

Grundbegriffe der Meßtechnik

Begriffe für die Fehler beim Messen

DIN
1319
Blatt 3

Fundamental terms of measurement;
concepts for errors in instruments and at observations

Inhalt

	Seite		Seite
1. Geltungsbereich	1	abweichung, Vertrauensgrenzen des Mittelwertes	2
2. Fehlerquellen und Fehlerarten	1	5. Fehlerfortpflanzung	4
3. Fehler und Korrektion bei Meßgeräten ..	2	6. Meßunsicherheit	5
4. Beurteilung der Fehler von Meßwerten. Rechnerische Erfassung der zufälligen Fehler: Arithmetisches Mittel, Standard-		7. Fehlergrenzen	5
		Stichwortverzeichnis	10

1. Geltungsbereich

Diese Norm gilt allgemein sowohl für die Betrachtung der Fehler eines Meßgerätes als auch für die Beurteilung der Fehler von einzelnen Meßwerten und von Mittelwerten aus Meßreihen.

2. Fehlerquellen und Fehlerarten

2.1. Jedes Meßergebnis wird verfälscht durch Unvollkommenheit des Meßgegenstandes, der Meßgeräte (einschließlich Maßverkörperungen) und der Meßverfahren, außerdem durch Einflüsse der Umwelt und der Beobachter, sowie durch zeitliche Veränderungen bei allen diesen Fehlerquellen (siehe auch Anmerkungen am Schluß der Norm).

2.1.1. Als die Meßergebnisse verfälschende Umwelt-einflüsse sind zu beachten z. B. Temperatur, Luftdruck, Feuchte, Spannung, Frequenz und fremde elektrische oder magnetische Felder.

2.1.2. Verfälschende persönliche Einflüsse sind abhängig von den Eigenschaften und Fähigkeiten der Beobachter (z. B. Aufmerksamkeit, Übung, Sehschärfe, Schätzungsvermögen).

2.1.3. Außerdem kann ein Meßergebnis verfälscht werden durch Irrtümer der Beobachter, durch Wahl eines ungeeigneten Meß- oder Auswertungsverfahrens, ferner durch Nichtbeachten einer Fehlerquelle. Derartige Versehen sind grundsätzlich vermeidbar und werden in dieser Norm nicht berücksichtigt.

2.2.1. Systematische Fehler werden hauptsächlich hervorgerufen durch Unvollkommenheit der Meßgeräte, der Meßverfahren und des Meßgegenstandes, in zweiter

Linie von Einflüssen der Umwelt und persönlichen Einflüssen der Beobachter (siehe Abschnitt 2.2.3).

2.2.2. Systematische Fehler haben einen bestimmten Betrag und ein bestimmtes Vorzeichen (entweder + oder -). Erfassbare systematische Fehler sollen durch Anbringen von Korrekturen (Berichtigungen; siehe Abschnitt 3.3) ausgeschaltet werden. Wird der Meßwert nicht berichtigt, so ist das Meßergebnis unrichtig; es hat einen (systematischen) Fehler (siehe Anmerkungen und Abschnitt 3).

2.2.3. Es gibt auch systematische Fehler, die auf einfache Weise nicht erfassbar sind, die aber in manchen Fällen abgeschätzt und beim Ermitteln der Meßunsicherheit nach Abschnitt 6 berücksichtigt werden können (siehe auch Anmerkungen).

2.2.4. Zufällige Fehler werden hervorgerufen von während der Messung nicht erfassbaren und nicht beeinflussbaren Änderungen der Meßgeräte (z. B. Reibung, Abnutzung), des Meßgegenstandes, der Umwelt und der Beobachter. Wiederholt derselbe Beobachter an demselben Meßgegenstand eine Messung der gleichen Meßgröße mit demselben Meßgerät unter den gleichen Bedingungen oder vergleicht ein Beobachter dasselbe Meßgerät mit demselben Normal unter den gleichen Bedingungen mehrmals, so werden die einzelnen Meßwerte voneinander abweichen, sie „streuen“ (siehe auch Anmerkungen und Abschnitt 4.5.1 und 4.5.2). Die zufälligen Fehler schwanken ungleich nach Betrag und Vorzeichen ($\pm$). Sie sind im einzelnen nicht erfassbar und machen das Ergebnis unsicher. Sie können aber in ihrer Gesamtheit durch geeignete Rechengrößen zahlenmäßig abgeschätzt und gekennzeichnet werden und zwar um so zuverlässiger, je größer die Anzahl der ausgeführten Messungen ist (siehe Abschnitt 4).

Fortsetzung Seite 2 bis 6
Anmerkungen Seite 6 bis 11

Ausschuß für Einheiten und Formelgrößen (AEF) im Deutschen Normenausschuß (DNA)

3. Fehler und Korrektur bei Meßgeräten

3.1. Die mit Meßgeräten erhaltenen Werte einer Meßgröße sind grundsätzlich nicht fehlerfrei (siehe Abschnitt 2). Der jeweilige Unterschied zwischen dem gemessenen (angezeigten, ausgegebenen) Wert x_a und dem direkt (fundamental) ermittelten oder durch Vergleich mit einem Normalgerät oder mit einem Normal ermittelten, als „richtig“ geltenden Wert x_r wird Fehler (F) genannt. Dieser Fehler ist grundsätzlich systematischer Art (siehe auch Anmerkungen).

Für alle Meßgeräte gilt:

Fehler gleich angezeigter (ausgegebener) Wert minus richtiger Wert ($F = x_a - x_r$).

Im einzelnen ist zu beachten:

3.1.1. Bei anzeigenden Meßgeräten ist x_a der am Meßgerät abgelesene „angezeigte“ Wert, die Anzeige (Istanzeige). Der richtige Wert x_r (Sollanzeige) ist die Anzeige, die ein fehlerfreies Meßgerät angeben würde (praktisch ermittelt z. B. durch Vergleich mit einem Normal).

3.1.2. Bei Maßverkörperungen (Begriff siehe DIN 1319 Blatt 2) entspricht dem Wert x_a (Anzeige) das durch die Aufschrift angezeigte Nennmaß (Nennwert) x_n . Der richtige Wert x_r ist der durch Messung, z. B. durch Vergleich mit einem Normal, ermittelte Wert der Maßverkörperung.

Im Zweifelsfall ist stets anzugeben, worauf (z. B. Anzeige, Aufschrift), sich der Fehler bezieht.

3.2. Der relative Fehler der Anzeige eines Meßgerätes wird normalerweise auf den richtigen Wert bezogen, also:

relativer Fehler gleich

$$\frac{\text{Anzeige minus richtiger Wert}}{\text{richtiger Wert}}$$

Zur Kennzeichnung eines Meßgerätes wird der relative Fehler in manchen Fällen auch auf den Endwert des Meßbereiches bezogen (siehe z. B. VDE 0410):

relativer Fehler gleich

$$\frac{\text{Anzeige minus richtiger Wert}}{\text{Endwert des Meßbereiches}}$$

Im Zweifelsfall ist stets anzugeben, worauf der relative Fehler bezogen ist (siehe auch Anmerkungen).

Bei einer Maßverkörperung (im Sinne von Abschnitt 3.1.2) gilt:

relativer Fehler gleich

$$\frac{\text{Nennmaß (Nennwert) minus richtiger Wert}}{\text{richtiger Wert}}$$

3.3. Vielfach wird auch der Begriff Korrektur (Berichtigung) benutzt; er wird folgendermaßen definiert: Die Korrektur (Berichtigung) hat den gleichen absoluten Zahlenwert wie der Fehler, aber das entgegengesetzte Vorzeichen (siehe auch Anmerkungen und Abschnitt 2.2.2).

Es gilt dann:

Richtiger Wert gleich Anzeige plus Korrektur bzw. richtiger Wert der Maßverkörperung gleich Nennmaß (Nennwert) plus Korrektur.

4. Beurteilung der Fehler von Meßwerten.

Rechnerische Erfassung der zufälligen Fehler: Arithmetisches Mittel, Standardabweichung, Vertrauensgrenzen des Mittelwertes

(siehe auch Anmerkungen)

4.1. Arithmetisches Mittel, Mittelwert

(siehe auch Anmerkungen)

Sind bei einer Meßreihe n voneinander unabhängige Einzelwerte $x_1 \dots x_1 \dots x_n$ unter Voraussetzung der Festlegungen im Abschnitt 2.2.4 gemessen worden, so gilt als Ergebnis üblicherweise das arithmetische Mittel aus diesen n Einzelwerten, kurz Mittelwert $\bar{x}$ genannt (gesprochen x -quer)

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

4.2. Standardabweichung

(siehe auch Anmerkungen)

Die wichtigste Rechengröße für die zufälligen Abweichungen der Einzelwerte von ihrem Mittelwert ist die mittlere quadratische Abweichung (mittlerer quadratischer Fehler der Einzelbeobachtung), die Standardabweichung s genannt wird; sie wird definiert als:

$$s = + \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}.$$

4.2.1. Für hinreichend große Werte von n nähert sich s einer Größe, die Standardabweichung σ der (sehr großen) Grundgesamtheit genannt wird (siehe auch Anmerkungen).

4.2.2. In vielen Fällen ist es zweckmäßig, anstelle der Standardabweichung s die relative Standardabweichung s_r ,

$$s_r = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{100s}{\bar{x}} \%$$

zu benutzen; diese Größe wird auch Variationskoeffizient genannt.

4.2.3. Bei einer Normalverteilung (Gauß-Verteilung) fallen im Mittel von 1000 unabhängigen Einzelwerten praktisch:

317 außerhalb des Bereiches: $\bar{x} \pm 1,00 \sigma$
(Statistische Sicherheit $P = 68,3 \%$)

46 außerhalb des Bereiches: $\bar{x} \pm 2,0 \sigma$
(Statistische Sicherheit $P = 95,4 \%$)

3 außerhalb des Bereiches: $\bar{x} \pm 3,0 \sigma$
(Statistische Sicherheit $P = 99,7 \%$,
genauer 99,73 %).

Eine statistische Sicherheit von z. B. $P = 68,3 \%$ bedeutet also, daß 68,3 % einer sehr großen Anzahl n von

Einzelwerten innerhalb des Bereiches: $\bar{x} \pm 1,00 \sigma$ zu erwarten sind.

Anstelle der statistischen Sicherheit P (auch „Aussagewahrscheinlichkeit“ genannt) wird in der mathematischen Statistik vorzugsweise der Betrag $(1 - P)$ als „Überschreitungswahrscheinlichkeit“ verwendet.

In der Industrie wird bei der Fertigungsüberwachung zunehmend die statistische Sicherheit $P = 95\%$ vorgezogen, auf manchen Anwendungsgebieten auch $P = 99\%$.

Von 1000 unabhängigen Einzelwerten fallen hierbei:

50 außerhalb des Bereiches: $\bar{x} \pm 1,96 \sigma$ ($P = 95\%$),

10 außerhalb des Bereiches: $\bar{x} \pm 2,58 \sigma$ ($P = 99\%$)

(siehe Anmerkungen).

4.3. Vertrauensgrenzen und Vertrauensbereich des Mittelwertes

(siehe auch Anmerkungen).

Der in Abschnitt 4.1 definierte Mittelwert wird meist als endgültiges Meßergebnis einer Meßreihe (mit voneinander unabhängigen und gleich zuverlässigen Einzelwerten) angegeben. Der Beobachter darf nicht ohne weiteres annehmen, daß dieser Mittelwert gleich dem gesuchten wahren Wert der Meßgröße ist, der bei Abwesenheit von systematischen Fehlern nur aus einer sehr großen Anzahl von Einzelmeßwerten gewonnen werden kann. Es ist aber möglich, zwei Grenzen — oberhalb und unterhalb des gefundenen Mittelwertes — anzugeben, zwischen denen (bei Abwesenheit von systematischen Fehlern) und unter Voraussetzung einer Normalverteilung der wahre Wert mit der gewählten statistischen Sicherheit P zu erwarten ist.

Diese Grenzen heißen Vertrauensgrenzen des Mittelwertes. Der Bereich, den diese Grenzen einschließen (Intervall zwischen den Vertrauensgrenzen), heißt Vertrauensbereich des Mittelwertes.

Stets sollte beim Vertrauensbereich, wie bei allen Fehlerangaben, die gewählte statistische Sicherheit P oder die Überschreitungswahrscheinlichkeit $(1 - P)$ angegeben werden.

4.3.1. Die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit (siehe Abschnitt 4.2.1) ist nicht bekannt. In diesem Fall sind die Vertrauensgrenzen gegeben durch:

$$\text{obere Vertrauensgrenze: } \bar{x} + \frac{t}{\sqrt{n}} s$$

$$\text{untere Vertrauensgrenze: } \bar{x} - \frac{t}{\sqrt{n}} s$$

In vereinfachter Schreibweise bezeichnet man oft als Vertrauensbereich den Ausdruck

$$\pm \frac{t}{\sqrt{n}} s.$$

Dabei hängt der Faktor t von der gewählten statistischen Sicherheit P und außerdem von der Anzahl n der Einzelwerte ab (siehe Tabelle in Abschnitt 4.3.1.1).

4.3.1.1. Für die drei heute überwiegend benutzten statistischen Sicherheiten $P = 68,3\%$, $P = 95,0\%$ und $P = 99,73\%$ sowie für $P = 99\%$ sind die zugeordneten Werte für den Faktor t (t -Verteilung nach Student) und

$t/\sqrt{n}$ in der nachstehenden Tabelle zusammengestellt (siehe Anmerkungen). Voraussetzung für die Zuordnung zu einer bestimmten statistischen Sicherheit P ist das Vorhandensein einer Normalverteilung.

Werte für t und $t/\sqrt{n}$ (gerundete Zahlenwerte) bei verschiedener statistischer Sicherheit P

Anzahl n der Einzelwerte	Werte für t und $t/\sqrt{n}$							
	1 σ -Regel $P = 68,3\%$		3 σ -Regel $P = 99,73\%$		$P = 95\%$		$P = 99\%$	
	t	$t/\sqrt{n}$	t	$t/\sqrt{n}$	t	$t/\sqrt{n}$	t	$t/\sqrt{n}$
(2)	(1,8)	(1,3)	(235)	(166)	(12,7)	(9,0)	(64)	(45)
3	1,32	0,76	19,2	11,1	4,3	2,5	9,9	5,7
4	1,20	0,60	9,2	4,6	3,2	1,6	5,8	2,9
5	1,15	0,51	6,6	3,0	2,8	1,24	4,6	2,1
6	1,11	0,45	5,5	2,3	2,6	1,05	4,0	1,6
8	1,08	0,38	4,5	1,6	2,4	0,84	3,5	1,24
10	1,06	0,34	4,1	1,29	2,3	0,72	3,2	1,03
20	1,03	0,23	3,4	0,77	2,1	0,47	2,9	0,64
30	1,02	0,19	3,3	0,60	2,0	0,37	2,8	0,50
50	1,01	0,14	3,1	0,45	2,0	0,28	2,7	0,38
100	1,00	0,10	3,1	0,31	2,0	0,20	2,6	0,26
200	1,00	0,07	3,0	0,22	1,9	0,14	2,6	0,18
sehr groß (über 200)	1,0	0	3,0	0	1,96*)	0	2,58	0

Das über jede physikalisch sinnvolle Grenze hinausgehende Anwachsen von t bei kleiner Anzahl n , besonders für hohe statistische Sicherheit P , zeigt, daß bei nur zwei Messungen überhaupt keine reale statistische Aussage mehr gemacht werden kann, wenn s oder σ nicht aus früheren Beobachtungen bekannt sind (siehe Abschnitt 4.3.2).

4.3.2. Die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit (siehe Abschnitt 4.2.1) ist bekannt.

Ist die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit aus einer genügenden Anzahl früherer Messungen bekannt, z. B. aus genügend vielen früheren Meßreihen (siehe auch Anmerkungen), so vereinfachen sich die symbolisch geschriebenen Ausdrücke für die Vertrauensgrenzen und den Vertrauensbereich des Mittelwertes aus n Einzelmessungen zu

$$\bar{x} \pm \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{für die statistische Sicherheit } P = 68,3\%$$

$$\bar{x} \pm \frac{3\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{für die statistische Sicherheit } P = 99,73\%$$

$$\bar{x} \pm \frac{1,96\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{für die statistische Sicherheit } P = 95\%$$

$$\bar{x} \pm \frac{2,58\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{für die statistische Sicherheit } P = 99\%.$$

*) Vielfach wird es genügen, hier $t \approx 2$ zu setzen.

4.4. Angabe des Meßergebnisses

(siehe auch Anmerkungen)

Das vollständige Ergebnis einer Meßreihe von n Einzelwerten (Meßergebnis) gibt man durch den (von systematischen Fehlern befreiten) Mittelwert $\bar{x}_E$ und den Vertrauensbereich (für die statistische Sicherheit P) an, und zwar:

entweder in der Einheit der Meßgröße als

$$\bar{x}_E \pm \frac{t}{\sqrt{n}} s$$

oder, wenn man den Vertrauensbereich relativ, im Verhältnis zum Mittelwert ausdrücken will, als

$$\bar{x}_E (1 \pm \varepsilon) \text{ mit } \varepsilon = \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot \frac{s}{\bar{x}_E} \text{ (siehe Abschnitt 4.2.2).}$$

4.5. Versuchsvoraussetzungen

Vor der statistischen Behandlung von Meßwerten einer Meßgröße ist zu prüfen, ob die Messungen unter den gleichen Versuchsbedingungen und unabhängig voneinander durchgeführt worden sind. Es hat sich herausgestellt, daß man zweckmäßig zwischen folgenden beiden Grenzfällen praktischer Versuchsvoraussetzungen unterscheidet:

4.5.1. Wiederhol-Bedingungen

Ein Beobachter bestimmt den Meßwert mit ein und demselben Meßgerät nacheinander unter gleichen Arbeitsbedingungen (siehe auch Anmerkungen und Abschnitt 2.2.4). Unter Wiederhol-Bedingungen sind systematische Fehler nicht erkennbar.

4.5.2. Vergleich-Bedingungen

Verschiedene Beobachter führen Messungen in verschiedenen Laboratorien unter Verwendung von verschiedenen Meßgeräten der gleichen Bauart durch. In diesem Fall ist die Standardabweichung im allgemeinen größer als im Fall der in Abschnitt 4.5.1 beschriebenen Wiederhol-Bedingungen, weil unter Vergleich-Bedingungen die Meßergebnisse auch noch infolge systematischer Fehler „zwischen den Laboratorien“ voneinander abweichen.

4.5.3. Wiederhol- und Vergleich-Bedingungen (Abschnitt 4.5.1 und 4.5.2) sind als Grenzfälle hier besonders aufgeführt. Die Wiederhol-Bedingungen entsprechen dem üblichen Fall in einem einzigen Laboratorium, die Vergleich-Bedingungen sind Voraussetzungen etwa eines Ringversuches mit verschiedenen teilnehmenden Laboratorien (siehe auch Anmerkungen). Bei genügend großer Anzahl Teilnehmer an einem Ringversuch lassen sich die Standardabweichungen „innerhalb der Laboratorien“ (Wiederhol-Bedingungen) und „zwischen den Laboratorien“ (Vergleich-Bedingungen) mit Hilfe einer Varianzanalyse trennen.

Beispiele:

Bei vielen genormten Meßverfahren im Bereich der Mineralölprüfung ist die Standardabweichung unter Vergleich-Bedingungen etwa doppelt so groß wie die Standardabweichung unter Wiederhol-Bedingungen. Für die Härtmessung nach Rockwell ist das Verhältnis beider Standardabweichungen sogar etwa 5 : 1. Nur in Ausnahmefällen sind beide Werte gleich groß.

5. Fehlerfortpflanzung

Die bisherigen Betrachtungen haben sich auf die Definition des systematischen Fehlers und der Rechengrößen für die zufälligen Fehler (Standardabweichung, Vertrauensbereich) bei der experimentellen Ermittlung einer einzelnen Meßgröße beschränkt. Ist das Meßergebnis aber eine Funktion einer oder mehrerer Meßgrößen (Meßwerte), so ist der Fehler des Meßergebnisses nach der Fehlerfortpflanzungsregel zu ermitteln. Die Fehlerfortpflanzung ist für die erfaßten systematischen Fehler anders zu behandeln als für die Rechengrößen der zufälligen Fehler (siehe auch Anmerkungen).

5.1. Fehlerfortpflanzung für systematische Fehler

Der systematische Fehler Δy einer Funktion

$$y = F(x_1, x_2 \dots x_i \dots x_n)$$

kann aus den genügend kleinen systematischen Fehlern Δx_i bis Δx_n der einzelnen voneinander unabhängigen Meßgrößen x_i bis x_n nach folgender Formel berechnet werden:

$$\Delta y = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \Delta x_i \right) = \frac{\partial F}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial F}{\partial x_2} \Delta x_2 + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n} \Delta x_n$$

(Vorzeichen beachten!).

Ist z. B. $y = k \cdot x^m$, so ist der Fehler der Funktion y

$$\Delta y = m \frac{y}{x} \Delta x$$

und ihr relativer Fehler

$$\frac{\Delta y}{y} = m \frac{\Delta x}{x}$$

Eine Berechnung der Fortpflanzung erfaßter systematischer Fehler entfällt, wenn diese aus den Meßwerten eliminiert sind.

5.2. Fehlerfortpflanzung für Rechengrößen der zufälligen Fehler

Sind unter der Voraussetzung einer Normalverteilung der Meßwerte die Standardabweichungen s_1 bis s_n (gewonnen aus Meßreihen mit gleicher Anzahl der Einzelwerte) der voneinander unabhängigen Meßgrößen $\bar{x}_1$ bis $\bar{x}_n$ bekannt, so berechnet man die Standardabweichung s_y des Meßergebnisses $y = F(\bar{x}_1 \dots \bar{x}_i \dots \bar{x}_n)$ unter der Voraussetzung: $s_i \ll \bar{x}_i$ aus der Formel:

$$s_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \cdot s_i \right)^2}$$

Ist jeweils die Standardabweichung σ der Grundgesamtheit bekannt, so tritt an die Stelle von s die Größe σ ; die Formel für s_y gilt streng nur für σ_y und σ_i .

Ist z. B. das Meßergebnis y eine lineare Funktion

$$y = a_1 \bar{x}_1 + a_2 \bar{x}_2 + \dots + a_n \bar{x}_n$$

der Variablen $\bar{x}_i$ bis $\bar{x}_n$, deren Standardabweichungen s_1 bis s_n bekannt sind, so hat das Meßergebnis y die Standardabweichung

$$s_y = \sqrt{(a_1 s_1)^2 + (a_2 s_2)^2 + \dots + (a_n s_n)^2}$$

Die angegebenen Gleichungen für s_y sind zu benutzen, wenn das Meßergebnis y als Funktion von Mittelwerten, d. h. $y = F(\bar{x}_1, \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n)$ oder als Funktion von Einzelwerten, d. h. $y = F(x_1, x_2 \dots x_n)$ gegeben ist; im letzten