

**Grundlagen der Meßtechnik****Teil 3: Auswertung von Messungen einer einzelnen Meßgröße  
Meßunsicherheit****DIN**  
**1319-3**

ICS 17.020

Mit DIN 1319-1:1995-01  
Ersatz für Ausgabe 1983-08

Deskriptoren: Meßtechnik, Meßunsicherheit, Meßdaten, Auswertung, Metrologie

Fundamentals of metrology – Part 3: Evaluation of measurements of a single measurand, measurement uncertainty

Fondements de la métrologie – Partie 3: Exploitation des mesurages d'un mesurande seul, incertitude de mesure

**Inhalt**

|                                                                                                | Seite |
|------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| <b>Vorwort</b> .....                                                                           | 2     |
| <b>1 Anwendungsbereich</b> .....                                                               | 2     |
| <b>2 Normative Verweisungen</b> .....                                                          | 2     |
| <b>3 Begriffe</b> .....                                                                        | 3     |
| 3.1 Meßgröße .....                                                                             | 3     |
| 3.2 Ergebnisgröße (der Auswertung) .....                                                       | 3     |
| 3.3 Eingangsgröße (der Auswertung) .....                                                       | 3     |
| 3.4 Modell (der Auswertung) .....                                                              | 3     |
| 3.5 Meßunsicherheit .....                                                                      | 3     |
| 3.6 Gemeinsame Komponente der Meßunsicherheit .....                                            | 3     |
| <b>4 Allgemeine Grundlagen der Auswertung von Messungen</b> .....                              | 4     |
| 4.1 Ziel der Messung .....                                                                     | 4     |
| 4.2 Vier Schritte der Auswertung von Messungen .....                                           | 4     |
| <b>5 Auswertungsverfahren für den einfachen Fall der mehrmaligen direkten Messung</b> .....    | 4     |
| 5.1 Aufstellung des Modells .....                                                              | 4     |
| 5.2 Vorbereitung der Eingangsdaten .....                                                       | 5     |
| 5.3 Berechnung des vollständigen Meßergebnisses .....                                          | 6     |
| 5.4 Angabe des vollständigen Meßergebnisses .....                                              | 6     |
| <b>6 Auswertungsverfahren für den allgemeinen Fall</b> .....                                   | 8     |
| 6.1 Aufstellung des Modells .....                                                              | 8     |
| 6.2 Vorbereitung der Eingangsdaten .....                                                       | 10    |
| 6.3 Berechnung des vollständigen Meßergebnisses .....                                          | 13    |
| 6.4 Angabe des vollständigen Meßergebnisses .....                                              | 15    |
| <b>Anhang A (informativ) Beispiele</b> .....                                                   | 16    |
| <b>Anhang B (informativ) Rechnerunterstützte Auswertung</b> .....                              | 20    |
| <b>Anhang C (informativ) Grenzen der Anwendung des Auswertungsverfahrens</b> .....             | 22    |
| <b>Anhang D (informativ) Kennwert für den maximal möglichen Betrag der Meßabweichung</b> ..... | 22    |
| <b>Anhang E (informativ) Verwendete genormte Begriffe und ihre Quellen</b> .....               | 23    |
| <b>Anhang F (informativ) Erläuterungen</b> .....                                               | 23    |
| <b>Anhang G (informativ) Stichwortverzeichnis</b> .....                                        | 24    |

Fortsetzung Seite 2 bis 24

Normenausschuß Einheiten und Formelgrößen (AEF) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V.  
Deutsche Elektrotechnische Kommission im DIN und VDE (DKE)

Normenausschuß Qualitätsmanagement, Statistik und Zertifizierungsgrundlagen (NQSZ) im DIN

## Vorwort

Diese Norm wurde vom Normenausschuß Einheiten und Formelgrößen (AEF, Aufgabe 73) neu erarbeitet, um insbesondere die Behandlung und Angabe der Meßunsicherheit zu einem Meßergebnis den internationalen Empfehlungen [1] anzupassen.

Anhänge A bis G sind informativ.

DIN 1319 "Grundlagen der Meßtechnik" besteht aus:

Teil 1: Grundbegriffe

Teil 2: Begriffe für die Anwendung von Meßgeräten

Teil 3: Auswertung von Messungen einer einzelnen Meßgröße, Meßunsicherheit

Teil 4: Behandlung von Unsicherheiten bei der Auswertung von Messungen

## Änderungen

Gegenüber der Ausgabe August 1983 wurden folgende Änderungen vorgenommen:

- Die Norm wurde vollständig neu erarbeitet, um sie in Einklang mit DIN 1319-4 und den internationalen Empfehlungen [1] zu bringen.
- Die Grundbegriffe der Meßtechnik sind nunmehr in DIN 1319-1 definiert.

## Frühere Ausgaben

DIN 1319: 1942-07, 1962-01, 1963-12; DIN 1319-3: 1968-12, 1972-01, 1983-08

## 1 Anwendungsbereich

Diese Norm gilt im Bereich der Meßtechnik für die Ermittlung des Werts einer **e i n z e l n e n** Meßgröße und deren Meßunsicherheit durch Auswertung von Messungen. Sie gilt sinngemäß auch bei rechnerisch simulierten Messungen.

Zweck der Norm ist die Festlegung eines Verfahrens für die Auswertung im Fall, daß die Meßgröße direkt gemessen oder mittels einer gegebenen Funktion aus anderen Größen berechnet wird. In allgemeineren Fällen, z.B. wenn eine Ausgleichsrechnung durchzuführen ist wie bei Ringversuchen oder wenn mehrere Meßgrößen gemeinsam als Funktionen anderer Größen auszuwerten sind, ist das Verfahren in DIN 1319-4 anzuwenden.

## 2 Normative Verweisungen

Diese Norm enthält durch datierte und undatierte Verweisungen Festlegungen aus anderen Publikationen. Diese normativen Verweisungen sind an den jeweiligen Stellen im Text zitiert, und die Publikationen sind nachstehend aufgeführt. Bei datierten Verweisungen gehören spätere Änderungen oder Überarbeitungen dieser Publikationen nur zu dieser Norm, falls sie durch Änderung oder Überarbeitung eingearbeitet sind. Bei undatierten Verweisungen gilt die letzte Ausgabe der in Bezug genommenen Publikation.

|                  |                                                                                                                                             |
|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| N 1313           | Physikalische Größen und Gleichungen – Begriffe, Schreibweisen                                                                              |
| DIN 1319-1       | Grundlagen der Meßtechnik – Teil 1: Grundbegriffe                                                                                           |
| DIN 1319-4       | Grundbegriffe der Meßtechnik – Behandlung von Unsicherheiten bei der Auswertung von Messungen                                               |
| DIN 1333         | Zahlenangaben                                                                                                                               |
| DIN 13303-1      | Stochastik – Wahrscheinlichkeitstheorie. Gemeinsame Grundbegriffe der mathematischen und der beschreibenden Statistik, Begriffe und Zeichen |
| DIN 13303-2      | Stochastik – Mathematische Statistik, Begriffe und Zeichen                                                                                  |
| DIN 53804-1      | Statistische Auswertungen – Meßbare (kontinuierliche) Merkmale                                                                              |
| DIN 55350-21     | Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik – Begriffe der Statistik, Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen                   |
| DIN 55350-22     | Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik – Begriffe der Statistik, Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen                           |
| DIN 55350-23     | Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik – Begriffe der Statistik, Beschreibende Statistik                                             |
| DIN 55350-24     | Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik – Begriffe der Statistik, Schließende Statistik                                               |
| ISO 3534-1: 1993 | Statistics – Vocabulary and symbols – Part 1: Probability and general statistical terms                                                     |

- [1] Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen. Beuth Verlag, Berlin, Köln 1995; Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. ISO International Organization for Standardization, Genf 1993
- [2] Internationales Wörterbuch der Metrologie – International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology. DIN Deutsches Institut für Normung (Herausgeber), Beuth Verlag, Berlin, Köln 1994; International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology. ISO International Organization for Standardization, Genf 1993
- [3] K. Weise, W. Wöger: Eine Bayessche Theorie der Meßunsicherheit. PTB-Bericht N-11, Physikalisch-Technische Bundesanstalt (Braunschweig) 1992; A Bayesian Theory of Measurement Uncertainty. Meas. Sci. Technol. 4; 1-11; 1993

### 3 Begriffe

Die Benennungen wichtiger Begriffe sind im folgenden bei deren ersten Auftreten oder an besonderen Stellen kursiv gesetzt. Gesperrt gesetzte Wörter sind betont.

Die mit einem Stern (\*) versehenen Begriffe sind in den Normen in Anhang E definiert; siehe aber auch ISO 3534-1: 1993 und [1], [2].

Einige herausragende Begriffe sind im folgenden definiert und kommentiert. Die bei ihren Benennungen in runden Klammern stehenden Zusätze dürfen fortgelassen werden, wenn keine Gefahr der Verwechslung mit anderen Begriffen besteht.

Für die Anwendung dieser Norm gelten die folgenden Begriffe:

#### 3.1 Meßgröße: *Physikalische Größe\**, der die *Messung\** gilt. (Aus: DIN 1319-1: 1995-01)

ANMERKUNG: Einer Meßgröße gleichgestellt werden in dieser Norm auch alle anderen Größen, die bei der *Auswertung* von Messungen *beteiligt* sind. Das betrifft vor allem *Einflußgrößen\** und Größen, die der Berichtigung oder *Kalibrierung\** dienen.

#### 3.2 Ergebnisgröße (der Auswertung): *Meßgröße\** als Ziel der Auswertung von *Messungen\**.

#### 3.3 Eingangsgröße (der Auswertung): *Meßgröße\** oder andere Größe, von der Daten in die Auswertung von *Messungen\** eingehen.

#### 3.4 Modell (der Auswertung): Mathematische Beziehungen zwischen allen bei der Auswertung von *Messungen\** beteiligten *Meßgrößen\** und anderen Größen.

#### 3.5 Meßunsicherheit: Kennwert, der aus *Messungen\** gewonnen wird und zusammen mit dem *Meßergebnis\** zur Kennzeichnung eines Wertebereiches für den *wahren Wert\** der *Meßgröße\** dient. (Aus: DIN 1319-1: 1995-01)

ANMERKUNG 1: Die Meßunsicherheit ist ein Maß für die Genauigkeit der Messung und kennzeichnet die Streuung oder den Bereich derjenigen Werte, die der Meßgröße vernünftigerweise als *Schätzwerte\** für den wahren Wert *zugewiesen* werden können [1]. Sie kann auch als ein Maß für die Unkenntnis der Meßgröße aufgefaßt werden [3].

ANMERKUNG 2: Die Meßunsicherheit ist von der *Meßabweichung\** deutlich zu unterscheiden. Letztere ist nur die Differenz zwischen einem der Meßgröße zuzuordnenden Wert, z.B. einem *Meßwert\** oder dem Meßergebnis, und dem wahren Wert. Die Meßabweichung kann gleich Null sein, ohne daß dies bekannt ist. Diese Unkenntnis drückt sich in einer Meßunsicherheit größer als Null aus.

ANMERKUNG 3: Die Meßunsicherheit kann auch ganz allgemein eine bei der Auswertung von Messungen beteiligte Größe betreffen, ohne daß diese eine Meßgröße zu sein braucht. Sie wird im folgenden oft kurz auch *Unsicherheit* genannt. Die Benennung *Standardmeßunsicherheit*, kurz *Standardunsicherheit* [1], wird verwendet, wenn herausgestellt werden soll, daß die Meßunsicherheit durch eine *Standardabweichung\** ausgedrückt wird (siehe 5.3 und 6.2.1). Die Standardunsicherheit besitzt dieselbe *Dimension\** wie die Meßgröße. Die Meßunsicherheit wird auch *individuelle Komponente der Meßunsicherheit* genannt, wenn sie mit denen anderer Meßgrößen kombiniert wird oder zusammen mit der *gemeinsamen Komponente der Meßunsicherheit* (siehe 3.6) erwähnt wird.

ANMERKUNG 4: Zu anderen Kennwerten für die Genauigkeit einer Messung siehe 5.4.2 und Anhang D.

#### 3.6 Gemeinsame Komponente der Meßunsicherheit: Kennwert für ein Paar von *Meßgrößen\**, der aus *Messungen\** gewonnen wird und zur Kennzeichnung eines Wertebereichs für das Paar der *wahren Werte\** der beiden Meßgrößen beiträgt.

**ANMERKUNG:** Der genannte Wertebereich ist zweidimensional. Die gemeinsame Komponente der Meßunsicherheit kennzeichnet die gegenseitige Abhängigkeit, mit der den beiden Meßgrößen gemeinsam Werte zugewiesen werden können. Auch die gemeinsame Komponente der Meßunsicherheit kann andere Größen als Meßgrößen betreffen. Im Gegensatz zur Meßunsicherheit kann sie auch negativ sein. Ist sie ungleich Null, so sind die beiden Meßgrößen — genauer die ihnen zugeordneten *Schätzer*\* (siehe 6.1.2 und 6.2.1) — *korreliert*\*.

## 4 Allgemeine Grundlagen der Auswertung von Messungen

### 4.1 Ziel der Messung

Ziel jeder *Messung*\* einer *Meßgröße*\* (siehe 3.1) ist es, deren *wahren Wert*\* zu ermitteln. Dabei wird eine *Meßeinrichtung*\* und ein *Meßverfahren*\* auf ein *Meßobjekt*\*, den Träger der Meßgröße, angewendet. Die Messung kann mit Hilfe eines Rechners simuliert sein. Die Messung umfaßt auch die *Auswertung* der gewonnenen *Meßwerte*\* und anderer zu berücksichtigender Daten. Ein einheitliches Verfahren für die Auswertung ermöglicht den kritischen Vergleich und die Kombination von Meßergebnissen.

Wegen der bei der Messung wirkenden Einflüsse treten unvermeidlich *Meßabweichungen*\* (siehe 3.5 Anmerkung 2) auf. Diese sind der Grund, warum es nicht möglich ist, den wahren Wert genau zu finden. Lediglich das *Meßergebnis*\*  $y$  als ein *Schätzwert*\* für den wahren Wert einer Meßgröße  $Y$  sowie die *Meßunsicherheit*\*  $u(y)$  (siehe 3.5) lassen sich aus den Meßwerten und anderen Daten gewinnen und angeben. In dieser Norm bilden das Meßergebnis und die Meßunsicherheit zusammen das *vollständige Meßergebnis*\* für die Meßgröße  $Y$ , die *Ergebnisgröße* der Auswertung (siehe 3.2).

Bei vielen Messungen ergeben sich die zu einer Meßgröße gehörenden Meßwerte direkt aus der *Ausgabe*\* der Meßeinrichtung. Eine solche Messung wird kurz *direkte Messung* genannt. Die Auswertung in dem einfachen, aber grundlegenden Fall der mehrmaligen direkten Messung bei Vorliegen einer *systematischen Meßabweichung*\* wird in Abschnitt 5 beschrieben. Im allgemeinen muß eine Meßgröße jedoch indirekt ermittelt werden. Dabei werden zunächst andere Meßgrößen entweder direkt gemessen oder ebenfalls indirekt ermittelt. Aus diesen und weiteren Größen, insbesondere *Einflußgrößen*\*, die die Ursache für systematische Meßabweichungen sind, wird dann mit Hilfe eines bestehenden mathematischen Zusammenhangs, des *Modells* der Auswertung (siehe 3.4), das vollständige Meßergebnis für die Ergebnisgröße errechnet. Jene Größen sind die *Eingangsgroßen* der Auswertung (siehe 3.3). Das Auswertungsverfahren für den allgemeinen Fall wird in Abschnitt 6 beschrieben.

### 4.2 Vier Schritte der Auswertung von Messungen

Jede Auswertung wird zweckmäßig in vier voneinander deutlich zu trennenden Schritten ausgeführt:

- a) Aufstellung eines Modells, das die Beziehung der interessierenden Meßgröße, der Ergebnisgröße, zu allen anderen beteiligten Größen, den Eingangsgroßen, mathematisch beschreibt (siehe 5.1 und 6.1),
- b) Vorbereitung der gegebenen Meßwerte und anderer verfügbarer Daten (siehe 5.2 und 6.2),
- c) Berechnung des Meßergebnisses und der Meßunsicherheit der Ergebnisgröße aus den vorbereiteten Daten mittels des Modells (siehe 5.3 und 6.3 und Anhang B),
- d) Angabe des vollständigen Meßergebnisses der Ergebnisgröße (siehe 5.4 und 6.4).

### 5 Auswertungsverfahren für den einfachen Fall der mehrmaligen direkten Messung

Das in diesem Abschnitt beschriebene Verfahren der Auswertung für den einfachen Fall der mehrmaligen direkten Messung bei Vorliegen einer systematischen Meßabweichung ist ein Sonderfall des allgemeinen Verfahrens nach Abschnitt 6, der wegen seiner Bedeutung herausgestellt wird.

#### 5.1 Aufstellung des Modells

Oft wird eine Meßgröße  $Y$  in unabhängigen Versuchen mehrmals *d i r e k t* gemessen, wobei dieselben genau festgelegten Versuchsbedingungen so weit wie möglich eingehalten werden und eine von einer Einflußgröße verursachte systematische Meßabweichung bei der Auswertung zu berücksichtigen ist. Auch in diesem einfachen, typischen Fall ist im ersten Schritt der Auswertung zuerst ein ebenfalls einfaches Modell der Auswertung aufzustellen. Im Hinblick auf eine spätere Verallgemeinerung ist es zweckmäßig, der unberichtigten *Ausgabe*\* der verwendeten Meßeinrichtung eine Eingangsgroße  $X_1$  und davon getrennt der systematischen Meßabweichung eine weitere Eingangsgroße  $X_2$  zuzuordnen. Die Meßgröße  $Y$  ist die Ergebnisgröße und zwar die um die Eingangsgroße  $X_2$  berichtigte Ausgabe  $X_1$  und ergibt sich somit aus der Gleichung

$$Y = X_1 - X_2 , \quad (1)$$

die das Modell darstellt.

## 5.2 Vorbereitung der Eingangsdaten

### 5.2.1 Mittelwert und Standardabweichung der Meßwerte

Bei der mehrmaligen direkten Messung der Meßgröße  $Y$  streuen die bei den  $n$  einzelnen Messungen erhaltenen Meßwerte  $v_j$  ( $j = 1, \dots, n$ ) wegen zufälliger Einflüsse. Die Meßwerte werden deshalb als Realisierungen einer *Zufallsgröße*\*  $V$  aufgefaßt, die der Eingangsgröße  $X_1$  zugeordnet ist. Die Zufallsgröße  $V$  folgt einer *Wahrscheinlichkeitsverteilung*\*, im folgenden kurz auch *Verteilung* genannt, die insbesondere durch die beiden *Parameter*\* *Erwartungswert*\*  $\mu$  und *Standardabweichung*\*  $\sigma$  (oder alternativ durch die *Varianz*\*  $\sigma^2$ ) gekennzeichnet ist. Die Eingangsgröße  $X_1$  ist keine Zufallsgröße, deshalb ist sie auch nicht identisch mit  $V$ . Der Erwartungswert  $\mu$  stimmt mit dem wahren Wert der Größe  $X_1$  überein, bei Abwesenheit der durch Einflußgrößen verursachten systematischen Meßabweichung ( $X_2 = 0$ ) auch mit dem wahren Wert der Meßgröße  $Y$  selbst. Die Standardabweichung ist ein Maß für die Streuung der einzelnen Meßwerte um den Erwartungswert oder der *zufälligen Meßabweichungen*\* um Null.

Die Parameter  $\mu$  und  $\sigma$  der Verteilung sind im allgemeinen nicht bekannt. Es besteht im zweiten Schritt der Auswertung zunächst die Aufgabe, aus den Meßwerten  $v_j$  Schätzwerte für sie zu ermitteln. Üblicherweise wird der (*arithmetische*) *Mittelwert*\*  $\bar{v}$  der Meßwerte (auch *arithmetisches Mittel* genannt)

$$x_1 = \bar{v} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n v_j \quad (2)$$

als Schätzwert für  $\mu$  und daher auch für  $X_1$  benutzt.  $x_1$  ist das *unberichtigte Meßergebnis*\*. Die (*empirische*) *Standardabweichung*\*

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n (v_j - \bar{v})^2} \quad (3)$$

der Meßwerte dient als Schätzwert für  $\sigma$ . Zu anderen Ausdrücken, die mit denen nach den Gleichungen (2) und (3) äquivalent sind, aber bei numerischen Rechnungen zweckmäßiger sein können, siehe DIN 53804-1.

Weil die Meßwerte Realisierungen der Zufallsgröße  $V$  sind, können  $\bar{v}$  von  $\mu$  und  $s$  von  $\sigma$  zufällig abweichen.  $\bar{v}$  und  $s$  sind also auch selbst Realisierungen von Zufallsgrößen, die *Schätzer*\* genannt werden und der Ermittlung der Parameter dienen.

Als Unsicherheit  $u(x_1)$  von  $X_1$ , die mit dem Mittelwert  $\bar{v}$  als Schätzwert  $x_1$  für  $X_1$  verbunden ist, wird die (*empirische*) *Standardabweichung des Mittelwerts* verwendet:

$$u(x_1) = s(\bar{v}) = s/\sqrt{n} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n (v_j - \bar{v})^2} \quad (4)$$

Die Unsicherheit des mit  $X_1$  übereinstimmenden Erwartungswerts  $\mu$  wird daher kleiner mit zunehmender Anzahl  $n$  der Messungen. Wenn eine systematische Meßabweichung nicht vernachlässigt werden darf, ist diese Unsicherheit  $u(x_1)$  nur ein Teil der Meßunsicherheit der Meßgröße  $Y$ .

Ist aus früheren, unter vergleichbaren Versuchsbedingungen oftmals ausgeführten Messungen derselben oder einer ähnlichen Meßgröße bereits eine empirische Standardabweichung  $s_0$  der Verteilung der Meßwerte bekannt, so sollte der bei kleiner Anzahl  $n$  günstigere Ansatz

$$u(x_1) = s_0/\sqrt{n} \quad (5)$$

verwendet werden.

### 5.2.2 Systematische Meßabweichung

Die *systematische Meßabweichung*\* setzt sich aus der *bekannten systematischen Meßabweichung* und der *unbekannten systematischen Meßabweichung* zusammen (siehe DIN 1319-1). Eine bekannte systematische Meßabweichung dient als Schätzwert  $x_2$  für die Eingangsgröße  $X_2$ . Sie wird durch ihren negativen Wert, die *Korrektur*\*  $K$  des unberichtigten Meßergebnisses  $x_1$ , hier des Mittelwerts  $\bar{v}$ , ausgeglichen.  $x_2 = -K$  ist im allgemeinen nicht gleich der gesamten systematischen Meßabweichung. Daher rührt die Unsicherheit  $u(x_2)$  der Eingangsgröße  $X_2$ , die der systematischen Meßabweichung zugeordnet ist. Auch dann, wenn die Korrektur  $K$  selbst gleich Null ist und daher im Meßergebnis nicht in Erscheinung tritt, bleibt diese Unsicherheit bestehen (siehe 3.5 Anmerkung 2). Ob diese

Unsicherheit vernachlässigt werden darf, muß im Einzelfall geprüft und entschieden werden. Als Unsicherheit von  $X_2$  wird die Standardabweichung einer Verteilung derjenigen Werte der systematischen Meßabweichung benutzt, die nach Maßgabe der vorliegenden oder aus der Erfahrung ableitbaren Informationen über die Eingangsgröße  $X_2$  vernünftigerweise möglich sind. Welche systematische Meßabweichung sich bei der Messung tatsächlich realisiert, bleibt dabei unbekannt. Im Gegensatz zu der Verteilung der Zufallsgröße  $V$  der bei den einzelnen Messungen festgestellten Meßwerte ist die Verteilung einer Zufallsgröße  $W$ , die hier der Eingangsgröße  $X_2$  als Schätzer zugeordnet wird, eine solche der möglichen, aber nicht festgestellten Werte der systematischen Meßabweichung.

Der Schätzwert  $x_2$  und die Unsicherheit  $u(x_2)$  errechnen sich nach mathematischen Ausdrücken in 6.2.5. Ist z.B. bekannt oder anzunehmen, daß die systematische Meßabweichung, d.h. der wahre Wert der Eingangsgröße  $X_2$ , fest oder sich während der Messung ändernd zwischen den Grenzen  $a$  und  $b$  liegt ( $a < b$ ), und ist sonst nichts über diese Größe bekannt, so ist anzusetzen:

$$x_2 = -K = (a + b)/2 ; \quad u(x_2) = (b - a)/\sqrt{12} . \quad (6)$$

### 5.3 Berechnung des vollständigen Meßergebnisses

Im dritten Schritt der Auswertung führt das Einsetzen des Mittelwerts  $x_1 = \bar{v}$  sowie  $x_2 = -K$  oder z.B.  $x_2$  nach Gleichung (6) in die das Modell darstellende Gleichung (1) auf das Meßergebnis  $y$  für die Meßgröße  $Y$ :

$$y = x_1 - x_2 = \bar{v} + K . \quad (7)$$

$y$  ist der beste Schätzwert für den wahren Wert der Ergebnisgröße.

Die Meßunsicherheit  $u(y)$  der Meßgröße  $Y$  folgt aus der quadratischen Kombination der Unsicherheiten  $u(x_1)$  und  $u(x_2)$  der Eingangsgrößen  $X_1$  bzw.  $X_2$ , ungeachtet der unterschiedlichen begrifflichen Auffassung der Verteilung der beiden zugeordneten Schätzer (siehe auch Gleichung (43) und Anhang F):

$$u(y) = \sqrt{u^2(x_1) + u^2(x_2)} . \quad (8)$$

$u(y)$  ist die *Standardunsicherheit* (siehe 3.5 Anmerkung 3) von  $Y$ . Zweckmäßig wird auch die *relative Meßunsicherheit*  $u_{\text{rel}}(y) = u(y)/|y|$  gebildet, wenn  $y \neq 0$ .

### 5.4 Angabe des vollständigen Meßergebnisses

#### 5.4.1 Schreibweisen der Angabe mit Meßunsicherheit

Das *vollständige Meßergebnis*\* für die Meßgröße  $Y$  wird im vierten Schritt der Auswertung nach DIN 1319-1 in einer der folgenden Schreibweisen angegeben:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } y, u(y) ; & \text{d) } Y = y \pm u(y) ; \\ \text{b) } y, u_{\text{rel}}(y) ; & \text{e) } Y = y \cdot (1 \pm u_{\text{rel}}(y)) . \\ \text{c) } Y = y (u(y)) ; & \end{array} \quad (9)$$

Der durch die Meßunsicherheit gekennzeichnete Bereich der Werte, die der Meßgröße zugewiesen werden können (siehe 3.5), lautet

$$y - u(y) \leq Y \leq y + u(y) . \quad (10)$$

Es wird nicht behauptet, der Bereich enthalte tatsächlich den wahren Wert.

Gerundete numerische Unsicherheitswerte sind mit zwei (oder bei Bedarf mit drei) signifikanten Ziffern anzugeben. Sie sind aufzurunden. Das Meßergebnis ist an derselben Stelle wie die zugehörige Unsicherheit zu runden, z.B.  $y = 245,5716$  mm auf  $y = 245,57$  mm, wenn  $u(y) = 0,4528$  mm auf  $u(y) = 0,46$  mm aufgerundet wird. Die Angabe des Meßergebnisses und der Standardunsicherheit  $u(y)$  in derselben Einheit sowie der relativen Meßunsicherheit in Prozent kann zweckmäßig sein. Zur zahlenmäßigen Angabe des vollständigen Meßergebnisses und zu Runderegeln siehe auch DIN 1319-1 und DIN 1333.

#### BEISPIEL:

Der gemessene elektrische Widerstand  $R$  beträgt  $100,035 \, \Omega$  mit einer Meßunsicherheit von  $0,023 \, \Omega$  (oder einer relativen Meßunsicherheit von  $2,3 \cdot 10^{-4}$  oder  $0,023 \, \%$ ). Auch  $R = 100,035 \, \Omega (0,023 \, \Omega)$  oder  $R = (100,035 \pm 0,023) \, \Omega$  oder  $R = 100,035 \, \Omega \pm 0,023 \, \Omega$  oder  $R = 100,035 \cdot (1 \pm 2,3 \cdot 10^{-4}) \, \Omega$ . Vor allem in Tabellen findet sich mitunter auch die Kurzschreibweise  $R = 100,035(23) \, \Omega$ . In Klammern steht hier die Meßunsicherheit mit dem Stellenwert der

letzten angegebenen Ziffer des Meßergebnisses, hier  $10^{-3}$ . Der durch die Meßunsicherheit gekennzeichnete Bereich ist  $100,012 \Omega \leq R \leq 100,058 \Omega$ .

#### 5.4.2 Angabe mit erweiterter Meßunsicherheit

Ein anderer Kennwert für die Genauigkeit einer Messung ist die *erweiterte Meßunsicherheit* [1]. Dieser Kennwert kennzeichnet einen Wertebereich, der den wahren Wert der Meßgröße mit hoher Wahrscheinlichkeit enthält. Die erweiterte Meßunsicherheit ist

$$U(y) = k \cdot u(y) \quad (11)$$

mit dem *Erweiterungsfaktor*  $k$ , dessen Wert zwischen 2 und 3 festzulegen ist [1]. Vorzugsweise sollte  $k = 2$  verwendet werden. Der durch die erweiterte Meßunsicherheit gekennzeichnete Wertebereich für den wahren Wert der Meßgröße  $Y$  ist

$$y - U(y) \leq Y \leq y + U(y) \quad (12)$$

Wird die erweiterte Meßunsicherheit  $U(y)$  angegeben, z.B. in einer Schreibweise nach Gleichung (9) anstelle der Standardunsicherheit  $u(y)$ , so ist klarzustellen, daß es sich um die erweiterte Meßunsicherheit handelt, und auch der benutzte Erweiterungsfaktor  $k$  mitzuteilen. Nur dann läßt sich die Standardunsicherheit  $u(y) = U(y)/k$  für eine Weiterverarbeitung nach dem in Abschnitt 6 festgelegten Verfahren oder für einen kritischen Vergleich zweier oder mehrerer vollständiger Meßergebnisse derselben Meßgröße wiedergewinnen.

#### 5.4.3 Angabe als Vertrauensbereich

Nach DIN 1319-1 läßt sich bei Bedarf *z u s ä t z l i c h* zum vollständigen Meßergebnis nach Gleichung (9) unter einer Annahme über die Form der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Meßwerte mit Hilfe von  $n$ ,  $\bar{v}$  und  $s$  ein *Vertrauensbereich\** (auch *Vertrauensintervall\** oder *Konfidenzintervall\** genannt) angeben. Dieser enthält mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit, dem *Vertrauensniveau\**  $(1 - \alpha)$ , den Erwartungswert  $\mu$  der Verteilung (nicht den wahren Wert der Meßgröße  $Y$ ). In dieser Norm wird als Verteilung der Meßwerte eine *Normalverteilung\** vorausgesetzt. Der Vertrauensbereich (für den Erwartungswert) wird von den *Vertrauensgrenzen\** eingeschlossen:

$$\bar{v} - t \cdot s(\bar{v}) \leq \mu \leq \bar{v} + t \cdot s(\bar{v}) \quad (13)$$

(Zum Faktor  $t$ , auch *Student-Faktor* genannt, siehe Anmerkung 1). Durch den Vertrauensbereich nach Gleichung (13) wird nur der Einfluß der zufälligen Meßabweichungen erfaßt. Wenn  $u(x_2)$  vernachlässigbar ist — und nur dann —, kann durch Verschiebung des Vertrauensbereichs um die Korrektur  $K$  auch der Einfluß der systematischen Meßabweichung berücksichtigt werden. Auf diese Weise wird wie folgt ein Vertrauensbereich für  $Y$  festgelegt:

$$y - t \cdot u(y) \leq Y \leq y + t \cdot u(y) \quad (14)$$

Bei der Angabe der Vertrauensgrenzen sind in jedem Fall auch der Faktor  $t$  oder das gewählte Vertrauensniveau  $(1 - \alpha)$  und die Anzahl  $n$  der Messungen mitzuteilen. Der Faktor  $t$  und damit der Vertrauensbereich hängen von der Anzahl  $n$  und vom gewählten Vertrauensniveau ab. Im Gegensatz dazu ist die Meßunsicherheit  $u(x_1)$  unabhängig von einer angenommenen Verteilung der Meßwerte und vom gewählten Vertrauensniveau. Werte für  $t$  sind in Tabelle 1 angegeben. Sie gelten nur für die vorausgesetzte Normalverteilung der Meßwerte. Sie zeigen auch, daß bei nur wenigen Messungen ein weiter Vertrauensbereich in Kauf genommen werden muß. Oft genügt die Wahl  $t = t_\infty = 2$  für  $1 - \alpha \approx 95\%$ . Dieses Vertrauensniveau von 95 % sollte verwendet werden, aber kein höheres. Denn nur dann ist der Vertrauensbereich einigermaßen unabhängig von der zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung, die nicht immer als Normalverteilung vorausgesetzt werden darf (siehe Anmerkung 2). Das zeigt das untenstehende Gegenbeispiel.

Mitunter wird ein *einseitiger* Vertrauensbereich zu einem gewählten Vertrauensniveau  $(1 - \alpha)$  benötigt, d.h.

$$\mu \leq \bar{v} + t \cdot s(\bar{v}) \quad \text{oder} \quad \mu \geq \bar{v} - t \cdot s(\bar{v}) \quad (15)$$

ANMERKUNG 1:  $t$  in Tabelle 1 ist das *Quantil\** der *Student- oder t-Verteilung\** zum *Freiheitsgrad\**  $(n - 1)$  für die Wahrscheinlichkeit  $(1 - \alpha/2)$ . In anderen Tabellen wird  $t$  oft in Abhängigkeit von diesem Freiheitsgrad angegeben.  $t_\infty$  ist identisch mit dem Quantil der *standardisierten Normalverteilung\** für die gleiche Wahrscheinlichkeit.

ANMERKUNG 2: Um zu entscheiden, ob eine Normalverteilung der Meßwerte vorliegt oder ob ein Meßwert  $v_k$ , der anscheinend aus der Menge der übrigen Meßwerte herausfällt, aus einer durch Störung verfälschten Messung stammt und dann als *Ausreißer* außer acht bleiben darf, siehe DIN 53804-1.

**Tabelle 1: Werte für  $t$  und  $t_{\infty}$  für verschiedene Vertrauensniveaus  $(1 - \alpha)$  bei normalverteilten Meßwerten**

| Anzahl<br>$n$ der<br>Meßwerte | 68,26 % | $t$ für zweiseitigen Vertrauensbereich: $1 - \alpha =$ |       |        |        | 99,73 % |
|-------------------------------|---------|--------------------------------------------------------|-------|--------|--------|---------|
|                               |         | 90 %                                                   | 95 %  | 99 %   | 99,5 % |         |
|                               |         | $t$ für einseitigen Vertrauensbereich: $1 - \alpha =$  | 95 %  | 97,5 % | 99,5 % | 99,75 % |
| 2                             | 1,84    | 6,31                                                   | 12,71 | 63,66  | 127,32 | 235,8   |
| 3                             | 1,32    | 2,92                                                   | 4,30  | 9,92   | 14,09  | 19,21   |
| 4                             | 1,20    | 2,35                                                   | 3,18  | 5,82   | 7,45   | 9,22    |
| 5                             | 1,14    | 2,13                                                   | 2,78  | 4,60   | 5,60   | 6,62    |
| 6                             | 1,11    | 2,02                                                   | 2,57  | 4,03   | 4,77   | 5,51    |
| 7                             | 1,09    | 1,94                                                   | 2,45  | 3,71   | 4,32   | 4,90    |
| 8                             | 1,08    | 1,89                                                   | 2,36  | 3,50   | 4,03   | 4,53    |
| 9                             | 1,07    | 1,86                                                   | 2,31  | 3,36   | 3,83   | 4,28    |
| 10                            | 1,06    | 1,83                                                   | 2,26  | 3,25   | 3,69   | 4,09    |
| 11                            | 1,05    | 1,81                                                   | 2,23  | 3,17   | 3,58   | 3,96    |
| 12                            | 1,05    | 1,80                                                   | 2,20  | 3,11   | 3,50   | 3,85    |
| 13                            | 1,04    | 1,78                                                   | 2,18  | 3,05   | 3,43   | 3,76    |
| 20                            | 1,03    | 1,73                                                   | 2,09  | 2,86   | 3,17   | 3,45    |
| 30                            | 1,02    | 1,70                                                   | 2,05  | 2,76   | 3,04   | 3,28    |
| 50                            | 1,01    | 1,68                                                   | 2,01  | 2,68   | 2,94   | 3,16    |
| 80                            | 1,01    | 1,66                                                   | 1,99  | 2,64   | 2,89   | 3,10    |
| 100                           | 1,01    | 1,66                                                   | 1,98  | 2,63   | 2,87   | 3,08    |
| 125                           | 1,00    | 1,66                                                   | 1,98  | 2,62   | 2,86   | 3,06    |
| 200                           | 1,00    | 1,65                                                   | 1,97  | 2,60   | 2,84   | 3,04    |
| >200                          | 1,00    | 1,65                                                   | 1,96  | 2,58   | 2,81   | 3,00    |

Die Werte für  $t$  in der letzten Zeile werden auch mit  $t_{\infty}$  bezeichnet.

#### BEISPIEL:

Bei Simulationen physikalischer Vorgänge unter Anwendung der Monte-Carlo-Methode ist häufig eine Größe  $Y$  in der Form

$$Y = \int_a^b g(z) dz \quad (16)$$

zu "messen". Werden sehr viele Werte  $z_j$  mit Hilfe eines Zufallszahlengenerators aus einer *Rechteckverteilung* im Intervall von  $a$  bis  $b$  gezogen, so ist mit den "Meßwerten"  $v_j = g(z_j)$  so zu verfahren, wie es in diesem Abschnitt 5 beschrieben ist. Eine Normalverteilung der Meßwerte  $v_j$  darf jedoch nicht vorausgesetzt werden. Daher ist Tabelle 1 in diesem Fall nicht anwendbar. Trotzdem ist ein Vertrauensbereich nach Gleichung (13) mit  $t = t_{\infty}$  eine gute Näherung, wenn das Integral  $\int_a^b g^2(z) dz$  existiert.

## 6 Auswertungsverfahren für den allgemeinen Fall

Die vier Schritte der Auswertung nach 4.2 werden wie in Abschnitt 5 auch in dem folgenden Verfahren für den allgemeinen Fall der indirekten Ermittlung einer Meßgröße ausgeführt.

### 6.1 Aufstellung des Modells

#### 6.1.1 Allgemeines

Der erste Schritt eines allgemeinen Verfahrens für die Auswertung von Messungen besteht auch bei einer einzelnen *i n d i r e k t* zu ermittelnden Meßgröße  $Y$  in jedem Anwendungsfall darin, das mathematische Modell für die Auswertung heranzuziehen oder zu entwickeln. Das Modell muß der gestellten Auswertungsaufgabe individuell angepaßt sein, diese beschreiben und es erlauben, das vollständige Meßergebnis für die interessierende Meßgröße aus Meßwerten und anderen verfügbaren Daten zu berechnen. Die Gleichungen des Modells müssen alle mathematischen Beziehungen umfassen, die zwischen den bei den auszuwertenden Messungen beteiligten physikalischen und anderen Größen, einschließlich der Einflußgrößen, bestehen. Oft ist das Modell zwar schon beispielsweise durch das Meßverfahren, eine Definitionsgleichung oder ein Naturgesetz als eine einfache Gleichung gegeben, nicht selten jedoch erfordert die Aufstellung des Modells eine gründliche Analyse aller Größen, Zusammenhänge, Abläufe und Einflüsse in dem