

Schwingungen und schwingungsfähige Systeme

Teil 3: Lineare, zeitinvariante schwingungsfähige Systeme
mit endlich vielen Freiheitsgraden

1311-3

ICS 17.160

Ersatz für
Ausgabe 1974-12(Mechanical) vibration, oscillation and vibration systems –
Part 3: Linear time-invariant vibration systems with a finite number of degrees
of freedomVibrations (mécaniques), oscillations et systèmes de vibrations –
Partie 3: Systèmes de vibrations à un nombre fini de degrés de liberté**Vorwort**

Diese Norm wurde vom Gemeinschaftsarbeitsausschuß NATG-A.32/NALS C 1 erarbeitet.

DIN 1311 „Schwingungen und schwingungsfähige Systeme“ besteht aus:

- Teil 1: Grundbegriffe, Einteilung
- Teil 2: Lineare, zeitinvariante schwingungsfähige Systeme mit einem Freiheitsgrad^{*)}
- Teil 3: Lineare, zeitinvariante schwingungsfähige Systeme mit endlich vielen Freiheitsgraden

Folgende Normen dieser Reihe sind zur Zeit in Vorbereitung:

- Teil 4: Lineare Kontinua, Wellen
- Teil 5: Schwingungen nichtlinearer, selbsterregter und parametererregter Systeme

Änderungen

Gegenüber der Ausgabe Dezember 1974 wurden folgende Änderungen vorgenommen:

- a) Inhalt vollständig überarbeitet

Frühere Ausgaben

DIN 1311-3: 1961-09, 1974-12

1 Anwendungsbereich

Diese Normenreihe legt Begriffe der Schwingungstechnik und Mechanik fest. Der vorliegende Teil 3 behandelt schwingungsfähige Systeme mit mehreren Freiheitsgraden. Im Einzelfall werden Hinweise zu analogen Begriffsbestimmungen in der Akustik und Elektrotechnik gegeben.

Diese Norm soll Grundlage für andere Normen bezüglich der Begriffe, Bezeichnungen und Definitionen in den genannten Fachgebieten sein. Sie soll die interdisziplinäre Zusammenarbeit durch einheitliche Begriffe und allgemeingültige Darstellung der Zusammenhänge erleichtern.

dieser Norm, falls sie durch Änderung oder Überarbeitung eingearbeitet sind. Bei undatierten Verweisungen gilt die letzte Ausgabe der in Bezug genommenen Publikation.

DIN 1311-1

Schwingungen und schwingungsfähige Systeme – Teil 1:
Grundbegriffe, Einteilung

E DIN 1311-2

Schwingungen und schwingungsfähige Systeme – Teil 2:
Lineare, zeitinvariante schwingungsfähige Systeme mit
einem Freiheitsgrad**2 Normative Verweisungen**

Diese Norm enthält durch datierte oder undatierte Verweisungen Festlegungen aus anderen Publikationen. Diese normativen Verweisungen sind an den jeweiligen Stellen im Text zitiert, und die Publikationen sind nachstehend aufgeführt. Bei datierten Verweisungen gehören spätere Änderungen oder Überarbeitungen dieser Publikationen nur zu

3 Begriffe

Für die Anwendung dieser Norm gelten die folgenden Begriffe:

3.1 System

Reale zeitinvariante schwingungsfähige Systeme (siehe DIN 1311-1 : 2000-02, Abschnitt 16) lassen sich oftmals

^{*)} z. Z. Entwurf

Fortsetzung Seite 2 bis 4

Normenausschuß Technische Grundlagen (NATG) – Einheiten und Formelgrößen –
im DIN Deutsches Institut für Normung e.V.
Normenausschuß Akustik, Lärminderung und Schwingungstechnik (NALS) im DIN und VDI

durch lineare Ersatzsysteme mit endlich vielen Freiheitsgraden abbilden. Diese Ersatzsysteme werden auch Ersatzmodelle, Rechenmodelle oder nachfolgend kurz Systeme genannt. Sie bestehen idealisiert aus endlich vielen starren Körpern und Massenpunkten, die durch masselose Federn, Dämpfungselemente und Gelenke untereinander oder mit der Umgebung verbunden sind.

Die vollständige Beschreibung des Schwingungsverhaltens eines solchen Systems erfolgt durch die Angabe des Zeitverlaufes mehrerer unabhängiger Zustandsgrößen (siehe DIN 1311-1 : 2000-02, Abschnitt 3). Zustandsgrößen sind unabhängig, wenn ihnen voneinander unabhängige Anfangswerte zugeordnet werden können.

Die Anzahl der unabhängigen Zustandsgrößen hängt von der Anzahl der Freiheitsgrade (siehe Abschnitte 3.2 und 3.3) ab.

3.2 Koordinaten, Zustandsgrößen

Die momentane Lage der starren Körper und Massenpunkte eines Systems wird durch endlich viele Koordinaten x_j , $j = 1, \dots, m$, beschrieben. Die Koordinaten heißen unabhängig, wenn die Zusammenhänge zwischen ihnen nicht durch algebraische Gleichungen der Form

$$\Phi_h(x_j) = 0 \quad h = 1, \dots, k \quad k < m - 2$$

beschrieben werden können. Sie werden dann als verallgemeinerte oder generalisierte Koordinaten

$$q_r \quad r = 1, \dots, n \quad n \leq m$$

bezeichnet.

Als Zustandsgrößen werden im allgemeinen die Werte der Koordinaten und der Geschwindigkeiten der starren Körper bzw. Massenpunkte zu dem jeweils betrachteten Zeitpunkt verwendet. Die Anzahl der unabhängigen Zustandsgrößen ist aber höchstens doppelt so groß wie die Anzahl der unabhängigen Koordinaten.

3.3 Freiheitsgrade

Voneinander unabhängige Bewegungsmöglichkeiten

ANMERKUNG: Die Anzahl der unabhängigen Koordinaten ist gleich der Anzahl n der Freiheitsgrade des Systems. Diese Anzahl ist zugleich die notwendige Mindestanzahl von Koordinaten zur eindeutigen Beschreibung des Bewegungsverhaltens eines Systems.

3.4 Koordinatenvektor, Zustandsvektor

Der aus den Koordinaten x_j gebildete Vektor

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$$

heißt Koordinatenvektor, der Vektor

$$\mathbf{y} = (x_1, \dots, x_m, \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_m)^T = \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \dot{\mathbf{x}} \end{pmatrix}$$

heißt Zustandsvektor.

3.5 Systemgleichungen

3.5.1 Bewegungsdifferentialgleichungen

Die Differentialgleichungen, die die m Koordinaten miteinander verbinden, heißen Bewegungsdifferentialgleichungen. Sie sind von höchstens zweiter Ableitung nach der Zeit in den Koordinaten x_j , $j = 1, \dots, m$.

Sie lassen sich als Matrizengleichung (auch Vektorgleichung genannt) schreiben in der Form

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{p}(t). \quad (1)$$

Dabei sind die Massenmatrix $\mathbf{M}$, die Dämpfungsmatrix $\mathbf{D}$ und die Steifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$ quadratische, m -reihige Matrizen, deren Elemente konstant sind und physikalische Größen des Systems repräsentieren. Für die folgenden Betrachtungen wird Symmetrie und positive Definitheit dieser Matrizen vorausgesetzt.

Der Vektor $\mathbf{p}(t)$ beinhaltet die in Koordinatenrichtung angreifenden Erregergrößen. Die Dämpfung kann als Absolutdämpfung zwischen einer Koordinate und einem Festpunkt oder als Relativedämpfung zwischen den Koordinaten wirken.

Wenn sich im Sonderfall die Dämpfungsmatrix $\mathbf{D}$ als Linearkombination

$$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (2)$$

mit reellen Koeffizienten α und β darstellen läßt (Bequemlichkeitshypothese), heißt das System proportional gedämpft.

ANMERKUNG 1: Es werden nur geschwindigkeitsproportionale Dämpfungskräfte berücksichtigt. Zur besseren Übersichtlichkeit werden keine gyroskopischen Effekte betrachtet.

ANMERKUNG 2: Im Fall zeitabhängiger Koeffizienten der Differentialgleichung (1) beschreiben die Lösungen parametererregte Schwingungen (siehe DIN 1311-1 : 2000-02, Abschnitt 6.3.3). Die Bedingung (2) ist eine hinreichende Bedingung. Die notwendige und hinreichende Bedingung für proportionale Dämpfung lautet:

$$\mathbf{D} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} = \mathbf{K} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}$$

3.5.2 Zustandsgleichungen

Die Differentialgleichungen, die die Zustandsgrößen miteinander verbinden, heißen Zustandsgleichungen. Sie sind von höchstens erster Ordnung nach der Zeit in den Zustandsgrößen y_j , $j = 1, \dots, 2m$.

3.6 Freie und erzwungene Schwingungen

Ist der Vektor $\mathbf{p}(t)$ ein Nullvektor, dann beschreiben die Lösungen der Bewegungsdifferentialgleichungen (1) freie Schwingungen, anderenfalls erzwungene Schwingungen.

3.7 Ungedämpfte und gedämpfte Systeme

Sind die Elemente des schwingungsfähigen Systems ausschließlich Energiespeicher für kinetische und potentielle Energie, dann heißt das System ungedämpft. Ist mindestens ein Element enthalten, das die mechanische Energie verringert (z. B. durch Umwandlung in Wärme), dann heißt das System gedämpft.

3.8 Ungedämpfte und gedämpfte Schwingungen

Die freien Schwingungen eines ungedämpften Systems klingen mit der Zeit nicht ab – sie werden ungedämpfte Schwingungen genannt.

Die freien Schwingungen eines gedämpften Systems können mit der Zeit abklingen und heißen dann gedämpfte Schwingungen. In speziellen Fällen können auch einzelne Eigenschwingungen (siehe Abschnitt 4.2) als ungedämpfte Schwingungen auftreten.

4 Eigenschwingungsanalyse, Modalanalyse

4.1 Eigenwerte

Führt ein lineares, zeitinvariantes schwingungsfähiges System mit n Freiheitsgraden freie Schwingungen aus, so können diese Schwingungen durch die n verschiedenen Eigenkreisfrequenzen $\omega_1, \dots, \omega_n$ und die zugehörigen Abklingkoeffizienten $\delta_1, \dots, \delta_n$ beschrieben werden. Sie ergeben sich für die Bewegungsdifferentialgleichungen

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{D} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (3)$$

mit dem Ansatz

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} e^{\lambda t} \quad (4)$$