

Grundbegriffe der Meßtechnik

Behandlung von Unsicherheiten
bei der Auswertung von Messungen

DIN
1319
Teil 4

Basic concepts of measurements; treatment of uncertainties in the evaluation of measurements

Inhalt

	Seite		Seite
1 Anwendungsbereich und Zweck	1	7 Mitteilung der Ergebnisse einer Auswertung	9
2 Festlegung und allgemeine Beschreibung des Verfahrens	1	8 Ergänzende Empfehlungen	9
2.1 Anforderungen an das Verfahren und seine Festlegung	1	8.1 Vertrauensintervall	9
2.2 Aussagen des Verfahrens	2	8.2 Vorgehen bei sehr vielen Größen	9
3 Modell für die Auswertung	2	Anhang A: Sonderfälle und spezielle Anwendungen ..	10
3.1 Eingangsgrößen	2	A.1 Einfache Modelle	10
3.2 Ausgangs- oder Ergebnisgrößen	2	A.2 Anwendung auf ein Längenmeßtechnisches Problem	10
3.3 Mathematische Formulierung des Modells	3	A.3 Sonderfälle der Methode der kleinsten Quadrate: Kurvenanpassung und Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen	10
3.4 Erwartungswerte, Varianzen, Kovarianz- und Korrelationsmatrizen und ihre Schätzwerte	3	A.4 Gesamtmittelwert aus mehreren Meßreihen bei Vergleichsmessungen	11
Begleitendes Beispiel: Größen und Modell	3	A.5 Anwendung bei einer Kurvenanpassung in der Neutronenspektrometrie	12
4 Ansätze für die Eingangsdaten	4	Anhang B: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung	13
4.1 Wiederholt gemessene Größen	4	Anhang C: Hinweise für die Anwendung der Matrizenrechnung	14
4.2 Einflußgrößen	4	Anhang D: Hinweise für die rechnerunterstützte Auswertung	15
4.3 Einzelwerte	5	Zitierte Normen und andere Unterlagen	16
4.4 Kovarianzen	5	Weitere Normen	16
4.5 Größen mit geringer Auswirkung	5	Erläuterungen	16
Begleitendes Beispiel: Daten	5	Verzeichnis der Formelzeichen	17
5 Fortpflanzung von Unsicherheiten	6	Stichwortverzeichnis	18
5.1 Behandlung von Unsicherheiten bei einer Ergebnisgröße und mehreren Eingangsgrößen ..	6		
5.2 Gauß-Verfahren	6		
5.3 Voraussetzungen	7		
Begleitendes Beispiel: Unsicherheiten der Ergebnisse ..	7		
6 Ausgleichsrechnung	7		
6.1 Methode der kleinsten Quadrate	7		
6.2 Sonderfall der einmaligen Messung vieler Größen	8		

1 Anwendungsbereich und Zweck

Diese Norm gilt im Bereich der Meßtechnik für die Behandlung von Unsicherheiten bei der Auswertung von Messungen.

In der Regel können eine oder mehrere interessierende physikalische Größen einer Meßaufgabe im Experiment nicht direkt gemessen werden, sondern müssen aus anderen Größen, die der Messung besser zugänglich sind oder über die Informationen, z. B. aus der Literatur, herangezogen werden können, nach mathematischen Beziehungen errechnet werden. Auch bei einer direkt gemessenen Größe sind die ausgegebenen Werte eines Meßgerätes oft noch zu korrigieren. Die Frage, wie sich die Unsicherheiten der Meßwerte und die Unsicherheiten der anderen Informationen zu den Unsicherheiten der Meßergebnisse, d. h. der Werte der letztlich interessierenden Größen kombinieren, ist dabei von besonderer Bedeutung. Im Hinblick auf die Verwertung der Meßergebnisse ist es wünschenswert, die Unsicherheiten in einheitlicher Weise zu behandeln. Ein Verfahren für diesen Zweck ist Gegenstand dieser Norm. Während DIN 1319 Teil 3 nur im Fall einer einzelnen direkt gemessenen physikalischen Größe angewendet werden kann, wird diese Einschränkung in dieser Norm fallengelassen.

2 Festlegung und allgemeine Beschreibung des Verfahrens

(Siehe hierzu auch Erläuterungen)

2.1 Anforderungen an das Verfahren und seine Festlegung

Ein Verfahren zur Behandlung von Unsicherheiten bei der Auswertung von Messungen muß, damit es Verbreitung finden kann, einige Anforderungen erfüllen: es muß problemunabhängig formulierbar sein und sich zwar nicht unbedingt auf alle nur denkbaren, jedoch auf die weit überwiegende Mehrzahl der vorkommenden Fälle in der einfachen Laboratoriumspraxis sowie bei Präzisionsmessungen und gerade auch bei geringen greifbaren Informationen anwenden lassen. Weiterhin muß das Verfahren vorliegende Informationen ohne Unterscheidung der eigenen Meßdaten von mitbenutzten fremden Ergebnissen nebst ihren Unsicherheiten in der Weise konsistent verarbeiten, daß die gewonnenen Ergebnisse und ihre Unsicherheiten unmittelbar wieder als Eingangsdaten für dasselbe Verfahren bei einem anderen Auswertungsproblem dienen können (siehe Bild 1). Eine größere Auswertungsaufgabe soll auch in Teilaufgaben zerlegt werden dürfen. Schließlich muß das Ver-

Fortsetzung Seite 2 bis 18

fahren einfach, leicht verständlich und mit niedrigem Rechenaufwand gut anwendbar sein. Es darf nur auf wenigen Voraussetzungen und Annahmen beruhen, möglichst nur geringe Kenntnisse erfordern und sollte bekannt und gängig sein.

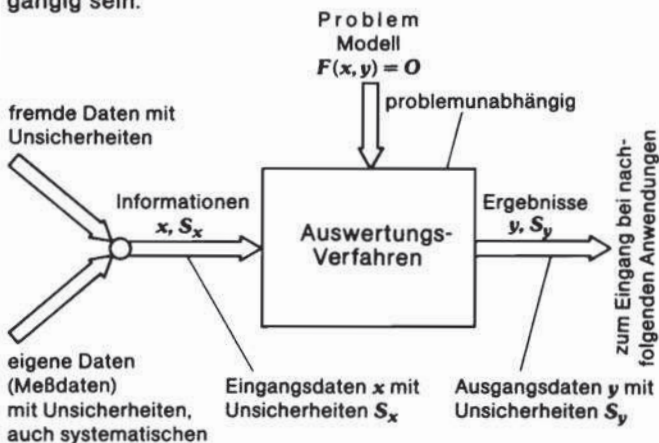


Bild 1. Prinzip der Auswertung von Messungen mit einem problemunabhängigen, konsistenten Verfahren

Das „Fehlerfortpflanzungsgesetz“ von Gauß – in verallgemeinerter Form Kovarianz-Fortpflanzungsgesetz und im folgenden kurz Gauß-Verfahren genannt – erfüllt die Anforderungen und wird deshalb dieser Norm zugrunde gelegt.

Den vielfältigen Anwendungsmöglichkeiten dieses Verfahrens entspricht die in dieser Norm benutzte mathematische Formulierung. Es ist sinnvoll und zweckmäßig, vor konkreten Rechnungen die allgemeinen Gleichungen soweit wie möglich für die vorgegebene Problemstellung zu spezialisieren. So reduziert sich die allgemeine Gleichung (38) des Gauß-Verfahrens unter den in Abschnitt 5.1.1 genannten Voraussetzungen auf das einfache „Fehlerfortpflanzungsgesetz“ nach Gleichung (33).

2.2 Aussagen des Verfahrens

Alle physikalischen Größen sind beim Gauß-Verfahren als Zufallsvariablen zu betrachten (siehe Anhang B), auch die Einflußgrößen, die systematische Abweichungen bewirken (siehe Abschnitte 3 und 4.2 sowie DIN 1319 Teil 1). Die Einflußgrößen unterscheiden sich von den gemessenen Größen nur dadurch, daß über sie weniger Informationen herangezogen werden können. Die Verteilungen der Zufallsvariablen sind meist nicht bekannt und auch weitgehend beliebig, da hauptsächlich mit den Schätzwerten ihrer Erwartungswerte (z.B. Mittelwerte von Meßwerten) gerechnet wird. Die Erwartungswerte werden für die wahren Werte der physikalischen Größen genommen. Außerdem wird gerechnet mit den empirischen Varianzen und Kovarianzen der Schätzung der Erwartungswerte (siehe Abschnitte 3.4 und 4). Diese dienen, zusammengefaßt zur Kovarianzmatrix, als Maß für die Unsicherheit.

Die Angabe der Unsicherheit in Form eines Vertrauensbereichs, der mindestens mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit (Vertrauensniveau) den wahren Wert (Erwartungswert) einer Ergebnisgröße überdeckt, ist nicht möglich, wenn nicht die bestimmte Art der Verteilung der Größe bekannt ist oder eine solche angenommen werden kann, z.B. eine Normalverteilung. Wegen dieser zusätzlich erforderlichen Annahme einer Verteilung, die in der Praxis allerdings durchaus realistisch sein mag, empfiehlt sich bei Bedarf die Angabe eines Vertrauensbereichs lediglich als Ergänzung zur Angabe der Kovarianzmatrix. Bei späterer Verwertung der Meßergebnisse wird jedoch aus Konsistenzgründen die Kovarianzmatrix benötigt. Sie wird deshalb als Maß für die Unsicherheit herangezogen.

3 Modell für die Auswertung

Das folgende einleitende Beispiel erläutert die wichtigsten Begriffe, auf die sich das Gauß-Verfahren stützt. Danach werden sie allgemein definiert. (Siehe auch Bild 1 und das begleitende Beispiel am Ende dieses Abschnitts.)

Einleitendes Beispiel: Soll die Dichte ρ eines Körpers aus seiner Masse m und seinem Volumen V (unter Vernachlässigung von Einflußgrößen) bestimmt werden, so werden die gemessenen Größen m und V als Eingangsgrößen, die interessierende Meßgröße ρ als Ausgangs- oder Ergebnisgröße und die Beziehung $\rho = m/V$ als Modell für die Auswertung bezeichnet. Ziel ist es, das Meßergebnis für die Dichte ρ zu gewinnen und dessen Unsicherheit aus den Unsicherheiten der Messung von m und V zu berechnen. Als Maß für die Unsicherheit der Größen dient dabei in erster Linie die empirische Varianz der Schätzung ihrer Erwartungswerte, z.B. die Varianz des Mittelwerts aus Meßwerten der Größen m und V .

3.1 Eingangsgrößen

Die v_X physikalischen Größen X_i ($i = 1, \dots, v_X$), von denen Daten und andere Informationen bei einer Auswertung herangezogen werden, sind die **Eingangsgrößen** der Auswertung. Sie werden als Zufallsvariablen aufgefaßt. Es gebe also eine gemeinsame Wahrscheinlichkeitsverteilung der möglichen Werte der Eingangsgrößen X_i . Die Schätzwerte x_i für die wahren Werte der Größen X_i sind auszuwertende **Eingangsdaten** (Ansätze für x_i siehe Abschnitt 4).

Zu den Eingangsgrößen X_i gehören:

- a) direkt gemessene Meßgrößen, die den Ausgaben der Meßgeräte zuzuordnen sind. In das Gauß-Verfahren gehen die Werte x_i der Meßgrößen als Rohdaten ein, also unkorrigiert und ohne Berücksichtigung systematischer Einflüsse (siehe Aufzählung b), Abschnitt 3.3, Beispiel 2 und Anhang A, Abschnitt A.1.1).
- b) erfassbare Einflußgrößen, die systematische Abweichungen bewirken, auch Größen, die der Korrektur dienen. Die gedankliche Abtrennung der systematischen Einflüsse von den Meßgrößen nach Aufzählung a) und ihre Betrachtung als eigene, zusätzliche Zufallsvariablen wird hervorgehoben.
- c) Ergebnisgrößen vorangegangener Auswertungen (siehe Abschnitt 3.2).
- d) alle sonstigen Größen, über die Informationen bei der Auswertung z.B. aus der Literatur oder aus Tabellen herangezogen werden.

Mit den v_X Eingangsgrößen X_i wird eine Spaltenmatrix X gebildet:

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_{v_X} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

und die Eingangsdaten x_i werden analog Gleichung (1) ebenfalls zu einer Spaltenmatrix x (Wertetabelle) zusammengefaßt.

3.2 Ausgangs- oder Ergebnisgrößen

Die v_Y interessierenden Meßgrößen Y_i ($i = 1, \dots, v_Y$) der Auswertung heißen **Ausgangs- oder Ergebnisgrößen** und sind ebenfalls Zufallsvariablen. Die zu ermittelnden Schätzwerte y_i für die wahren Werte der Ergebnisgrößen Y_i werden **Meßergebnisse oder Ausgangsdaten** genannt.

Entsprechend den Spaltenmatrizen X und x der Eingangsgrößen bzw. -daten nach Abschnitt 3.1 werden die Spaltenmatrizen Y und y der v_Y Ergebnisgrößen Y_i bzw. der Meßergebnisse y_i eingeführt. Ein Ziel der Auswertung ist es, die

Spaltenmatrix y der Meßergebnisse aus der Spaltenmatrix x der Eingangsdaten und aus dem Modell zu berechnen (siehe Abschnitt 3.3).

3.3 Mathematische Formulierung des Modells

Ein zu bearbeitendes Auswertungsproblem wird allgemein durch v_F Gleichungen $F_i(X, Y) = 0$ ($i = 1, \dots, v_F$) beschrieben. Sie erfassen die gegenseitige Abhängigkeit der in den Spaltenmatrizen X und Y zusammengefaßten Eingangs- und Ausgangsgrößen in impliziter Weise. Die Funktionen F_i werden ebenfalls analog Gleichung (1) durch eine Spaltenmatrix F dargestellt. Die Matrixgleichung

$$F(X, Y) = O \quad (2)$$

(O Nullmatrix, siehe Anhang C) enthält dann alle mathematischen Beziehungen des Problems. Sie wird Modell für die Auswertung genannt. Die Ausgangsdaten y ergeben sich aus den Eingangsdaten x über die Gleichung $F(x, y) = O$.

Die Matrizen der partiellen Ableitungen des Modells F nach X und Y mit eingesetzten Größenwerten x und y werden mit F_X bzw. F_Y bezeichnet ((v_F, v_X) - bzw. (v_F, v_Y) -Matrix, Beispiele siehe Gleichungen (10) und (11)):

$$F_X = \left(\frac{\partial F_i}{\partial X_k} \right)_{x, y}; \quad F_Y = \left(\frac{\partial F_i}{\partial Y_k} \right)_{x, y}; \quad (i = 1, \dots, v_F; \quad k = 1, \dots, v_X \text{ bzw. } v_Y). \quad (3)$$

Eine Hauptrolle bei der Fortpflanzung von Unsicherheiten spielt das Matrixprodukt $F_Y^{-1} F_X = Q$ (siehe Abschnitt 5.2). Mitunter lassen sich die Ableitungen in Gleichung (3) nicht oder nur mit großem Aufwand explizit bilden. Sie können dann durch numerisch berechnete Differenzenquotienten ersetzt werden (siehe Anhang D).

Sehr oft ist es möglich und dann auch zweckmäßig, das Modell in einer nach Y aufgelösten Form $F(X, Y) = Y - G(X) = O$ oder

$$Y = G(X) \quad (4)$$

explizit anzugeben, wobei G ebenfalls eine Spaltenmatrix mit $v_F = v_Y$ Elementen $G_i(X)$ ist. Dann sind $F_X = -G_X = (-\partial G_i / \partial X_k)_{x, y}$ und $F_Y = I$ (Einheitsmatrix, siehe Anhang C).

Häufig hängt nur eine einzelne Ergebnisgröße Y in der Form des Modells $Y = G(X)$ explizit von X ab ($v_F = v_Y = 1$). Dann sei (siehe Abschnitt 5.1)

$$G_{x_i} = \frac{\partial G}{\partial X_i} \Big|_x; \quad (i = 1, \dots, v_X). \quad (5)$$

Beispiel 1: Im einleitenden Beispiel $\varrho = m/V$ nach Abschnitt 3 sind $X_1 = m$, $X_2 = V$ und $Y = \varrho$ sowie $v_X = 2$, $v_Y = 1$ und $v_F = 1$. Das Modell lautet $F(m, V, \varrho) = \varrho - m/V = 0$ oder $\varrho = G(m, V) = m/V$, und es sind $\partial F / \partial m = -\partial G / \partial m = -1/V$, $\partial F / \partial V = -\partial G / \partial V = m/V^2$, $\partial F / \partial \varrho = 1$. Daraus ergeben sich nach Gleichung (3) die (1,2)-Matrix $F_X = -G_X = (-1/V, m/V^2)$ und die (1,1)-Matrix $F_Y = (1)$. In F_X sind dann noch die Werte der Größen einzusetzen.

Beispiel 2: Wird eine Größe X_1 direkt gemessen, und muß aber noch eine systematische Abweichung mittels einer Größe X_2 korrigiert werden, so ist $Y = G(X_1, X_2) = X_1 + X_2$ als Modell anzusetzen, um die Ergebnisgröße Y zu erhalten. In dieser Sicht ist die Meßgröße X_1 , für sich betrachtet, frei von der systematischen Abweichung zu denken. Deren Einfluß im Hinblick auf die interessierende Größe Y wird im Modell durch die Größe X_2 als Korrektur berücksichtigt.

Beispiel 3: Hängen die Ergebnisgrößen linear von den Eingangsgrößen ab, d. h. gilt mit der konstanten Matrix A und Spaltenmatrix B das Modell $Y = G(X) = AX + B$, so sind $G_X = A$, $F_X = -A$ und $F_Y = I$.

3.4 Erwartungswerte, Varianzen, Kovarianz- und Korrelationsmatrizen und ihre Schätzwerte

Die Spaltenmatrizen x und y sind als Schätzwerte der Erwartungswerte EX und EY der Spaltenmatrizen X bzw. Y der Größen bezüglich ihrer (nicht notwendig bekannten) Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu bilden. x und y werden als Näherungswerte für die wahren Größenwerte aufgefaßt. Weiterhin werden als Maß für die Unsicherheit die (empirischen) Kovarianzmatrizen $S_x = (s_{x, ik})$ und $S_y = (s_{y, ik})$ ($i, k = 1, \dots, v_X$ bzw. v_Y) als Schätzmatrizen der theoretischen Kovarianzmatrizen Σ_x bzw. Σ_y der Schätzungen der Erwartungswerte EX bzw. EY benötigt (Beispiel siehe Gleichung (30)). Ansätze für die Schätzungen werden in den Abschnitten 4 und 5 behandelt. Die Diagonalelemente der Kovarianzmatrizen S_x und S_y sind die (empirischen) Varianzen $s_{x, ii} = s_{x_i}^2$ bzw. $s_{y, ii} = s_{y_i}^2$ der Werte x_i bzw. y_i , ihre positiven Wurzeln heißen (empirische) Standardabweichungen. Die Nichtdiagonalelemente $s_{x, ik}$ bzw. $s_{y, ik}$ ($i \neq k$) heißen (empirische) Kovarianzen.

Anmerkung: Man beachte, daß S_x und S_y nicht die Kovarianzmatrizen von X bzw. Y sind, die z. B. den Streuungen von Meßwerten entsprechen. Diese Matrizen sind vielmehr Verallgemeinerungen, z. B. der Varianz des Mittelwertes von Meßwerten bei n wiederholten Messungen (siehe auch Abschnitt 4.1.1) und entsprechen s^2/n nach DIN 1319 Teil 3.

Die (empirische) Korrelationsmatrix $R_x = (r_{x, ik})$ der (empirischen) Korrelationskoeffizienten $r_{x, ik}$ und entsprechend auch die Matrix $R_y = (r_{y, ik})$ sind definiert durch

$$R_x = (r_{x, ik}) = (s_{x, ik} / \sqrt{s_{x, ii} s_{x, kk}}) = (s_{x, ik} / s_{x_i} s_{x_k}). \quad (6)$$

Alle Kovarianz- und Korrelationsmatrizen sind symmetrisch und nichtnegativ definit (positiv definit oder positiv semidefinit, siehe Anhang C), und es muß sein (für S_y und R_y entsprechend)

$$r_{x, ii} = 1; \quad |r_{x, ik}| \leq 1. \quad (7)$$

Begleitendes Beispiel: Größen und Modell

Der Wirkwiderstand R_w und der Blindwiderstand R_b eines elektrischen Leiters sollen unter Vernachlässigung von Einflußgrößen durch Messung der Scheitelspannung $\hat{U}$ einer an den Leiter gelegten sinusförmigen Wechselspannung, der Scheitelstromstärke $\hat{I}$ des hindurchfließenden Wechselstromes sowie des Phasenverschiebungswinkels φ der Wechselspannung gegen die Wechselstromstärke bestimmt werden. Als Eingangsgrößen des Auswertungsproblems liegen die $v_X = 3$ Meßgrößen $X_1 = \hat{U}$, $X_2 = \hat{I}$, $X_3 = \varphi$ vor; die $v_Y = 2$ Ergebnisgrößen sind $Y_1 = R_w$, $Y_2 = R_b$. Nach den Abschnitten 3.1 und 3.2 kann angesetzt werden

$$X = \begin{pmatrix} \hat{U} \\ \hat{I} \\ \varphi \end{pmatrix}; \quad Y = \begin{pmatrix} R_w \\ R_b \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Das Modell ist gegeben durch die $v_F = 2$ Beziehungen $F_1 = R_w \hat{I} - \hat{U} \cos \varphi = 0$ und $F_2 = R_b \hat{I} - \hat{U} \sin \varphi = 0$, so daß nach Abschnitt 3.3 gilt

$$F = \begin{pmatrix} R_w \hat{I} - \hat{U} \cos \varphi \\ R_b \hat{I} - \hat{U} \sin \varphi \end{pmatrix} = O. \quad (9)$$

¹⁾ Bei dem Formelzeichen s nach DIN 1319 Teil 1 sind die unterschiedlichen Bedeutungen zu beachten.

Dies ist nach den einzelnen Größen abzuleiten, um die Matrizen F_x und F_y der partiellen Ableitungen nach Gleichung (3) zu bilden.

$$F_x = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1}{\partial X_2} & \frac{\partial F_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2}{\partial X_2} & \frac{\partial F_2}{\partial X_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi & R_w & \hat{U} \sin \varphi \\ -\sin \varphi & R_b & -\hat{U} \cos \varphi \end{pmatrix}; \quad (10)$$

$$F_y = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial Y_1} & \frac{\partial F_1}{\partial Y_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial Y_1} & \frac{\partial F_2}{\partial Y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{I} & 0 \\ 0 & \hat{I} \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Hier müssen noch die Größenwerte, d. h. die Daten x und y eingesetzt werden (siehe Fortsetzung des Beispiels in Abschnitt 4).

4 Ansätze für die Eingangsdaten

Für die Berechnung der Fortpflanzung von Unsicherheiten bei der Auswertung werden Schätzwerte $x = (x_i)$, $S_x = (s_{x,ik})$ und $s_{x,i}^2$ ($i, k = 1, \dots, v_x$) für den Erwartungswert EX der Spaltenmatrix X der Eingangsgrößen, für die theoretische Kovarianzmatrix Σ_x der Schätzung von EX , bzw. im Hinblick auf das einfache „Fehlerfortpflanzungsgesetz“ nach Abschnitt 5.1 speziell für die Varianzen benötigt. Sie sind nach den Abschnitten 4.1 bis 4.5 empirisch anzusetzen, z. B. bei Wiederholungsmessungen x_i als Mittelwerte aus Meßwerten. Die Ansätze sind Beispiele, decken jedoch die meisten vorkommenden Fälle ab. Anderenfalls darf das Rezept entsprechend den jeweils gerade verfügbaren Informationen modifiziert werden. Bei allem Bemühen um sinnvolle Ansätze für die Schätzwerte werden sie mitunter nicht frei sein von einer gewissen Subjektivität. Das läßt sich nicht vermeiden und ist vernünftig und tragbar, solange zusätzliche Informationen nicht vorliegen oder nur mit einem unverhältnismäßig großen Aufwand gewonnen werden können.

4.1 Wiederholt gemessene Größen

4.1.1 Werden Meßgrößen X_i unter Wiederholbedingungen (siehe DIN 1319 Teil 3) mehrmals gemeinsam in n unabhängigen Versuchen gemessen (siehe auch Abschnitt 4.4, Aufzählung a)) und ergeben sich dabei die Einzelmesswerte $v_{i,j}$ ($j = 1, \dots, n$), so sind anzusetzen:

für die Schätzwerte der Erwartungswerte die Mittelwerte:

$$x_i = \bar{v}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n v_{i,j}; \quad (12)$$

speziell für die Schätzwerte der Varianzen der Mittelwerte, d. h. für die Diagonalelemente der Kovarianzmatrix:

$$s_{x,i}^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n (v_{i,j} - \bar{v}_i)^2 \quad (13)$$

und allgemein für die Elemente der Kovarianzmatrix

$$s_{x,ik} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n (v_{i,j} - \bar{v}_i)(v_{k,j} - \bar{v}_k) \quad (14)$$

Es muß $n > 1$, jedoch nicht $n \gg 1$ sein ($n=1$ siehe Abschnitt 4.3).

4.1.2 Werden Anzahlen X_i einmal oder unter Wiederholbedingungen (siehe DIN 1319 Teil 3 und Abschnitt 4.1.1) mehrmals gemeinsam in n unabhängigen Versuchen gemessen und werden dabei jeweils $N_{i,j}$ ($j = 1, \dots, n$) Ereignisse registriert, so sind anzusetzen:

für die Schätzwerte der Erwartungswerte die Mittelwerte:

$$x_i = \bar{N}_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n N_{i,j}; \quad (15)$$

speziell für die Schätzwerte der Varianzen der Mittelwerte:

$$s_{x,i}^2 = \bar{N}_i/n \quad (16)$$

und allgemein für die Elemente der Kovarianzmatrix:

$$s_{x,ik} = \frac{1}{n} \sqrt{\bar{N}_i \bar{N}_k} \cdot r_{x,ik}. \quad (17)$$

Gleichung (17) gilt nur, wenn die Korrelationskoeffizienten $r_{x,ik}$ bekannt sind oder nach den Abschnitten 4.3 und 4.4 und Gleichung (6) abgeschätzt werden können. Bei einem Versuch ($n=1$) ist meist $r_{x,ik} = 0$ für $i \neq k$ zu setzen (siehe Abschnitt 4.4). In anderen Fällen ist nach Abschnitt 4.1.1 mit $v_{i,j} = N_{i,j}$ zu verfahren. Bei wiederholten Messungen einer einzelnen Anzahl siehe auch Anhang A, Abschnitt A.4.

Anmerkung: Die Ansätze nach den Gleichungen (15) und (16) entsprechen Poisson-Verteilungen der Anzahlen und gelten, solange keine weiteren Informationen vorliegen.

4.2 Einflußgrößen

Mitunter können von Größen X_i , insbesondere von Einflußgrößen, lediglich untere und obere Grenzen $a_{u,i}$ bzw. $a_{o,i}$ für ihre Werte abgeschätzt werden. Sie können sich z. B. aus den Fehlergrenzen eines Meßgerätes ergeben (siehe DIN 1319 Teil 3). Dann sind anzusetzen:

für die abgeschätzten Erwartungswerte:

$$x_i = \frac{1}{2} (a_{o,i} + a_{u,i}); \quad (18)$$

speziell für die abgeschätzten Varianzen:

$$s_{x,i}^2 = \frac{1}{12} (a_{o,i} - a_{u,i})^2 \quad (19)$$

und allgemein für die Elemente der Kovarianzmatrix:

$$s_{x,ik} = \frac{1}{12} (a_{o,i} - a_{u,i})(a_{o,k} - a_{u,k}) \cdot r_{x,ik} \quad (20)$$

($r_{x,ik}$ siehe Abschnitt 4.4). Diese Ausdrücke sind ebenso zu verwenden für Einflußgrößen, die während der Messung in ihren Grenzen variieren, solange nichts weiteres über die Art dieser Schwankung bekannt ist (siehe Bild 2 und Anmerkung). Es dürfen auch

für die abgeschätzten Erwartungswerte

$$x_i = \overline{X_i(t)}; \quad (21)$$

speziell für die abgeschätzten Varianzen

$$s_{x,i}^2 = \overline{(X_i(t) - x_i)^2} \quad (22)$$

und allgemein für die Elemente der Kovarianzmatrix

$$s_{x,ik} = \overline{(X_i(t) - x_i)(X_k(t) - x_k)} \quad (23)$$

eingesetzt werden, wenn lediglich diese durch Überstreichungen bezeichneten Mittelwerte über die Meßzeit t und über die Anzahl der Versuche verfügbar sind.

Anmerkung: Die Ansätze nach den Gleichungen (18) und (19) entsprechen Rechteckverteilungen der Einflußgrößen zwischen ihren Grenzen. Liegen weitere Informationen vor, so dürfen die Ansätze modifiziert werden. Liegt z. B. der Wert einer Einflußgröße mit größerer Wahrscheinlichkeit mehr in der Mitte des Intervalls zwischen den Grenzen, und soll dies näherungsweise durch eine Wahrscheinlichkeitsdichte in Form eines gleichschenkeligen Dreiecks zwischen den Grenzen ausgedrückt werden, so ist der Nenner 12

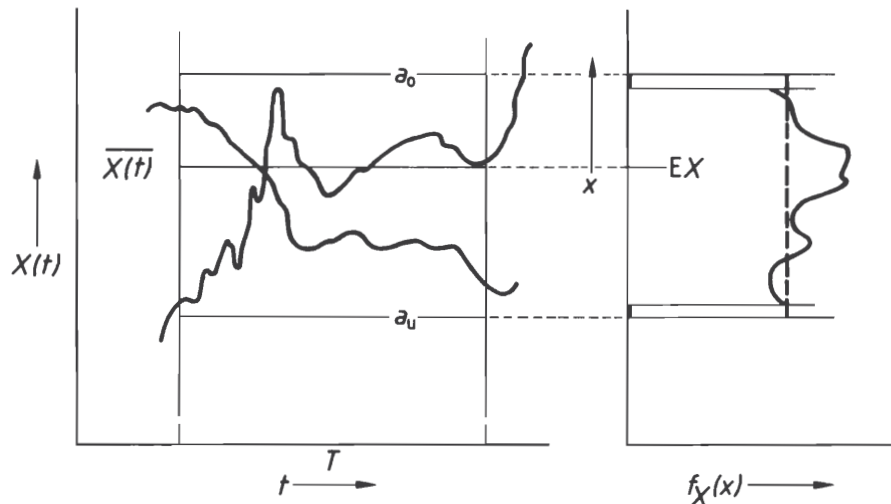


Bild 2. Zwei mögliche unbekannte Verläufe einer zeitlich veränderlichen Einflußgröße $X(t)$ zwischen den abgeschätzten Grenzen a_u und a_o während der Meßdauer T bei wiederholten Messungen (links) und die tatsächliche, ebenfalls nicht bekannte Wahrscheinlichkeitsdichte $f_X(x)$ ihrer Werte x während dieser Meßdauer, gemittelt über die beiden Messungen (rechts). Gestrichelt: angenommene Rechteckverteilung für X zwischen den Grenzen. $\bar{X}(t)$ zeitlicher Mittelwert von $X(t)$, gleich EX , gebildet mit $f_X(x)$.

durch den Nenner 24 zu ersetzen. Schwankt die Einflußgröße zwischen den Grenzen sinusförmig in der Zeit, so ist, wenn ihre Schwingungsdauer klein ist gegen die Meßdauer, der Nenner 8 statt des Nenners 12 zu schreiben.

4.3 Einzelwerte

Liegt für manche Größen X_i nur jeweils ein einzelner Wert vor, z. B. ein Meßwert (Fall $n = 1$, der nach Abschnitt 4.1.1 nicht behandelt werden kann), ein Ergebniswert einer vorangegangenen Auswertung, ein Literaturwert oder ein Korrektionswert, so ist dieser als Schätzwert x_i zu verwenden. Die Elemente $s_{x,ik}$ der Kovarianzmatrix S_x und speziell die Varianzen $s_{x_i}^2$ sind dann ebenfalls den Literaturangaben oder anderen Quellen zu entnehmen oder z. B. nach der Erfahrung abzuschätzen (Korrekturen siehe auch Abschnitt 4.5).

Werden dazu die nach den Gleichungen (14) oder (17) aus n_0 früheren Wiederholungsmessungen derselben Größen bestimmten Elemente $s_{x,ik,0}$ einer Kovarianzmatrix $S_{x,0}$ herangezogen oder auch die entsprechenden, nach den Gleichungen (13) oder (16) gebildeten Varianzen $s_{x_i,0}^2$, so sind anzusetzen:

speziell für die Varianzen:

$$s_{x_i}^2 = n_0 s_{x_i,0}^2 \quad (24)$$

und allgemein für die Elemente der Kovarianzmatrix:

$$s_{x,ik} = n_0 s_{x,ik,0} \quad (25)$$

4.4 Kovarianzen

Es sind die Kovarianzen $s_{x,ik} = 0$ und die Korrelationskoeffizienten $r_{x,ik} = 0$ zu setzen für $i \neq k$, wenn

- die Größen X_i und X_k unkorreliert sind, z. B. wiederholt, aber nicht gemeinsam in verschiedenen unabhängigen Versuchen gemessen werden, oder
- die Größen X_i und X_k näherungsweise als unkorreliert angesehen werden können oder sollen – z. B. zur Verminderung des Rechenaufwandes (siehe Abschnitt 8.2) – oder
- nichts über die Korrelation der Größen X_i und X_k bekannt ist.

Letzteres folgt aus einer Mittelung der möglichen Werte der Korrelationskoeffizienten in ihren Grenzen -1 und $+1$ bei Annahme einer um den Wert 0 symmetrischen Verteilung. Werden nicht alle Nichtdiagonalelemente der Kovarianzmatrix S_x gleich Null gesetzt, so muß die Nebenbedingung nach Gleichung (7) beachtet und geprüft werden, ob S_x nichtnegativ definit ist (siehe Anhang C). Besitzt S_x diese Eigenschaft nicht, die garantiert, daß keine der Varianzen $s_{y_i}^2$ (siehe Abschnitt 5) negativ wird, so liegt ein Fehler im Ansatz für S_x vor. Eine diagonale Kovarianzmatrix oder eine solche nach Gleichung (14) ist bereits nichtnegativ definit. Lassen sich die Größen X_i so in Klassen einteilen, daß $s_{x,ik} = 0$ ist für alle Paare von Größen X_i und X_k aus verschiedenen Klassen, und sind die Kovarianzmatrizen $S_x^{(j)}$ der einzelnen Klassen nichtnegativ definit, so besitzt auch S_x diese Eigenschaft.

4.5 Größen mit geringer Auswirkung

Wirken sich die Varianzen und Kovarianzen der Schätzungen der Erwartungswerte einiger Größen X_i im Vergleich zu denen anderer nur sehr geringfügig auf die Kovarianzmatrix S_y aus (siehe Abschnitt 5), z. B. weil diese Größen wesentlich präziser gemessen werden können oder weil die Ergebnisgrößen Y_i nicht empfindlich von ihnen abhängen – das gilt besonders für Größen X_i , die der Korrektur dienen –, so dürfen diese Größen X_i als Konstanten behandelt werden und in der Kovarianzmatrix S_x unberücksichtigt bleiben.

Begleitendes Beispiel: Daten

Im begleitenden Beispiel nach Abschnitt 3 sollen sich bei $n = 5$ unter gleichen Bedingungen wiederholten Versuchen jeweils die in Tabelle 1 angegebenen Meßwerte $v_{i,j}$ ($j = 1, \dots, 5$) für die Scheitelspannung $\hat{U}$ ($i = 1$), die Scheitelstromstärke $\hat{I}$ ($i = 2$) und den Phasenverschiebungswinkel φ ($i = 3$) ergeben haben. Die Mittelwerte $\bar{v}_i$ sind nach Gleichung (12) die Eingangsdaten für die Auswertung, die als Schätzwerte x_i der Erwartungswerte der Größen X_i nach Gleichung (8) und Abschnitt 3.1 die Spaltenmatrix x bilden:

$$x = \begin{pmatrix} 4,990 \text{ V} \\ 19,610 \text{ mA} \\ 1,0446 \text{ rad} \end{pmatrix} \quad (26)$$

Aus dem Modell nach Gleichung (9) errechnen sich damit für den Wirkwiderstand $R_w = 127,8 \Omega$ und für den Blindwiderstand $R_b = 220,0 \Omega$. Diese Meßergebnisse sind die Schätzwerte y_i der Erwartungswerte der Ergebnisgrößen Y_i ($i=1,2$). Mit ihnen wird nach Gleichung (8) und Abschnitt 3.2 die Spaltenmatrix y aufgebaut:

$$y = \begin{pmatrix} 127,8 \Omega \\ 220,0 \Omega \end{pmatrix}. \quad (27)$$

x und y sind nun in die Matrizen F_x und F_y der partiellen Ableitungen nach den Gleichungen (10) und (11) einzusetzen:

$$F_x = \begin{pmatrix} -0,5022 & 127,8 \Omega & 4,315 V \\ -0,8647 & 220,0 \Omega & -2,506 V \end{pmatrix}; \quad (28)$$

$$F_y = \begin{pmatrix} 19,610 \text{ mA} & 0 & \text{mA} \\ 0 & \text{mA} & 19,610 \text{ mA} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

Schließlich sind noch nach Gleichung (14) und Tabelle 1 die Elemente $s_{x,ik}$ der Kovarianzmatrix S_x und daraus, falls erforderlich, nach Gleichung (6) die Korrelationsmatrix R_x zu berechnen. Es ergeben sich

$$S_x = \begin{pmatrix} s_{x,1}^2 & s_{x,12} & s_{x,13} \\ s_{x,21} & s_{x,2}^2 & s_{x,23} \\ s_{x,31} & s_{x,32} & s_{x,3}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,00103 \text{ V}^2 & -0,00108 \text{ mA} \cdot \text{V} & 2,07 \cdot 10^{-4} \text{ V} \cdot \text{rad} \\ -0,00108 \text{ mA} \cdot \text{V} & 0,00897 \text{ mA}^2 & -4,595 \cdot 10^{-4} \text{ mA} \cdot \text{rad} \\ 2,07 \cdot 10^{-4} \text{ V} \cdot \text{rad} & -4,595 \cdot 10^{-4} \text{ mA} \cdot \text{rad} & 5,656 \cdot 10^{-5} \text{ rad}^2 \end{pmatrix}; \quad (30)$$

$$R_x = \begin{pmatrix} 1 & -0,36 & 0,86 \\ -0,36 & 1 & -0,65 \\ 0,86 & -0,65 & 1 \end{pmatrix}. \quad (31)$$

Die Standardabweichungen der Eingangsdaten sind in Tabelle 1 aufgeführt. Das begleitende Beispiel wird in Abschnitt 5 fortgesetzt mit der Berechnung der Kovarianzmatrix S_y und der Korrelationsmatrix R_y .

Tabelle 1. Meßwerte $v_{i,j}$ der Eingangsgrößen $X_i = \hat{U}$, $\hat{I}$ bzw. φ des begleitenden Beispiels bei 5 wiederholten Versuchen sowie ihre Mittelwerte und deren Standardabweichungen

Versuch Nr	$\hat{U}$ in V	$\hat{I}$ in mA	φ in rad
1	5,07	19,63	1,056
2	4,94	19,39	1,038
3	5,05	19,40	1,068
4	4,90	19,85	1,028
5	4,99	19,78	1,033
$x_i = \bar{v}_i$	4,990	19,610	1,0446
s_{x_i}	0,032	0,095	0,0075

5 Fortpflanzung von Unsicherheiten

5.1 Behandlung von Unsicherheiten bei einer Ergebnisgröße und mehreren Eingangsgrößen

5.1.1 „Fehlerfortpflanzungsgesetz.“ Sehr häufig ist nur eine Ergebnisgröße Y zu ermitteln, die von v_X unkorrelierten Eingangsgrößen X_i (siehe Abschnitt 4.4) in der Form der Funktion $Y = G(X)$ abhängt ($v_Y = v_F = 1$, siehe Abschnitt 3.3). Der Wert y und näherungsweise die Standardabweichung s_y ergeben sich in diesem einfachen Fall mit

Gleichung (5) und den Varianzen $s_{x_i}^2$ nach den Gleichungen (13), (16), (19), (22) und (24) zu

$$y = G(x); \quad (32)$$

$$s_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{v_X} G_{x_i}^2 s_{x_i}^2}; \quad G_{x_i} = \left. \frac{\partial G}{\partial X_i} \right|_x. \quad (33)$$

Gleichung (33) ist das „Fehlerfortpflanzungsgesetz“ von Gauß, die bekannte vereinfachte Form des Gauß-Verfahrens. Die Ansätze für die Kovarianzen $s_{x,ik}$ nach Abschnitt 4 und die Matrixdarstellung überhaupt, abgesehen von den Formelzeichen X und x für die Eingangsgrößen bzw. -daten werden hierbei nicht benötigt, weil die Kovarianzmatrix S_x diagonal ist. (Zum Vertrauensintervall siehe Abschnitt 8.1.)

Nach Abschnitt 5.3 muß vorausgesetzt werden, daß für die Meßwerte und die möglichen sonstigen Werte der Größen X_i die Funktion $G(X)$ durch ihre lineare Näherung dargestellt wird, die Abweichung $G(X) - (G(x) + \Delta G)$ der Funktion $G(X)$ von der linearen Näherung ihrer Taylor-Entwicklung bei x also gegen

$$\Delta G = \sum_{i=1}^{v_X} G_{x_i} \cdot (X_i - x_i) \quad (34)$$

vernachlässigbar ist für alle X in der Umgebung von x , gegeben durch ($\lesssim$ lies: kleiner als oder ungefähr gleich)

$$\sum_{i=1}^{v_X} (X_i - x_i)^2 / s_{x_i}^2 \lesssim v_X. \quad (35)$$

Beispiel: Im einleitenden Beispiel $\varphi = m/V = G(m, V)$ nach Abschnitt 3 und in Abschnitt 3.3, Beispiel 1, sind $X_1 = m$, $X_2 = V$ und $Y = \varphi$ sowie $G_m = \partial G / \partial m = 1/V$, $G_V = \partial G / \partial V = -m/V^2$ und $v_X = 2$. Wurden m und V in verschiedenen unabhängigen Versuchen gemessen (siehe Abschnitt 4.4, Aufzählung a)), so läßt sich Gleichung (33) anwenden. Sie lautet in diesem Fall

$$s_\varphi = \sqrt{\frac{1}{V^2} s_m^2 + \frac{m^2}{V^4} s_V^2}. \quad (36)$$

Hier sind noch die Daten einzusetzen.

5.1.2 Sind die Eingangsgrößen korreliert, so gilt statt Gleichung (33)

$$s_y = \sqrt{\sum_{i,k=1}^{v_X} G_{x_i} G_{x_k} s_{x,ik}} \quad (37)$$

mit Gleichung (5) und den Kovarianzen nach den Gleichungen (14), (17), (20), (23) und (25). Die Voraussetzungen nach Abschnitt 5.3 sind zu beachten.

5.2 Gauß-Verfahren

Allgemein läßt sich das Auswertungsverfahren mit den in den Abschnitten 3 und 4 definierten Größen und ihren Werten so formulieren:

- Die Meßergebnisse y errechnen sich aus den Eingangsdaten x über das Modell $F(x, y) = 0$.
- Die Kovarianzmatrix S_y ergibt sich aus der Kovarianzmatrix S_x durch die Beziehung

$$S_y = Q S_x Q^T. \quad (38)$$

Hierbei ist Q eine Transformationsmatrix (Q^T ihre Transponierte, siehe Anhang C), die mit Gleichung (3) gegeben ist durch

$$Q = F_y^{-1} F_x = \left(- \frac{\partial Y_i}{\partial X_k} \right)_{x,y}; \quad (i=1, \dots, v_Y; k=1, \dots, v_X) \quad (39)$$