

Spezielle Funktionen der mathematischen Physik

Zeichen und Begriffe

DIN
13 301

Special functions of mathematical physics; Symbols and concepts

In dieser Norm werden Zeichen und Begriffe von speziellen Funktionen der mathematischen Physik – im folgenden kurz spezielle Funktionen genannt – aufgeführt, die häufig in Physik und Technik Anwendung finden.

Die Abschnitte 2 bis 4 enthalten Funktionen, die im Zusammenhang mit speziellen Funktionen als notwendige Grundlage benötigt werden, aber über die bekannten (elementaren) Funktionen wie Exponential-, Logarithmus-, Hyperbelfunktionen und trigonometrische Funktionen hinausgehen. Natürlich haben diese Funktionen – etwa Riemannsche Zetafunktion oder die elliptischen Funktionen – auch für sich selbst Bedeutung.

Die Funktionen aus den Abschnitten 5 bis 7 und 9 bis 11 sind Lösungen von homogenen linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die bei der Separation von partiellen Differentialgleichungen entstehen, z. B. der Laplace-Gleichung in verschiedenen orthogonalen Koordinatensystemen.

Die Abschnitte 5 bis 7 und die Nummern 9.1 bis 9.6 umfassen die hypergeometrischen Funktionen mit ihren Grenzfällen und konfluenten Formen, die man auch zu den einfachen speziellen Funktionen rechnet. Für diese gelten Rekursionsformeln und Differenzen-Differentialgleichungen mit Koeffizienten, die aus rationalen Funktionen der Parameter gebildet werden. Ferner können sie durch Integrale mittels elementarer Funktionen wie Potenzfunktion, Exponentialfunktion, sin, cos usw. dargestellt werden.

Keine dieser Eigenschaften bleibt gültig für die Sphäroidfunktionen, die Mathieu-Funktionen sowie die Lamé-Polynome, wodurch deren Beschreibung und Theorie komplizierter wird. Man rechnet sie auch zu den höheren speziellen Funktionen. Aus diesen werden die Funktionen in den Nummern 9.7 bis 9.12 und in den Abschnitten 10 und 11 herausgegriffen, weil sie eingehend untersucht sind und in Anwendungen auftreten.

Die vorliegende Norm entspricht mit Ausnahme von Nr 3.2 und 7.2 der Internationalen Norm ISO 31/11 : 1978, Abschnitt 11, führt aber darüber hinaus.

Bezüglich der Standardmengen von Zahlen und der Zeichen der Mengenlehre siehe DIN 5473. Man beachte $0 \in \mathbb{N}$. Die Menge der von 0 verschiedenen natürlichen Zahlen wird mit $\mathbb{N}^*$ bezeichnet. Außer in Nr 4.7 ist n immer eine natürliche Zahl, im Zusammenhang mit Summationen gelegentlich eine ganze Zahl.

Bezüglich der Variablen wird vereinbart:

$$x, y \in \mathbb{R}, z = x + iy \in \mathbb{C}, w \in \mathbb{C}.$$

Soweit es praktikabel ist, wird zwischen Funktion und Funktionswert unterschieden. Siehe DIN 1302/08.80, Anmerkungen zu Nr 10.2 und 10.3.

Inhalt

	Seite		Seite
1 Allgemeines	2	7 Orthogonale Polynome und verwandte Funktionen	10
2 Gammafunktion und verwandte Funktionen	3	8 Orthogonalitätseigenschaft und erzeugende Funktion der orthogonalen Polynome im reellen Fall	13
3 Exponentialintegral und verwandte Funktionen, Fehlerfunktion, Fresnelsche Integrale, Riemannsche Zetafunktion	4	9 Kugelfunktionen und Sphäroidfunktionen	14
4 Elliptische Integrale, elliptische Funktionen und verwandte Funktionen	6	10 Mathieu-Funktionen	15
5 Zylinderfunktionen und verwandte Funktionen	8	11 Lamé-Polynome	19
6 Hypergeometrische und verwandte Funktionen ...	10	Anmerkungen	20

Fortsetzung Seite 2 bis 24

Normenausschuß Einheiten und Formelgrößen (AEF) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V.

1 Allgemeines

In diesem Abschnitt werden einige Zeichen eingeführt, die in der Theorie der speziellen Funktionen gebraucht werden, aber in DIN 1302 nicht oder abweichend erklärt sind.

Tabelle 1

Nr	Zeichen	Benennung	Definition	Bemerkungen
1.1	C	Eulersche Konstante, oft auch Euler-Mascheronische Konstante genannt	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right) = 0,577\,215\,664\,901\,532\dots$	In der englischsprachigen Literatur wird zumeist γ anstelle C benutzt, während in der deutschsprachigen Literatur gelegentlich $\gamma = e^C$ verwendet wird.
1.2	G	Catalansche Konstante	$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2} = 0,915\,965\,594\,177\,219\dots$	Es gilt $2G = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x}{\sin x} dx = \int_0^1 K(k) dk$ Siehe Nr 4.4
1.3	B_n	Bernoullische Zahlen	$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$	$B_{2n} \neq 0$, $B_{2n+1} = 0$ mit Ausnahme von $B_1 = -\frac{1}{2}$. Gelegentlich werden die Bernoullischen Zahlen auch anders definiert.
1.4	E_n	Eulersche Zahlen	$\frac{1}{\cosh z} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{z^n}{n!}$	$E_{2n} \neq 0$, $E_{2n+1} = 0$. Gelegentlich werden die Eulerschen Zahlen auch anders definiert.
1.5	$(a)_n$	Pochhammer-Symbol, gelegentlich auch Faktorielle genannt	$a(a+1) \cdot \dots \cdot (a+n-1)$ für $n \geq 1$ 1 für $n = 0$ mit $a \in \mathbb{C}$	Dieses Symbol kollidiert mit dem Symbol $(x)_s$ aus DIN 1302/08.80, Nr 3.9, welches dort im Sinne von Nr 1.6 erklärt ist. Siehe Anmerkungen zu Nr 2.1
1.6	$a^{(n)}$	Faktorielle (verallgemeinerte Potenz) n -ter Ordnung	$a(a-1) \cdot \dots \cdot (a-n+1)$ für $n \geq 1$ 1 für $n = 0$ mit $a \in \mathbb{C}$	Die Funktion $x^{(n)}$ spielt in der Differenzenrechnung eine große Rolle. Mit $\Delta y(x) = y(x+1) - y(x)$ gilt $\Delta x^{(n)} = (x+1)^{(n)} - x^{(n)} = n x^{(n-1)}$. Die Analogie zur Ableitung der Potenzfunktion ist nicht zu übersehen. Ergänzend definiert man für $a \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, $n \geq 1$, $a^{(-n)} = \frac{1}{a(a+1) \cdot \dots \cdot (a+n-1)}$
1.7	$\int_a^b f(x) dx$	Cauchyscher Hauptwert	$\lim_{\delta \rightarrow +0} \left(\int_a^{c-\delta} f(x) dx + \int_{c+\delta}^b f(x) dx \right)$ mit $a < c < b$	Auch in Gebrauch sind die Bezeichnungen $\text{HW} \int_a^b f(x) dx, \oint_a^b f(x) dx, \text{vp} \int_a^b f(x) dx.$

(fortgesetzt)

Tabelle 1 (abgeschlossen)

Nr	Zeichen	Benennung	Definition	Bemerkungen
1.8	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$	Cauchyscher Hauptwert	$\lim_{a \rightarrow -\infty, -a} \int_a^a f(x) dx$	Auch in Gebrauch sind die Bezeichnungen $\text{HW} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \oint_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \text{vp} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx.$

2 Gammafunktion und verwandte Funktionen

Die Integrationswege sind aus Konvergenz- und Eindeutigkeitsgründen geeignet zu wählen. Für alle verzweigten Funktionen ist der Hauptwert zu nehmen. Zu Einzelheiten wird auf die Literatur verwiesen.

Tabelle 2

Nr	Zeichen	Benennung	Definition	Bemerkungen
2.1	$\Gamma(z)$	Gammafunktion Eulersches Integral 2. Art	$\int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ $\text{Re } z > 0$	Γ ist eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion mit einfachen Polen in 0 und den negativen ganzen Zahlen. Es gilt $\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ Siehe Anmerkungen.
2.2	$\Gamma(a, z)$	unvollständige Gammafunktion	$\int_z^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt$ $a \in \mathbb{C}$	$\gamma(a, z) = \Gamma(a) - \Gamma(a, z)$ Die unvollständige Gammafunktion $\Gamma(a, z)$ hängt für spezielle feste Werte von a und variables z mit vielen Funktionen des Abschnitts 3 eng zusammen.
2.3	$\gamma(a, z)$		$\int_0^z e^{-t} t^{a-1} dt$ $a \in \mathbb{C}$ $\text{Re } a > 0$	
2.4	$\Psi(z)$	Psfunktion	$\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z)$	Gelegentlich wird $\Psi(z)$ auch für die logarithmische Ableitung von $z!$ verwendet.
2.5	$B(z, w)$	Betafunktion Eulersches Integral 1. Art	$\int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{w-1} dt$ $\text{Re } z > 0, \text{ Re } w > 0$	$B(z, w) = \frac{\Gamma(z) \Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$

3 Exponentialintegral und verwandte Funktionen, Fehlerfunktion, Fresnelsche Integrale, Riemannsche Zetafunktion

Die Integrationswege sind aus Konvergenz- und Eindeutigkeitsgründen geeignet zu wählen. Für alle verzweigten Funktionen ist der Hauptwert zu nehmen. Zu Einzelheiten wird auf die Literatur verwiesen.

Tabelle 3

Nr	Zeichen	Benennung	Definition	Bemerkungen
3.1	$E_1(z)$	Exponentialintegral	$\int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt$	E_1 ist eine in der längs $(-\infty, 0]$ aufgeschnittenen komplexen Ebene holomorphe Funktion. $E_1(z) = -\mathbf{C} - \ln z - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-z)^k}{k \cdot k!}$ Für $\operatorname{Re} z > 0$ gilt die Darstellung $E_1(z) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-zt}}{t} dt$, welche für $n \in \mathbb{N}^*$ die Verallgemeinerung $E_n(z) = \int_1^{\infty} \frac{e^{-zt}}{t^n} dt$ zuläßt.
3.2	$Ei(z)$	Exponentialintegral	$\int_{-\infty}^z \frac{e^t}{t} dt$	Ei ist eine in der längs $[0, \infty)$ aufgeschnittenen komplexen Ebene holomorphe Funktion. $Ei(z) = \mathbf{C} + \ln(-z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k \cdot k!} = -E_1(-z)$ $Ei(z)$ ist in ISO 31/11:1978, Abschnitt 11 im Sinne von Nr 3.1 definiert, aber der Gebrauch von $Ei(z)$ in der Literatur ist durchweg der im Sinne von Nr 3.2. Siehe Anmerkungen.
3.3	$li(z)$	Integrallogarithmus	$\int_0^z \frac{dt}{\ln t}$	li ist eine in der längs $(-\infty, 0]$ und $[1, \infty)$ aufgeschnittenen komplexen Ebene holomorphe Funktion. $li(z) = Ei(\ln z) = \mathbf{C} + \ln(-\ln z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln z)^k}{k \cdot k!}$ Siehe Anmerkungen.
3.4	$Si(z)$	Integralsinus	$\int_0^z \frac{\sin t}{t} dt$	Si ist eine ganze Funktion. $\lim_{x \rightarrow \infty} Si(x) = \frac{\pi}{2}$
3.5	$si(z)$	komplementärer Integralsinus	$-\int_z^\infty \frac{\sin t}{t} dt$	$si(z) = -\frac{\pi}{2} + Si(z)$ Der in der Nachrichtentechnik anzutreffende Gebrauch, $\frac{\sin x}{x}$ mit $si(x)$ zu bezeichnen, kollidiert mit der Festlegung in der Definitionsspalte. Dagegen wäre es korrekt, $Si'(x)$ für $\frac{\sin x}{x}$ zu schreiben.

(fortgesetzt)

Tabelle 3 (abgeschlossen)

Nr	Zeichen	Benennung	Definition	Bemerkungen
3.6	Ci(z)	Integralcosinus	$-\int_z^{\infty} \frac{\cos t}{t} dt$	Ci ist eine in der längs $(-\infty, 0]$ aufgeschnittenen komplexen Ebene holomorphe Funktion. $\text{Ci}(z) = C + \ln z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k}}{2k \cdot (2k)!}$
3.7	Shi(z)	hyperbolischer Integralsinus	$\int_0^z \frac{\sinh t}{t} dt$	Shi ist eine ganze Funktion.
3.8	Chi(z)	hyperbolischer Integralcosinus	$-\int_z^{\infty} \frac{\cosh t}{t} dt$	Chi ist eine in der längs $(-\infty, 0]$ aufgeschnittenen komplexen Ebene holomorphe Funktion. $\text{Chi}(z) = C + \ln z + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{2k}}{2k \cdot (2k)!}$
3.9	$\Phi(x)$	Verteilungsfunktion der Normalverteilung (Gauß-Verteilung)	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$	$\Phi'(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}$; siehe DIN 13303 Teil 1/05.92, Nr 2.3.2.
3.10	erf(z)	Fehlerfunktion	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt$	erf ist eine ganze Funktion. $\lim_{x \rightarrow \infty} \text{erf}(x) = 1$ Anstelle erf ist auch die Bezeichnung Erf in Gebrauch.
3.11	erfc(z)	komplementäre Fehlerfunktion	$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} e^{-t^2} dt$	$\text{erfc}(z) = 1 - \text{erf}(z)$ Anstelle erfc ist auch die Bezeichnung Erfc in Gebrauch.
3.12	S(z)	Fresnelsche Integrale	$\int_0^z \sin\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt$	S und C sind ganze Funktionen.
3.13	C(z)		$\int_0^z \cos\left(\frac{\pi}{2} t^2\right) dt$	$\lim_{x \rightarrow \infty} S(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} C(x) = \frac{1}{2}$
3.14	$\zeta(z)$	Riemannsche Zetafunktion	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z}$ Re $z > 1$	Die Riemannsche Zetafunktion läßt sich zu einer in der ganzen komplexen Ebene meromorphen Funktion mit dem einzigen Pol $z = 1$ analytisch fortsetzen. Siehe Anmerkungen. Dasselbe Symbol wird auch für die Weierstraßsche Zetafunktion verwendet. Siehe Nr 4.18.

4 Elliptische Integrale, elliptische Funktionen und verwandte Funktionen

Unter einer elliptischen Funktion versteht man eine doppeltperiodische meromorphe Funktion. Die in den Nummern 4.9, 4.10, 4.11 und 4.17 definierten Funktionen sind elliptische Funktionen.

Bei allen Zeichen in diesem Abschnitt findet man auch eine andere Reihenfolge von Parametern und Variablen. Oft werden die Parameter, wenn sie aus dem Kontext ersichtlich sind, weggelassen, und man geht zu einer Kurzschreibweise über, die nur eine Variable enthält. Zur Verwendung der Kurzschreibweise siehe Anmerkungen zu den Nummern 4.8 bis 4.16.

Tabelle 4

Nr	Zeichen	Benennung	Definition	Bemerkungen
4.1	k	Modul der elliptischen Integrale	$0 < k < 1$	Siehe Anmerkungen.
4.2	k'	komplementärer Modul der elliptischen Integrale	$\sqrt{1 - k^2}$	
4.3	$F(k, \varphi)$	elliptisches Integral 1. Gattung in der Legendreschen Normalform	$\int_0^\varphi \frac{dt}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$	In Nr 4.3, 4.5 und 4.7 ist φ eine reelle Variable.
4.4	$K(k)$	vollständiges elliptisches Integral 1. Gattung in der Legendreschen Normalform	$F\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$	Oft auch nur mit K bezeichnet. $K' = K(k')$
4.5	$E(k, \varphi)$	elliptisches Integral 2. Gattung in der Legendreschen Normalform	$\int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} \, dt$	
4.6	$E(k)$	vollständiges elliptisches Integral 2. Gattung in der Legendreschen Normalform	$E\left(k, \frac{\pi}{2}\right)$	Oft auch nur mit E bezeichnet. $E' = E(k')$
4.7	$\Pi(k, n, \varphi)$	elliptisches Integral 3. Gattung in der Legendreschen Normalform	$\int_0^\varphi \frac{dt}{(1 + n \sin^2 t) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t}}$ $n \in \mathbb{C}$	Für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ erhält man das vollständige elliptische Integral 3. Gattung in der Legendreschen Normalform, für das kein eigenes Zeichen in Gebrauch ist. Siehe Anmerkungen.
4.8	$\operatorname{am}(k, z)$, kurz $\operatorname{am} z$	Amplitude von z	$\varphi = \operatorname{am} z$ ist die Umkehrung von $z = F(k, \varphi)$	Siehe Anmerkungen.

(fortgesetzt)

Tabelle 4 (fortgesetzt)

Nr	Zeichen	Benennung	Definition	Bemerkungen
4.9	$\operatorname{sn}(k, z)$, kurz $\operatorname{sn} z$	Sinus amplitudinis	$\sin \operatorname{am} z$	Die drei Funktionen sn , cn , dn heißen Jacobische elliptische Funktionen. Sie haben die primitiven Perioden $4K$ und $2iK'$, $4K$ und $2K + 2iK'$ bzw. $2K$ und $4iK'$. Siehe Anmerkungen.
4.10	$\operatorname{cn}(k, z)$, kurz $\operatorname{cn} z$	Cosinus amplitudinis	$\cos \operatorname{am} z$	
4.11	$\operatorname{dn}(k, z)$, kurz $\operatorname{dn} z$	Delta amplitudinis	$\sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 z}$ mit $\operatorname{dn} 0 = 1$	
4.12	$\operatorname{zn}(k, z)$, kurz $\operatorname{zn} z$	Jacobische Zetafunktion	$\int_0^z \operatorname{dn}^2 t \, dt - \frac{E}{K} z$	Sie hat die primitive Periode $2K$. Siehe Anmerkungen.
4.13	$\vartheta_1(\tau, z)$, kurz $\vartheta_1(z)$	Jacobische Thetafunktionen	$2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \sin (2n+1)\pi z$ $= i \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^{n+1} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\pi i z}$	In Nr 4.13 bis 4.16 ist $q = e^{i\pi\tau}$ und $ q < 1$. In den Anwendungen ist τ meist rein imaginär, also q reell und positiv. Anstelle ϑ_4 findet man gelegentlich auch das Zeichen ϑ_0 oder einfach ϑ . Siehe Anmerkungen.
4.14	$\vartheta_2(\tau, z)$, kurz $\vartheta_2(z)$		$2 \sum_{n=0}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} \cos (2n+1)\pi z$ $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2} e^{(2n+1)\pi i z}$	
4.15	$\vartheta_3(\tau, z)$, kurz $\vartheta_3(z)$		$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} q^{n^2} \cos 2n\pi z$ $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} q^{n^2} e^{2n\pi i z}$	
4.16	$\vartheta_4(\tau, z)$, kurz $\vartheta_4(z)$		$1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} \cos 2n\pi z$ $= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2n\pi i z}$	

Tabelle 4 (abgeschlossen)

Nr	Zeichen	Benennung	Definition	Bemerkungen
4.17	$\wp(z)$	Weierstraßsche $\wp$ -Funktion	$\frac{1}{z^2} + \sum'_{m,n} \left(\frac{1}{(z-\Omega)^2} - \frac{1}{\Omega^2} \right)$ mit $\Omega = 2m\omega + 2n\omega'$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ sowie $\operatorname{Im} \frac{\omega'}{\omega} > 0$	$\sum'_{m,n}$ bedeutet $\sum_{\substack{m,n \in \mathbb{Z} \\ (m,n) \neq (0,0)}}$ Der Strich am Summenzeichen bedeutet hier und in Nr 4.18, daß der Wert $m = n = 0$ bei der Summation ausgelassen wird. Die Weierstraßsche $\wp$ -Funktion – oft kurz $\wp$ -Funktion genannt – ist eine elliptische Funktion. Will man die Abhängigkeit der $\wp$ -Funktion von den Halbperioden ω, ω' deutlich machen, so schreibt man üblicherweise $\wp(z \omega, \omega')$. Entsprechendes gilt für $\zeta(z)$ und $\sigma(z)$. Siehe Anmerkungen.
4.18	$\zeta(z)$	Weierstraßsche Zetafunktion	$\frac{1}{z} + \sum'_{m,n} \left(\frac{1}{z-\Omega} + \frac{1}{\Omega} + \frac{z}{\Omega^2} \right)$ mit $\Omega = 2m\omega + 2n\omega'$ und $m, n \in \mathbb{Z}$ sowie $\operatorname{Im} \frac{\omega'}{\omega} > 0$	$\zeta'(z) = -\wp(z)$ Siehe Anmerkungen. Dasselbe Symbol wird auch für die Riemannsche Zetafunktion verwendet. Siehe Nr 3.14
4.19	$\sigma(z)$	Weierstraßsche Sigmafunktion	$\frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)} = \zeta(z) \quad \text{mit } \sigma(0) = 0$	Siehe Anmerkungen.

5 Zylinderfunktionen und verwandte Funktionen

Tabelle 5

Nr	Zeichen	Benennung	Definition	Bemerkungen
5.1	$J_\nu(z)$	Bessel-Funktionen Zylinderfunktionen 1. Art	$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{\nu + 2k} \quad \nu \in \mathbb{C}$	J_ν ist Lösung der Besselschen Differentialgleichung $z^2 w'' + z w' + (z^2 - \nu^2) w = 0$. Gleiches gilt für die Funktionen in Nr 5.2 und Nr 5.3.
5.2	$N_\nu(z)$	Neumann-Funktionen Zylinderfunktionen 2. Art	$\frac{J_\nu(z) \cos \nu \pi - J_{-\nu}(z)}{\sin \nu \pi} \quad \nu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$	Anstelle N_ν ist auch die Bezeichnung Y_ν in Gebrauch. Für $\nu = n$ siehe Anmerkungen.
5.3	$H_\nu^{(1)}(z)$ $H_\nu^{(2)}(z)$	Hankelfunktionen 1. und 2. Art Zylinderfunktionen 3. Art	$J_\nu(z) + i N_\nu(z)$ $J_\nu(z) - i N_\nu(z)$	Siehe Anmerkungen.

(fortgesetzt)