

Grundlagen der Meßtechnik**Teil 4: Auswertung von Messungen
Meßunsicherheit****DIN**
1319-4

ICS 17.020

Ersatz für Ausgabe 1985-12

Deskriptoren: Meßtechnik, Meßunsicherheit, Meßdaten, Auswertung, Metrologie

Fundamentals of metrology —

Part 4: Evaluation of measurements, uncertainty of measurement

Fondements de la métrologie —

Partie 4: Exploitation des mesurages, incertitude de mesure

Inhalt

	Seite
Vorwort	2
1 Anwendungsbereich	2
2 Normative Verweisungen	3
3 Begriffe	3
3.1 Meßgröße	3
3.2 Ergebnisgröße (der Auswertung)	3
3.3 Eingangsgröße (der Auswertung)	4
3.4 Modell (der Auswertung)	4
3.5 Meßunsicherheit	4
3.6 Standardmeßunsicherheit	4
3.7 Gemeinsame Komponente der Meßunsicherheit	4
3.8 Meßunsicherheitsmatrix	4
4 Allgemeine Grundlagen der Auswertung von Messungen	5
4.1 Ziel der Messung	5
4.2 Vier Schritte der Auswertung von Messungen	5
5 Aufstellung des Modells der Auswertung	5
5.1 Allgemeines	5
5.2 Eingangsgrößen und Ergebnisgrößen	6
5.3 Modellfunktionen	6
5.4 Verallgemeinerte mathematische Formulierung des Modells	7
6 Vorbereitung der Eingangsdaten	8
6.1 Individuelle und gemeinsame Komponenten der Meßunsicherheit, Meßunsicherheitsmatrix	8
6.2 Mehrmals gemessene Größen	10
6.3 Einzelwerte oder wenige Werte	10
6.4 Zählraten	11
6.5 Einflußgrößen	11
6.6 Korrelationen	12
6.7 Größen mit geringer Auswirkung	12
7 Berechnung des vollständigen Meßergebnisses	12
7.1 Gauß-Verfahren	12
7.2 Verallgemeinerte Formulierung des Gauß-Verfahrens	14
7.3 Numerische Berechnung	15

Fortsetzung Seite 2 bis 36

Normenausschuß Technische Grundlagen (NATG) — Einheiten und Formelgrößen —
im DIN Deutsches Institut für Normung e.V.

Deutsche Elektrotechnische Kommission im DIN und VDE (DKE)

Normenausschuß Qualitätsmanagement, Statistik und Zertifizierungsgrundlagen (NQSZ) im DIN

	Seite
8 Ausgleichsrechnung	15
8.1 Methode der kleinsten Quadrate	15
8.2 Sonderfall der einmaligen Messung vieler Größen	17
9 Mitteilung der Ergebnisse der Auswertung	17
9.1 Angabe des vollständigen Meßergebnisses	17
9.2 Schreibweisen der Angabe mit Meßunsicherheit	18
10 Ergänzungen	19
10.1 Vertrauensbereich	19
10.2 Vorgehen bei sehr vielen Größen	19
Anhang A (informativ) Beispiele	20
Anhang B (informativ) Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung	27
Anhang C (informativ) Hinweise für die Anwendung der Matrizenrechnung	28
Anhang D (informativ) Rechnerunterstützte Auswertung	30
Anhang E (informativ) Grenzen der Anwendung des Gauß-Verfahrens	31
Anhang F (informativ) Erläuterungen	32
Anhang G (informativ) Literaturhinweise	34
Anhang H (informativ) Verwendete genormte Begriffe und ihre Quellen	34
Anhang I (informativ) Stichwortverzeichnis	35

Vorwort

Diese Norm wurde vom Arbeitsausschuß NATG-A.73 des Normenausschusses Technische Grundlagen (NATG) – Fachbereich A: Einheiten und Formelgrößen (AEF) – im DIN Deutsches Institut für Normung, einem Gemeinschaftsarbeitsausschuß mit der Deutschen Elektrotechnischen Kommission im DIN und VDE (DKE) und der VDI/VDE-Gesellschaft Meß- und Automatisierungstechnik (GMA), erarbeitet.

Anhänge A bis I sind informativ.

DIN 1319 "Grundlagen der Meßtechnik" besteht aus:

Teil 1: Grundbegriffe

Teil 2: Begriffe für die Anwendung von Meßgeräten

Teil 3: Auswertung von Messungen einer einzelnen Meßgröße, Meßunsicherheit

Teil 4: Auswertung von Messungen, Meßunsicherheit

Änderungen

Gegenüber der Ausgabe Dezember 1985 wurden folgende Änderungen vorgenommen:

- Die Norm wurde redaktionell überarbeitet, insbesondere hinsichtlich der Benennungen und Formelzeichen, und an DIN 1319-3:1996-05 und an die internationalen Empfehlungen [1] angepaßt. Das genormte Verfahren wurde jedoch nicht geändert.
- Die Meßunsicherheitsmatrix wurde eingeführt.
- Aus Gründen der Systematik und Vollständigkeit wurden einige Teile aus DIN 1319-3:1996-05 sinngemäß, teilweise auch wörtlich übernommen.

Frühere Ausgaben

DIN 1319-4:1985-12

1 Anwendungsbereich

Diese Norm gilt im Bereich der Meßtechnik für die gemeinsame Ermittlung und Angabe der Meßergebnisse und Meßunsicherheiten von Meßgrößen bei der Auswertung von Messungen. Sie gilt sinngemäß auch bei rechner-simulierten Messungen.

Zweck der Norm ist die Festlegung eines Verfahrens für die Auswertung im Fall, daß die Meßgrößen mittels gegebener Funktionen aus anderen Größen berechnet werden, z.B. durch eine Ausgleichsrechnung. Wenn nur eine einzelne Meßgröße direkt gemessen wird oder als Funktion anderer Größen auszuwerten ist, kann auch nach DIN 1319-3 verfahren werden.

2 Normative Verweisungen

Diese Norm enthält durch datierte oder undatierte Verweisungen Festlegungen aus anderen Publikationen. Diese normativen Verweisungen sind an den jeweiligen Stellen im Text zitiert, und die Publikationen sind nachstehend aufgeführt. Bei datierten Verweisungen gehören spätere Änderungen oder Überarbeitungen dieser Publikationen nur zu dieser Norm, falls sie durch Änderung oder Überarbeitung eingearbeitet sind. Bei undatierten Verweisungen gilt die letzte Ausgabe der in Bezug genommenen Publikation.

- DIN 1303 Vektoren, Matrizen, Tensoren – Zeichen und Begriffe
- DIN 1313 Physikalische Größen und Gleichungen – Begriffe, Schreibweisen
- DIN 1319-1 Grundlagen der Meßtechnik – Teil 1: Grundbegriffe
- DIN 1319-3 Grundlagen der Meßtechnik – Teil 3: Auswertung von Messungen einer einzelnen Meßgröße, Meßunsicherheit
- DIN 1333 Zahlenangaben
- DIN 13303-1 Stochastik – Wahrscheinlichkeitstheorie, Gemeinsame Grundbegriffe der mathematischen und der beschreibenden Statistik, Begriffe und Zeichen
- DIN 13303-2 Stochastik – Mathematische Statistik, Begriffe und Zeichen
- DIN 18709-4 Begriffe, Kurzzeichen und Formelzeichen im Vermessungswesen – Ausgleichsrechnung und Statistik
- DIN 55350-21 Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik – Begriffe der Statistik, Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- DIN 55350-22 Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik – Begriffe der Statistik, Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen
- DIN 55350-23 Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik – Begriffe der Statistik, Beschreibende Statistik
- DIN 55350-24 Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik – Begriffe der Statistik, Schließende Statistik
- ISO 3534-1:1993 Statistics – Vocabulary and symbols – Part 1: Probability and general statistical terms
- VDI 2739 Blatt 1 Matrizenrechnung – Grundlagen für die praktische Anwendung
- [1] Leitfaden zur Angabe der Unsicherheit beim Messen. Beuth Verlag, Berlin, Köln 1995; Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. ISO International Organization for Standardization, Genf 1993, korrigierter Neudruck 1995
- [2] Internationales Wörterbuch der Metrologie – International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology. DIN Deutsches Institut für Normung (Herausgeber), Beuth Verlag, Berlin, Köln 1994; International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology. ISO International Organization for Standardization, Genf 1993

3 Begriffe

Die Benennungen wichtiger Begriffe sind im folgenden bei deren ersten Auftreten oder an besonderen Stellen kursiv gesetzt. Gesperrt gesetzte Wörter sind betont.

Die Begriffe zu den mit einem Stern (*) versehenen Benennungen sind in den Normen in Anhang H definiert; siehe aber auch ISO 3534-1:1993 und [1], [2]. Zu Begriffen der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Matrizenrechnung siehe auch Anhänge B bzw. C sowie VDI 2739 Blatt 1.

Einige herausragende Begriffe sind im folgenden definiert und kommentiert. Die bei ihren Benennungen in runden Klammern stehenden Zusätze dürfen fortgelassen werden, wenn keine Gefahr der Verwechslung mit anderen Begriffen besteht.

Für die Anwendung dieser Norm gelten die folgenden Definitionen:

3.1 Meßgröße: *Physikalische Größe**, der die *Messung** gilt. [DIN 1319-1:1995-01]

ANMERKUNG: Einer Meßgröße gleichgestellt werden in dieser Norm auch alle anderen Größen, die bei der *Auswertung* von Messungen *b e t e i l i g t* sind. Das betrifft vor allem *Einflußgrößen** und Größen, die der *Berichtigung* oder *Kalibrierung** dienen.

3.2 Ergebnisgröße (der Auswertung): *Meßgröße** als Ziel der Auswertung von *Messungen**. [DIN 1319-3:1996-05]

3.3 Eingangsgröße (der Auswertung): *Meßgröße** oder andere Größe, von der Daten in die Auswertung von *Messungen** eingehen. [DIN 1319-3:1996-05]

3.4 Modell (der Auswertung): Mathematische Beziehungen zwischen allen bei der Auswertung von *Messungen** beteiligten *Meßgrößen** und anderen Größen. [DIN 1319-3:1996-05]

3.5 Meßunsicherheit: Kennwert, der aus *Messungen** gewonnen wird und zusammen mit dem *Meßergebnis** zur Kennzeichnung eines Wertebereiches für den *wahren Wert** der *Meßgröße** dient. [DIN 1319-1:1995-01]

ANMERKUNG 1: Die Meßunsicherheit ist ein Maß für die Genauigkeit der Messung und kennzeichnet die Streuung oder den Bereich derjenigen Werte, die der Meßgröße vernünftigerweise als *Schätzwerte** zugewiesen werden können [1]. Sie kann auch als ein Maß für die Unkenntnis der Meßgröße aufgefaßt werden [3].

ANMERKUNG 2: Die Meßunsicherheit ist von der *Meßabweichung** deutlich zu unterscheiden. Letztere ist nur die Differenz zwischen einem der Meßgröße zuzuordnenden Wert, z.B. einem *Meßwert** oder dem *Meßergebnis*, und dem wahren Wert der Meßgröße. Die Meßabweichung kann gleich Null sein, ohne daß dies bekannt ist. Diese Unkenntnis drückt sich in einer Meßunsicherheit größer als Null aus.

ANMERKUNG 3: Die Meßunsicherheit kann auch ganz allgemein eine bei der Auswertung von Messungen beteiligte Größe betreffen, ohne daß diese eine Meßgröße zu sein braucht. Die Meßunsicherheit wird in dieser Norm wie in [1] auch kurz *Unsicherheit* genannt. Sie wird auch *individuelle Komponente der Meßunsicherheit* genannt, wenn sie mit denen anderer Meßgrößen kombiniert wird oder zusammen mit der *gemeinsamen Komponente der Meßunsicherheit* (siehe 3.7) erwähnt wird. Die Meßunsicherheit wird in dieser Norm als *Standardmeßunsicherheit* durch eine *Standardabweichung** (Quadratwurzel einer *Varianz**) oder quadriert durch eine Varianz ausgedrückt (siehe 3.6, 6.1 und Anhang B).

ANMERKUNG 4: Zu anderen Kennwerten für die Genauigkeit einer Messung siehe DIN 1319-3.

3.6 Standardmeßunsicherheit: *Meßunsicherheit**, ausgedrückt durch eine *Standardabweichung**.

ANMERKUNG 1: Die Standardmeßunsicherheit darf, wenn keine Mißverständnisse entstehen können, auch kurz *Standardunsicherheit* genannt werden. Diese Benennung wird in dieser Norm häufig und in [1] ausschließlich verwendet.

ANMERKUNG 2: Die Standardmeßunsicherheit besitzt dieselbe *Dimension** wie die Meßgröße.

3.7 Gemeinsame Komponente der Meßunsicherheit: Kennwert für ein Paar von *Meßgrößen**, der aus *Messungen** gewonnen wird und zur Kennzeichnung eines Wertebereiches für das Paar der *wahren Werte** der beiden Meßgrößen beiträgt. [DIN 1319-3:1996-05]

ANMERKUNG 1: Der genannte Wertebereich ist zweidimensional. Die gemeinsame Komponente der Meßunsicherheit kennzeichnet die gegenseitige Abhängigkeit, mit der den beiden Meßgrößen gemeinsam Werte zugewiesen werden können. Auch die gemeinsame Komponente der Meßunsicherheit kann andere Größen als Meßgrößen betreffen. Im Gegensatz zur Meßunsicherheit kann sie auch negativ sein. Ist sie ungleich Null, so sind die beiden Meßgrößen — genauer die ihnen zugeordneten *Schätzer** (siehe 5.2 und 6.1) — *korreliert**.

ANMERKUNG 2: Die gemeinsame Komponente der Meßunsicherheit wird in dieser Norm durch eine *Kovarianz** oder einen *Korrelationskoeffizienten** ausgedrückt (siehe 6.1 und Anhang B).

ANMERKUNG 3: In dieser Norm bilden die Meßergebnisse von Meßgrößen und die zugehörigen Standardmeßunsicherheiten und die gemeinsamen Komponenten der Meßunsicherheit in Form von Korrelationskoeffizienten zusammen das *vollständige Meßergebnis** für diese Meßgrößen (siehe Abschnitt 9).

ANMERKUNG 4: Die gemeinsame Komponente der Meßunsicherheit wird in [1] und [4] *Kovarianz** genannt.

3.8 Meßunsicherheitsmatrix: *Matrix**, in der als *Diagonalelemente* die *individuellen Komponenten der Meßunsicherheit* von *Meßgrößen** in Form von *Varianzen** und als *Nichtdiagonalelemente* die *gemeinsamen Komponenten der Meßunsicherheit* aller Paare dieser Meßgrößen in Form von *Kovarianzen** zusammengefaßt sind.

ANMERKUNG 1: Zu Matrizen und ihren Eigenschaften siehe Anhang C sowie DIN 1303 und VDI 2739 Blatt 1. Zum Aufbau und zu Eigenschaften der Meßunsicherheitsmatrix siehe 6.1 und 6.6.

ANMERKUNG 2: Die Meßunsicherheitsmatrix darf, wenn keine Mißverständnisse entstehen können, auch kurz *Unsicherheitsmatrix* genannt werden. Diese Benennung wird in dieser Norm häufig verwendet. Die Meßunsicherheitsmatrix wird in [1] *Kovarianzmatrix** genannt.

4 Allgemeine Grundlagen der Auswertung von Messungen

4.1 Ziel der Messung

Ziel jeder *Messung** einer *Meßgröße** (siehe 3.1) oder gemeinsamen Messung mehrerer Meßgrößen ist es, die *wahren Werte** der Meßgrößen zu ermitteln. Dabei werden *Meßeinrichtungen** und *Meßverfahren** auf *Meßobjekte**, die Träger der Meßgrößen, angewendet. Die Messung kann mit Hilfe eines Rechners simuliert sein. Die Messung umfaßt auch die *Auswertung* der gewonnenen *Meßwerte** und anderer zu berücksichtigender Daten. Ein einheitliches Verfahren für die Auswertung ermöglicht den kritischen Vergleich und die Kombination von Meßergebnissen.

Wegen der bei der Messung wirkenden Einflüsse treten unvermeidlich *Meßabweichungen** (siehe 3.5 Anmerkung 2) auf. Diese sind der Grund, warum es nicht möglich ist, den wahren Wert einer Meßgröße genau zu finden. Lediglich das *Meßergebnis** als ein *Schätzwert** einer Meßgröße sowie die *Meßunsicherheit** (siehe 3.5 und 3.6) lassen sich aus den Meßwerten und anderen Daten gewinnen und angeben, bei mehreren Meßgrößen auch die *gemeinsamen Komponenten der Meßunsicherheit* (siehe 3.7). In dieser Norm bilden die Meßergebnisse und die individuellen und gemeinsamen Komponenten der Meßunsicherheit zusammen das *vollständige Meßergebnis** für die Meßgrößen, die *Ergebnisgrößen* der Auswertung (siehe 3.2 und 3.7 Anmerkung 3).

Bei vielen Messungen ergeben sich die zu einer Meßgröße gehörenden Meßwerte direkt oder nach Berichtigung aus der *Ausgabe** der Meßeinrichtung. Eine solche Messung wird kurz *direkte Messung* genannt. Im allgemeinen müssen Meßgrößen jedoch indirekt ermittelt werden. Dabei werden zunächst andere Meßgrößen entweder direkt gemessen oder ebenfalls indirekt ermittelt. Aus diesen und weiteren Größen, insbesondere *Einflußgrößen**, die die Ursache für *systematische Meßabweichungen** sind, wird dann mit Hilfe eines bestehenden mathematischen Zusammenhangs, des *Modells (der Auswertung)* (siehe 3.4), das vollständige Meßergebnis für die Ergebnisgrößen errechnet. Jene Größen sind die *Eingangsgroßen* der Auswertung (siehe 3.3).

In der Regel können also die interessierenden physikalische Größen einer Meßaufgabe im Experiment nicht direkt gemessen werden, sondern müssen aus anderen Größen, die der Messung besser zugänglich sind oder über die Informationen z.B. aus der Literatur herangezogen werden können, nach mathematischen Beziehungen errechnet werden, z.B. durch eine Ausgleichsrechnung. Selbst bei einer direkt gemessenen Größe sind die ausgegebenen Werte einer Meßeinrichtung oft noch zu berichtigen. Die Frage, wie sich die Unsicherheiten der Eingangsgroßen, die aus den Meßwerten und anderen Informationen folgen, zu den Unsicherheiten der letztlich interessierenden Ergebnisgrößen kombinieren, ist dabei von besonderer Bedeutung. Im Hinblick auf die Verwertung der Meßergebnisse ist es wünschenswert, die Unsicherheiten in einheitlicher Weise zu behandeln. Ein Verfahren für diesen Zweck ist Gegenstand dieser Norm. Es wird *Gauß-Verfahren* genannt. Während DIN 1319-3:1996-05 nur im Fall einer einzelnen zu ermittelnden physikalischen Größe angewendet werden kann, wird diese Einschränkung in dieser Norm fallengelassen. Das Verfahren in dieser Norm umfaßt auch die Ausgleichsrechnung nach der *Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate*.

4.2 Vier Schritte der Auswertung von Messungen

Jede Auswertung wird zweckmäßig in vier voneinander deutlich zu trennenden Schritten ausgeführt:

- a) Aufstellung eines Modells, das die Beziehung der interessierenden Meßgrößen, der Ergebnisgrößen, zu allen anderen beteiligten Größen, den Eingangsgroßen, mathematisch beschreibt (siehe Abschnitt 5),
- b) Vorbereitung der gegebenen Meßwerte und anderer verfügbarer Daten (siehe Abschnitt 6),
- c) Berechnung des vollständigen Meßergebnisses der Ergebnisgrößen aus den vorbereiteten Daten mittels des Modells (siehe Abschnitte 7 und 8 und Anhang D),
- d) Angabe des vollständigen Meßergebnisses der Ergebnisgrößen (siehe Abschnitt 9).

Die Durchführung der Auswertung in diesen vier Schritten ist schematisch in Bild F.1 dargestellt.

5 Aufstellung des Modells der Auswertung

5.1 Allgemeines

Der erste Schritt eines allgemeinen Verfahrens für die Auswertung von Messungen besteht in jedem Anwendungsfall darin, das mathematische Modell der Auswertung heranzuziehen oder zu entwickeln. Das Modell muß der gestellten Auswertungsaufgabe individuell angepaßt sein, diese beschreiben und es erlauben, das vollständige Meßergebnis für die interessierenden Meßgrößen aus Meßwerten und anderen verfügbaren Daten zu berechnen. Die Gleichungen des Modells müssen alle mathematischen Beziehungen umfassen, die zwischen den bei den auszuwertenden Messungen beteiligten physikalischen und anderen Größen, einschließlich der Einflußgrößen, bestehen. Oft ist das Modell zwar schon beispielsweise durch das Meßverfahren, eine Definitionsgleichung oder ein Naturgesetz als eine einfache Gleichung gegeben, nicht selten jedoch erfordert die Aufstellung des Modells eine gründliche Analyse aller Größen, Zusammenhänge, Abläufe und Einflüsse in dem betrachteten Experiment. Das Modell muß immer gebildet werden, möglichst schon bei der Planung der Messungen, nicht nur, um Unsicherheiten zu berechnen, sondern auch, um überhaupt Meßergebnisse für die interessierenden Meßgrößen zu erhalten.

5.2 Eingangsgrößen und Ergebnisgrößen

Als erstes ist es nötig, Klarheit darüber zu gewinnen, welche Größen neben den interessierenden Meßgrößen, den *Ergebnisgrößen* Y_i (siehe 3.2; $i = 1, \dots, n$ mit der Anzahl n der Ergebnisgrößen), bei den betrachteten Messungen und damit bei der gestellten Auswertungsaufgabe zu berücksichtigen sind. Zu diesen *Eingangsgrößen* X_k ¹⁾ (siehe 3.3; $k = 1, \dots, m$ mit der Anzahl m der Eingangsgrößen) gehören

- a) Meßgrößen, die direkt gemessen werden und den *unberichtigten* Ausgaben der verwendeten Meßeinrichtungen zugeordnet werden;
- b) Einflußgrößen und Größen, die der Berichtigung oder *Kalibrierung** dienen;
- c) Ergebnisgrößen vorangegangener Auswertungen oder Teilauswertungen und
- d) andere bei der Auswertung benutzte Größen, für die Daten z.B. aus der Literatur oder aus Tabellen herangezogen werden.

Es wird besonders darauf hingewiesen, daß die unter Aufzählung b) genannten Größen, insbesondere die Einflußgrößen, die die Ursache für systematische Meßabweichungen sind, zweckmäßig als eigene, zusätzliche Eingangsgrößen betrachtet werden.

Bei der Messung einer Funktion sind den gemessenen Ordinaten, bei unsicheren Abszissen auch diesen je eine Eingangsgröße zuzuordnen. Die z.B. durch eine Ausgleichsrechnung zu ermittelnden Parameter der Funktion sind die Ergebnisgrößen.

Jeder beteiligten physikalischen oder anderen Größe X_k und Y_i wird eine Variable, *Schätzer** genannt, zugeordnet. Ein ermittelter Wert x_k bzw. y_i dieses Schätzers wird als Schätzwert der zugehörigen Größe aufgefaßt. Die y_i sind die interessierenden Meßergebnisse. Die Schätzer sind zu unterscheiden von den Größen und treten bei der Auswertung selbst kaum in Erscheinung, aber ihre Werte. Ihre gemeinsame *Wahrscheinlichkeitsverteilung** dient dazu, den vorliegenden Kenntnisstand über die Größen auszudrücken (siehe Anhang F).

5.3 Modellfunktionen

Oft hängen die Ergebnisgrößen Y_i in Form gegebener *Modellfunktionen* G_i explizit von den Eingangsgrößen X_k ab:

$$Y_i = G_i(X_1, \dots, X_m) ; \quad (i = 1, \dots, n) . \quad (1)$$

Für den Fall $n = 1$ siehe auch DIN 1319-3. In diesem Fall wird auf Angabe des Index $i = 1$ verzichtet. Die Modellfunktionen können als mathematische Ausdrücke, dürfen aber auch als komplizierter Algorithmus in Form eines Rechenprogramms vorliegen.

Die partielle Ableitung einer Modellfunktion G_i nach einer Eingangsgröße X_k mit eingesetzten Schätzwerten x_1 bis x_m aller Eingangsgrößen wird mit

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_k} = \left. \frac{\partial G_i}{\partial X_k} \right|_{x_1, \dots, x_m} \quad (2)$$

bezeichnet. Diese Ableitungen werden in 7.1 benötigt. Für numerische Rechnungen ist es im allgemeinen aber nicht erforderlich, diese Ableitungen explizit zu bilden. Diese Aussage ist besonders wichtig, wenn zur Bildung der Ableitungen ein großer Aufwand nötig ist oder wenn die Modellfunktionen G_i nur als Rechenprogramm vorliegen. Es genügt, die Ableitungen durch numerisch berechnete Differenzenquotienten anzunähern (siehe auch 7.3 und Anhang D), z.B. durch

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_k} = \frac{1}{\Delta x_k} \left(G_i(x_1, \dots, x_k + \frac{1}{2}\Delta x_k, \dots, x_m) - G_i(x_1, \dots, x_k - \frac{1}{2}\Delta x_k, \dots, x_m) \right) \quad (3)$$

mit geeignetem Zuwachs Δx_k für eine geringfügige Änderung von x_k .

Ist eine Modellfunktion nur näherungsweise als $G_{0,i}$ bekannt, so kann eine zusätzlich eingeführte Eingangsgröße X_{m+1} helfen, die damit verbundene Abweichung zu beschreiben. Anstelle der Modellfunktion $G_{0,i}$ ist dann also beispielsweise die Modellgleichung

$$Y_i = G_i(X_1, \dots, X_{m+1}) = G_{0,i}(X_1, \dots, X_m) + X_{m+1} \quad (4)$$

zu benutzen. X_{m+1} ist als Einflußgröße anzusehen und kann z.B. das Restglied einer durch $G_{0,i}$ dargestellten *abgebrochenen Taylor-Reihe* sein (siehe Beispiel 3).

¹⁾ Statt der Indizes i und k der Größen Y_i und X_k werden, wenn es zweckmäßig ist, auch andere Buchstaben benutzt.

BEISPIEL 1:

Wird eine Größe Y direkt gemessen und muß aber noch eine systematische Meßabweichung berichtigt werden, so ist $Y = G(X_1, X_2) = X_1 - X_2$ als Modell anzusetzen, um die Ergebnisgröße Y zu erhalten. Hierbei ist die Meßgröße X_1 z.B. der Ausgabe der Meßeinrichtung zuzuordnen. Sie ist, für sich betrachtet, frei von der systematischen Meßabweichung zu denken. Deren Einfluß im Hinblick auf die interessierende Meßgröße Y wird im Modell durch die Einflußgröße X_2 berichtigt. Muß der ausgegebene Wert der Meßeinrichtung noch mit einem Kalibrierfaktor multipliziert werden, so ist dieser Kalibrierfaktor als eine weitere Eingangsgröße X_3 aufzufassen. Die Modellgleichung lautet dann $Y = G(X_1, X_2, X_3) = X_1 X_3 - X_2$.

BEISPIEL 2:

Die Aktivität $Y = A$ einer radioaktiven Probe soll gemessen werden. Sie hängt ab von der Anzahl $X_1 = N$ der im Zähler während der Meßdauer $X_2 = T$ nachgewiesenen Zerfallsereignisse, der Nachweiswahrscheinlichkeit $X_3 = \epsilon$ für ein solches Ereignis und der Totzeit $X_4 = \tau$ des Zählers. Das Modell der Auswertung lautet in diesem Fall

$$Y = A = G(X_1, X_2, X_3, X_4) = \frac{N}{(T - N\tau)\epsilon} = \frac{X_1}{(X_2 - X_1 X_4) X_3} \quad (5)$$

BEISPIEL 3:

Die Meßgröße Y sei aus der nicht geschlossen nach Y auflösbaren Gleichung $Y = \arctan(X_1 + Y)$ zu ermitteln. Dies kann iterativ geschehen, beginnend mit der Näherung $Y = 0$. Dreimalige Iteration führt auf die Modellgleichung

$$Y = G(X_1, X_2) = \arctan(X_1 + \arctan(X_1 + \arctan(X_1))) + X_2 \quad (6)$$

Die Größe X_2 berichtigt nach Gleichung (4) die durch das erste Glied dargestellte Näherung. Es gilt $X_1 = h(Y) = \tan Y - Y$. Hier ist $h(Y)$ die Umkehrfunktion der Funktion $H(X_1)$, die in der Modellgleichung $Y = H(X_1)$ formal das Ergebnis der fortgesetzten Iteration darstellt. Also ist $dH/dX_1 = (dh/dY)^{-1} = (X_1 + Y)^{-2}$.

BEISPIEL 4:

Den m gemessenen Anzeigen X_k (Eingangsgrößen) eines Thermometers bei den eingestellten, als exakt angenommenen Referenz-Temperaturen t_k soll eine Kalibriergerade $t(X) = Y_1 + Y_2 X$ nach der Gaußschen Methode der kleinsten Quadrate angepaßt werden, damit aus einer Anzeige X bei späterer Anwendung des Thermometers die dann vorliegende Temperatur t leicht berechnet werden kann. Für die $n = 2$ Parameter Y_1 und Y_2 (Ergebnisgrößen) der Kalibriergeraden folgen, wenn die Summe $\sum (t(X_k) - t_k)^2$ der Quadrate der Temperatur-Meßabweichungen minimiert wird, die Modellfunktionen

$$\begin{aligned} Y_1 &= G_1(X_1, \dots, X_m) = (\sum t_k \sum X_k^2 - \sum t_k X_k \sum X_k) / D ; \\ Y_2 &= G_2(X_1, \dots, X_m) = (m \sum t_k X_k - \sum t_k \sum X_k) / D ; \quad D = m \sum X_k^2 - (\sum X_k)^2 , \end{aligned} \quad (7)$$

wobei alle Summen von $k = 1$ bis m laufen. Die Ableitungen lauten

$$\begin{aligned} \partial G_1 / \partial X_j &= (2X_j \sum t_k - \sum t_k X_k - t_j \sum X_k - 2Y_1 \cdot (m X_j - \sum X_k)) / D ; \\ \partial G_2 / \partial X_j &= (m t_j - \sum t_k - 2Y_2 \cdot (m X_j - \sum X_k)) / D . \end{aligned} \quad (8)$$

Die Referenz-Temperaturen sind als zusätzliche Eingangsgrößen anzusehen, wenn ihre Unsicherheit berücksichtigt werden muß. Dann gelten

$$\partial G_1 / \partial t_j = (\sum X_k^2 - X_j \sum X_k) / D ; \quad \partial G_2 / \partial t_j = (m X_j - \sum X_k) / D . \quad (9)$$

5.4 Verallgemeinerte mathematische Formulierung des Modells

Die Eingangsgrößen X_k und die Ergebnisgrößen Y_i sowie ihre Schätzwerte x_k bzw. y_i werden jeweils in *Spaltenmatrizen* zusammengefaßt (und aus Platzgründen als transponierte *Zeilenmatrizen* geschrieben, siehe Anhang C):

$$\mathbf{X} = (X_1 \dots X_m)^T ; \quad \mathbf{x} = (x_1 \dots x_m)^T ; \quad \mathbf{Y} = (Y_1 \dots Y_n)^T ; \quad \mathbf{y} = (y_1 \dots y_n)^T . \quad (10)$$

Ein zu bearbeitendes Auswertungsproblem wird allgemein durch n_F Gleichungen $F_j(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = 0$ ($j = 1, \dots, n_F$) beschrieben. Sie erfassen die gegenseitige Abhängigkeit der in den Spaltenmatrizen $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ zusammengefaßten Eingangs- und Ergebnisgrößen in impliziter Weise. Die Funktionen F_j werden ebenfalls durch eine Spaltenmatrix $\mathbf{F} = (F_1 \dots F_{n_F})^T$ dargestellt. Die Matrixgleichung

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{O} \quad (11)$$

enthält dann alle mathematischen Beziehungen des Problems. Sie wird *Modell (der Auswertung)* genannt (siehe 3.4). (Die Spaltenmatrix O ist eine *Nullmatrix**, siehe Anhang C.) Die Ergebnisdaten y errechnen sich aus den Eingangsdaten x über die Gleichung $F(x, y) = O$. Es muß $n_F \geq n$ sein. Nur Modelle dieser Art werden in dieser Norm behandelt. Anderenfalls ist das Auswertungsproblem unterbestimmt und besitzt im allgemeinen keine eindeutige Lösung.

Die Matrizen der partiellen Ableitungen des Modells F nach X und Y mit eingesetzten Größenwerten x und y werden mit F_x bzw. F_y bezeichnet ((n_F, m) - bzw. (n_F, n) -Matrix, Beispiel siehe A.2):

$$F_x = \left(\frac{\partial F_j}{\partial X_k} \right)_{x,y} ; \quad F_y = \left(\frac{\partial F_j}{\partial Y_k} \right)_{x,y} ; \quad (j = 1, \dots, n_F ; k = 1, \dots, m \text{ bzw. } n) . \quad (12)$$

Eine Hauptrolle bei der Fortpflanzung von Unsicherheiten spielt das Matrixprodukt $Q = -F_y^{-1} F_x$, die *Empfindlichkeitsmatrix* (siehe 7.2).

Oft ist es möglich und dann zweckmäßig, obwohl nicht unbedingt erforderlich, das Modell in einer nach Y aufgelösten Form $F(X, Y) = Y - G(X) = O$ oder

$$Y = G(X) \quad (13)$$

explizit anzugeben, wobei $G = (G_1 \dots G_n)^T$ ebenfalls eine Spaltenmatrix mit den $n_F = n$ Elementen $G_i(X)$ ist. Es liegt dann der Fall nach 5.3 vor. Gleichung (13) kann formal auch als der Lösungsalgorithmus der Auswertung, z.B. für Gleichung (11) aufgefaßt werden. Die partiellen Ableitungen nach Gleichung (2) werden als Matrix $G_x = (\partial G_i / \partial x_k)$ zusammengefaßt (Beispiel siehe A.6). Mit den Gleichungen (12) und (13) sind dann $F_x = -G_x$ und $F_y = E$, so daß $Q = G_x$ (E ist die *Einheitsmatrix**, siehe Anhang C).

BEISPIEL 1:

Soll die Dichte ρ eines Körpers aus seiner Masse M und seinem Volumen V (unter Vernachlässigung von Einflußgrößen) ermittelt werden, so sind die Meßgrößen M und V die Eingangsgrößen X_1 und X_2 , und die interessierende Meßgröße ρ ist die Ergebnisgröße Y . Es sind $m = 2$ und $n = 1$. Die Beziehung $\rho = G(M, V) = M/V$ ist das Modell der Auswertung: $Y = G(X_1, X_2) = X_1/X_2$. Es kann auch in der Form $F(M, V, \rho) = \rho - M/V = 0$ geschrieben werden, wobei $n_F = n = 1$. Ziel ist es, aus vorliegenden Meßdaten und anderen Daten das Meßergebnis für die Dichte $Y = \rho$ zu gewinnen und deren Unsicherheit aus den Unsicherheiten von M und V zu berechnen. Die Ableitungen sind $\partial F / \partial M = -\partial G / \partial M = -1/V$; $\partial F / \partial V = -\partial G / \partial V = M/V^2$; $\partial F / \partial \rho = 1$. Daraus ergeben sich nach Gleichung (12) die (1,2)-Matrix $F_x = -G_x = (-1/V \ M/V^2)$ und die (1,1)-Matrix $F_y = (1)$. In F_x sind dann noch die Schätzwerte der Größen einzusetzen.

BEISPIEL 2:

Hängen die Ergebnisgrößen Y linear von den Eingangsgrößen X ab, d.h. gilt mit der konstanten Matrix A und Spaltenmatrix b das Modell $Y = G(X) = AX + b$, so sind $G_x = A$; $F_x = -A$ und $F_y = E$.

BEISPIEL 3:

Sollen die Amplitude $Y_1 = A$ und die Phasenkonstante $Y_2 = \varphi$ ($n = 2$ Ergebnisgrößen) einer Schwingung $X(t) = A \sin(\omega t + \varphi)$ mit bekannter Kreisfrequenz ω aus m zu den Zeitpunkten t_j gemessenen Auslenkungen $X_j = X(t_j)$ (Eingangsgrößen) berechnet werden, so lauten die Modellfunktionen mit $n_F = m$

$$F_j = X_j - Y_1 \sin(\omega t_j + Y_2) = 0 ; \quad (j = 1, \dots, m) . \quad (14)$$

Es ist $F_x = E$, und F_y ist die $(m, 2)$ -Matrix

$$F_y = \begin{pmatrix} -\sin(\omega t_1 + y_2) & -y_1 \cos(\omega t_1 + y_2) \\ \vdots & \vdots \\ -\sin(\omega t_m + y_2) & -y_1 \cos(\omega t_m + y_2) \end{pmatrix} . \quad (15)$$

Ist auch die Kreisfrequenz zu ermitteln, so ist $Y_3 = \omega$ zu setzen. Die Zeiten t_j sind als zusätzliche Eingangsgrößen anzusehen, wenn die Unsicherheit der Zeitmessung berücksichtigt werden muß. Dann ist $x = (x_1 \dots x_m \ t_1 \dots t_m)^T$, und F_x besteht aus E und einer angefügten Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $d_j = -\omega y_1 \cos(\omega t_j + y_2)$.

6 Vorbereitung der Eingangsdaten

6.1 Individuelle und gemeinsame Komponenten der Meßunsicherheit, Meßunsicherheitsmatrix

Zur Berechnung des vollständigen Meßergebnisses für die interessierenden Ergebnisgrößen mit Hilfe des Modells werden Schätzwerte x_i der beteiligten Eingangsgrößen X_i , die entweder direkt gemessen wurden oder über die andere

Informationen für die Auswertung, z.B. vollständige Meßergebnisse aus vorangegangenen Auswertungen, herangezogen werden, sowie auch die zugehörigen Unsicherheiten benötigt. Und zwar nicht nur die *Meßunsicherheiten** $u(x_i)$ (*individuelle Komponenten der Meßunsicherheit*, siehe 3.5) der einzelnen Eingangsgrößen, sondern auch deren *gemeinsame Komponenten* $u(x_i, x_k)$ der *Meßunsicherheit* (siehe 3.7), wenn die Eingangsgrößen — genauer die ihnen zugeordneten Schätzer (siehe 5.2) — *korreliert** sind.

Als Maß für die Meßunsicherheiten $u(x_i)$ der Eingangsgrößen X_i werden (*empirische*) *Varianzen** (der zugeordneten Schätzer) herangezogen [1]:

$$u^2(x_i) = s^2(x_i) , \quad (16)$$

alternativ und anschaulicher auch *Standardabweichungen**, d.h. die (positiven) Quadratwurzeln der Varianzen,

$$u(x_i) = s(x_i) \quad (17)$$

oder *relative Standardabweichungen (Variationskoeffizienten*)*

$$u_{\text{rel}}(x_i) = u(x_i)/|x_i| = s(x_i)/|x_i| ; \quad (x_i \neq 0) . \quad (18)$$

$u(x_i)$ nach Gleichung (17) ist die *Standardmeßunsicherheit*, $u_{\text{rel}}(x_i)$ nach Gleichung (18) die *relative Standardmeßunsicherheit* (siehe 3.6). Für die gemeinsamen Komponenten der Meßunsicherheit werden (*empirische*) *Kovarianzen**

$$u(x_i, x_k) = s(x_i, x_k) ; \quad (i \neq k) \quad (19)$$

oder alternativ (*empirische*) *Korrelationskoeffizienten** benutzt:

$$r(x_i, x_k) = \frac{u(x_i, x_k)}{u(x_i)u(x_k)} = \frac{s(x_i, x_k)}{s(x_i)s(x_k)} . \quad (20)$$

Sie werden nur für $i < k$ benötigt. Es gelten die Beziehungen

$$\begin{aligned} u(x_i, x_i) &= u^2(x_i) ; & u(x_k, x_i) &= u(x_i, x_k) ; & u^2(x_i, x_k) &\leq u(x_i)u(x_k) ; \\ r(x_i, x_i) &= 1 ; & r(x_k, x_i) &= r(x_i, x_k) ; & |r(x_i, x_k)| &\leq 1 . \end{aligned} \quad (21)$$

In vielen Fällen ist es zweckmäßig, die individuellen und gemeinsamen Komponenten der Meßunsicherheit zu einer *Meßunsicherheitsmatrix* (siehe 3.8) wie folgt zusammenzufassen:

$$U_x = (u(x_i, x_k)) = \begin{pmatrix} u^2(x_1) & u(x_1, x_2) & \dots & u(x_1, x_m) \\ u(x_2, x_1) & u^2(x_2) & \dots & u(x_2, x_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(x_m, x_1) & u(x_m, x_2) & \dots & u^2(x_m) \end{pmatrix} . \quad (22)$$

In der Hauptdiagonale stehen die Quadrate der Standardmeßunsicherheiten. Die Meßunsicherheitsmatrix ist eine *symmetrische Matrix**.

Auf ähnliche Weise wird die ebenfalls symmetrische *Korrelationsmatrix* aus den Korrelationskoeffizienten gebildet:

$$R_x = (r(x_i, x_k)) = \begin{pmatrix} 1 & r(x_1, x_2) & \dots & r(x_1, x_m) \\ r(x_2, x_1) & 1 & \dots & r(x_2, x_m) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r(x_m, x_1) & r(x_m, x_2) & \dots & 1 \end{pmatrix} . \quad (23)$$

Die Meßunsicherheit einer Ergebnisgröße Y_i wird entsprechend als Varianz mit $u^2(y_i)$, als Standardmeßunsicherheit mit $u(y_i)$ und als *relative Standardmeßunsicherheit* mit $u_{\text{rel}}(y_i)$ bezeichnet, die gemeinsame Komponente der Meßunsicherheit zweier Ergebnisgrößen Y_i und Y_k mit $u(y_i, y_k)$ und deren Korrelationskoeffizient mit $r(y_i, y_k)$. Die Unsicherheitsmatrix U_y und die Korrelationsmatrix R_y mehrerer Ergebnisgrößen werden entsprechend Gleichung (22) bzw. Gleichung (23) gebildet.

Die Schätzwerte x_i der Eingangsgrößen X_i und die zugehörigen Unsicherheiten sind im zweiten Schritt der Meßdatenauswertung empirisch nach mathematischen Ausdrücken anzusetzen, die in 6.2 bis 6.6 angegeben werden. Bei diesen Ausdrücken handelt es sich um Beispiele. Sie dürfen je nach den vorliegenden Informationen sinngemäß verändert werden. Bei allem Bemühen sind sinnvolle empirische Ansätze jedoch mitunter nicht frei von subjektiver

Erfahrung. Das ist unvermeidlich, vernünftig und tragbar, solange zusätzliche Informationen nicht vorliegen oder nur mit unverhältnismäßig hohem Aufwand gewonnen werden können.

Vollständige Meßergebnisse früherer Auswertungen lassen sich unmittelbar benutzen, wenn sie in der oben beschriebenen Form ausgedrückt sind.

6.2 Mehrmals gemessene Größen

Werden einige Eingangsgrößen X_i in unabhängigen Versuchen N_i -mal direkt gemessen, wobei dieselben genau festgelegten Versuchsbedingungen so weit wie möglich eingehalten werden, und ergibt sich für X_i dabei im j -ten Versuch der Meßwert v_{ij} ($j = 1, \dots, N_i$; $N_i > 1$), so werden als Schätzwerte x_i dieser Meßgrößen X_i jeweils die (*arithmetischen*) Mittelwerte* $\bar{v}_i$ der Meßwerte sowie als Meßunsicherheiten $u^2(x_i)$ der Meßgrößen die Varianzen dieser Mittelwerte angesetzt:

$$x_i = \bar{v}_i = \frac{1}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} v_{ij} ; \quad (24)$$

$$u^2(x_i) = s^2(\bar{v}_i) = s_i^2/N_i ; \quad s_i^2 = \frac{1}{(N_i - 1)} \sum_{j=1}^{N_i} (v_{ij} - \bar{v}_i)^2 . \quad (25)$$

Die s_i sind die empirischen Standardabweichungen der Verteilungen der Meßwerte der Eingangsgrößen. Bei nur wenigen Messungen siehe auch 6.3.

Werden einige Eingangsgrößen X_i in jedem einzelnen von N unabhängigen Versuchen *d e s s e l b e n* Experiments *g e m e i n s a m* gemessen (siehe auch Beispiel in A.6), so ist in den Gleichungen (24) und (25) $N_i = N$ zu setzen ($N > 1$). Außerdem sind die gemeinsamen Komponenten der Meßunsicherheit als Kovarianzen der Mittelwerte sowie — wenn in den Abschnitten 7 und 8 erforderlich — als Korrelationskoeffizienten wie folgt zu berechnen ($i < k$):

$$u(x_i, x_k) = s(\bar{v}_i, \bar{v}_k) = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{j=1}^N (v_{ij} - \bar{v}_i)(v_{kj} - \bar{v}_k) ; \quad (26)$$

$$r(x_i, x_k) = \frac{u(x_i, x_k)}{u(x_i)u(x_k)} . \quad (27)$$

6.3 Einzelwerte oder wenige Werte

Liegt für manche Eingangsgrößen X_i nur je ein einzelner Wert vor ($N_i = 1$), z.B. ein Meßwert, ein Wert aus der Literatur, eine bekannte systematische Meßabweichung oder eine *Korrektur**, so ist dieser als Schätzwert x_i zu verwenden. Die Unsicherheit ist dann aus den verfügbaren Informationen oder nach der Erfahrung z.B. wie folgt anzusetzen:

Sind die individuellen Komponenten $u^2(x_{i0})$ und gemeinsamen Komponenten $u(x_{i0}, x_{k0})$ der Meßunsicherheit aus N_{i0} früheren, unter vergleichbaren Versuchsbedingungen mehrmals ausgeführten Messungen derselben oder vergleichbarer Größen nach 6.2 bekannt, so sind im Fall weniger Messungen ($1 \leq N_i < N_{i0}$) der Eingangsgrößen X_i

$$u^2(x_i) = u^2(x_{i0}) \cdot N_{i0}/N_i ; \quad u(x_i, x_k) = u(x_{i0}, x_{k0}) \cdot N_{i0}/N_i \quad (28)$$

zu benutzen.

Sind stattdessen die relativen Standardmeßunsicherheiten $u_{\text{rel}}(x_{i0})$ und Korrelationskoeffizienten $r(x_{i0}, x_{k0})$ aus jenen früheren Messungen bekannt und wird angenommen, daß sie auch für die gegenwärtigen Messungen bei von x_{i0} abweichenden Werten x_i noch gelten, so sind sie wie folgt zu verwenden:

$$u(x_i) = |x_i| u_{\text{rel}}(x_{i0}) \sqrt{N_{i0}/N_i} ; \quad r(x_i, x_k) = r(x_{i0}, x_{k0}) . \quad (29)$$

Sind empirische Standardabweichungen s_{i0} der Verteilungen der Meßwerte der Eingangsgrößen bekannt, so darf auch

$$u(x_i) = s_{i0}/\sqrt{N_i} \quad (30)$$

verwendet werden.

6.4 Zählraten

Werden mehrere *Zählraten* X_i , wie bei Kernstrahlungsmessungen üblich, durch *Zählen** eingetretener gleichartiger Ereignisse einmal gemessen und werden dabei jeweils N_i dieser Ereignisse (z.B. durch Alphateilchen ausgelöste Impulse) während der Meßdauer t_i registriert, so sind anzusetzen:

$$x_i = N_i/t_i ; \quad u^2(x_i) = N_i/t_i^2 . \quad (31)$$

Hier ist angenommen, daß die Ereignisse unabhängig voneinander eintreten und die Anzahlen der Ereignisse daher *Poisson-Verteilungen** gehorchen. In den meisten Fällen einer einmaligen, aber gemeinsamen zählenden Messung mehrerer Zählraten (z.B. bei der Vielkanalanalyse) dürfen deshalb auch gemeinsame Komponenten $u(x_i, x_k) = 0$ der Meßunsicherheit angesetzt werden (siehe auch 6.6).

ANMERKUNG: Der Fall $N_i = 0$ ergibt $u(x_i) = 0$. Das ist unrealistisch, weil die Meßunsicherheit bei endlicher Meßdauer t_i keineswegs verschwindet, nur weil zufällig kein Ereignis registriert wird. Dieser Fall kann auch bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate nach 8.1 oder in Gleichung (A.25), wenn durch $u^2(x_i)$ zu dividieren ist, auf eine Division durch Null führen. Diese Schwierigkeit kann, wenn die Meßgröße positiv ist, durch Wahl einer ausreichend langen Meßdauer oder bei der Vielkanalanalyse durch geeignetes Zusammenfassen von Kanälen vermieden werden.

6.5 Einflußgrößen

Meist können lediglich eine untere Grenze a_i und eine obere Grenze b_i für die m ö g l i c h e n Werte einer Eingangsgröße X_i , z.B. einer *Einflußgröße**, gemessen oder abgeschätzt werden. Dann lautet der Ansatz

$$x_i = (a_i + b_i)/2 ; \quad u^2(x_i) = (b_i - a_i)^2/12 \quad (32)$$

(Zu gemeinsamen Komponenten der Meßunsicherheit siehe 6.6). Diese Ausdrücke sind ebenso zu verwenden, wenn keinerlei Information über eine während der Messung mögliche oder tatsächliche Änderung einer Einflußgröße in ihren Grenzen vorliegt. Die Ansätze nach Gleichung (32) entsprechen einer *Rechteckverteilung** des Schätzers für die Einflußgröße zwischen den Grenzen.

Andere Ansätze:

- Schwingt die Einflußgröße bekanntermaßen zwischen den Grenzen sinusförmig in der Zeit mit einer Schwingungsdauer, die klein ist gegen die Meßdauer, so ist in Gleichung (32) der Nenner 12 durch den Nenner 8 zu ersetzen.
- Können bei einer sich zeitlich zufällig ändernden Einflußgröße X der zeitliche Mittelwert $\bar{v} = \overline{v(t)}$ und Effektivwert v_{eff} gemessen werden, so gelten die Ansätze

$$x = \bar{v} ; \quad u^2(x) = v_{\text{eff}}^2 - \bar{v}^2 ; \quad v_{\text{eff}} = \sqrt{\overline{v^2(t)}} . \quad (33)$$

- Liegt für eine aus physikalischen Gründen nicht negative Einflußgröße X lediglich ein Schätzwert $x > 0$ vor, so ist $u(x) = x$ anzunehmen.
- Wird eine systematische Meßabweichung über eine Größe $X = a(1 - \cos Z) \approx aZ^2/2$ durch eine Einflußgröße Z , beispielsweise einen Winkel, mit $|Z| \leq b \ll 1$ bewirkt, so sind

$$x = ab^2/6 ; \quad u^2(x) = a^2b^4/45 \quad (34)$$

zu benutzen.

BEISPIEL 1:

Beispiele unterer und oberer Grenzen sind:

- gemessene Grenzen, z.B. einer Einflußtemperatur, die mittels eines Maximum-Minimum-Thermometers gemessen werden,
- bekannte Grenzen einer durch Rundung verursachten Abweichung (siehe Beispiel 2),
- geschätzte Grenzen für ein vernachlässigtes Restglied einer Reihenentwicklung, z.B. einer Taylor-Reihe für eine Modellfunktion,
- Grenzen für die Meßabweichung einer anzeigenden Meßeinrichtung, die sich z.B. aus den Angaben des Herstellers oder eines Zertifikats ergeben können.

BEISPIEL 2:

Ist der Wert v einer Größe X gegeben und bekannt, daß er aufgerundet worden ist, und ist 10^p der Stellenwert der letzten signifikanten Ziffer von v (p ist eine ganze Zahl), so sind die Grenzen der durch die Rundung verursachten