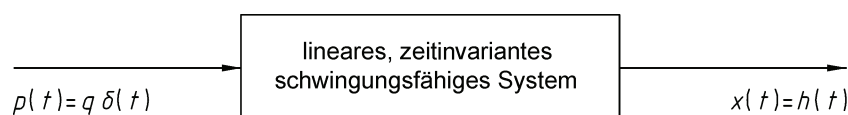


Bild 8 – Stoßantwortfunktion eines linearen, zeitinvarianten schwingungsfähigen Systems auf einen Einheitsstoß $p(t) = q \delta(t)$

Die Stoßantwortfunktion ist also nach Bild 8 die erzwungene Schwingung eines schwingungsfähigen Systems bei einem Einheitsstoß. Sie dient zur Charakterisierung der Eigenschaften eines schwingungsfähigen Systems.

Für ein lineares, zeitinvariantes, schwingungsfähiges System mit einem Freiheitsgrad und für die Anfangsbedingungen $x(0) = 0$ und $\dot{x}(0) = v_0$ mit

$$v_0 = \frac{\int p(t) dt}{m} = \frac{q}{m} \quad (63)$$

ist die Stoßantwortfunktion für $q = 1 \text{ Ns}$

$$h(t) = \frac{v_0 e^{-\omega_0 t}}{\omega_d} \sin \omega_d t. \quad (64)$$

7.5.3 Übertragungsfunktion/Frequenzgang

Die Übertragungsfunktion $H(i\Omega)$ ist der Quotient des Fourier-Spektrums (siehe DIN 1311-1:2000-02) der Schwingungsantwort eines linearen, zeitinvarianten, schwingungsfähigen Systems zum Fourier-Spektrum der deterministischen Erregung:

$$H_{\text{Ausgang, Eingang}}(i\Omega) = \frac{\text{Fourier-Spektrum des Ausgangs}}{\text{Fourier-Spektrum des Eingangs}}. \quad (65)$$

ANMERKUNG Zur Beschreibung der Übertragungseigenschaften eines linearen, zeitinvarianten, schwingungsfähigen Systems wird auch die inverse Übertragungsfunktion $H^{-1}(i\Omega)$ benutzt:

$$H_{\text{Ausgang, Eingang}} = H_{\text{Eingang, Ausgang}}^{-1}. \quad (66)$$

Bild 9 zeigt die Verwendung der Übertragungsfunktion für eine deterministische Krafterregung $p(t)$ und die Schwingungsantwort als Schwingweg $x(t)$.

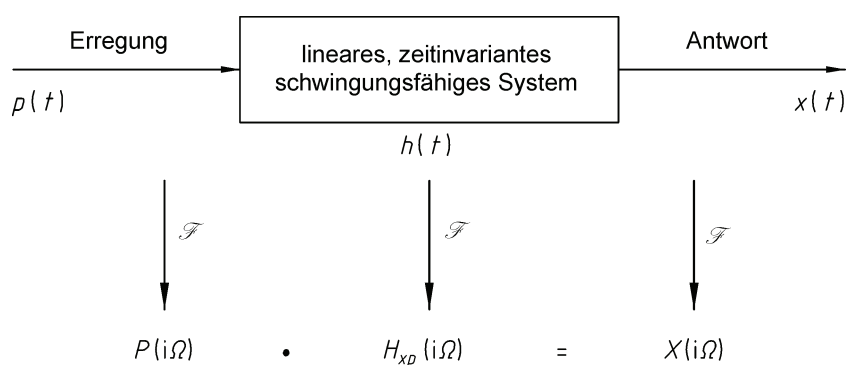


Bild 9 – Übertragungsfunktion eines linearen, zeitinvarianten, schwingungsfähigen Systems

Zur Fourier-Transformation $\mathcal{F}$ siehe Abschnitt 6 von DIN 1311-1:2000-02.

In Abhängigkeit von den betrachteten Eingangs- und Ausgangsgrößen ergeben sich verschiedene Übertragungsfunktionen (siehe Tabelle 1 und Anhang A).

Tabelle 1 – Definition und Benennung verschiedener Übertragungsfunktionen

Erregung	Betrachtete Schwingungsantwort	Übertragungsfunktion $H(i\Omega)$	Inverse Übertragungsfunktion $H^{-1}(i\Omega)$
$p(t)$ Krafterregung	$x(t)$	$H_{xp}(i\Omega) = \frac{X(i\Omega)}{P(i\Omega)}$ dynamische Nachgiebigkeit (Rezeptanz)	$H_{xp}^{-1}(i\Omega) = H_{px}(i\Omega) = \frac{P(i\Omega)}{X(i\Omega)} = K(i\Omega)$ dynamische Steifigkeit
$p(t)$ Krafterregung	$\dot{x}(t) = v(t)$	$H_{vp}(i\Omega) = \frac{V(i\Omega)}{P(i\Omega)} = Y(i\Omega)$ Admittanz (Mobilität)	$H_{vp}^{-1}(i\Omega) = H_{pv}(i\Omega) = \frac{P(i\Omega)}{V(i\Omega)} = Z(i\Omega)$ mechanische Impedanz
$p(t)$ Krafterregung	$\ddot{x}(t) = a(t)$	$H_{ap}(i\Omega) = \frac{A(i\Omega)}{P(i\Omega)}$ Akzeleranz (dynamische Trägheit)	$H_{ap}^{-1}(i\Omega) = H_{pa}(i\Omega) = \frac{P(i\Omega)}{A(i\Omega)} = M(i\Omega)$ dynamische Masse
$p(t)$ Krafterregung	$p_F(t)$ nach 7.2.2	$H_{Fp}(i\Omega) = \frac{P_F(i\Omega)}{P(i\Omega)}$ Quellenisolation bei der Schwingungsisolation	
$u(t)$ Wegerregung	$x(t)$	$H_{xu}(i\Omega) = \frac{X(i\Omega)}{U(i\Omega)}$ Empfängerisolation bei der Schwingungsisolation	
Siehe auch Anhang A			