

Mathematische Strukturen

Zeichen und Begriffe

DIN
13 302

Mathematical structures; signs, symbols and concepts

<i>Inhalt</i>		Seite
1	Verknüpfungen und Relationen	2
2	Strukturen mit genau einer Trägermenge	6
3	Halbgruppen und Gruppen	9
4	Ringe und Körper	12
5	Verbände	14
6	Ordnungsstrukturen	16
7	Moduln und Vektorräume	19
8	Geometrische Strukturen	22
9	Topologische Strukturen	24
10	Kategorien	28

In dieser Norm werden verschiedene Arten von mathematischen Strukturen besprochen. Die Norm fußt auf den Normen DIN 5474 „Zeichen der mathematischen Logik“ und DIN 5473 „Zeichen und Begriffe der Mengenlehre; Mengen, Relationen, Funktionen“, auf die verwiesen wird. Aus Gründen der besseren Lesbarkeit sind einige Begriffe aus DIN 5473 wiederholt worden.

In Abschnitt 1 werden Verknüpfungen und Relationen betrachtet, die für Strukturen eine konstituierende Rolle spielen. Die einfachsten Strukturen sind diejenigen mit einer Trägermenge (Individuenbereich). In Abschnitt 2 werden die wichtigsten Begriffe eingeführt, die sich hierfür bilden lassen. Zu diesen Strukturen zählen Halbgruppen und Gruppen (siehe Abschnitt 3), Ringe und Körper (siehe Abschnitt 4), Verbände (siehe Abschnitt 5) und Ordnungsstrukturen (siehe Abschnitt 6). Zu den Strukturen mit mehreren Trägermengen (Individuenbereichen) gehören Moduln und Vektorräume (siehe Abschnitt 7) und geometrische Strukturen (siehe Abschnitt 8). Die bis dahin betrachteten Strukturen sind dadurch charakterisiert, daß auf den Trägermengen gewisse Verknüpfungen, Relationen oder Elemente ausgezeichnet sind. Demgegenüber ist bei topologischen Strukturen (siehe Abschnitt 9) ein System von Mengen ausgezeichnet. In Abschnitt 10 werden Kategorien eingeführt, die Strukturen mit partiellen Verknüpfungen sind.

Die Tabellen sind folgendermaßen aufgebaut: Spalte 2 zeigt die in dieser Norm empfohlenen Zeichen. Spalte 3 zeigt ihre typische Verwendung. Spalte 4 gibt eine mögliche Sprechweise an, die aber nicht in jedem Falle wörtlich einzuhalten ist; ähnliche Ausdrucksweisen können ebenfalls völlig akzeptierbar sein. Spalte 5 enthält die Definition für die formalen Ausdrücke in Spalte 3 oder in Spalte 2. Die Spalten 2 und 3 sind oft leer, wenn für einen Begriff keine formale Bezeichnung eingeführt, sondern nur eine verbale Formulierung des Begriffs in Spalte 4 gegeben wird, die dann durch Spalte 5 definiert wird. In Spalte 5 wird oft eine mehr formale Definition gegeben, wobei auch logische und mengentheoretische Zeichen aus DIN 5474 und DIN 5473 verwendet werden. Um das Verständnis zu erleichtern, wird bisweilen in Spalte 6 eine verbale Erläuterung gegeben. Diese Spalte dient auch dazu, Beispiele, Hinweise und Zusätze zu geben.

Fortsetzung Seite 2 bis 29

Normenausschuß Einheiten und Formelgrößen (AEF) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V.

Nachdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung des DIN Deutsches Institut für Normung e. V., Berlin, gestattet.

1 Verknüpfungen und Relationen

Verknüpfungen, auch Operationen genannt, sind besondere Funktionen und schon in DIN 5473, Ausgabe Juni 1976, Nr 3.20 festgelegt worden. Zum Begriff der Funktion siehe DIN 5473, Ausgabe Juni 1976, Nr 3.1, und zum Begriff der Relation siehe DIN 5473, Ausgabe Juni 1976, Nr 2.4. In diesem Abschnitt sei A eine nichtleere Menge, und x, y, z seien Elemente von A .

1	2	3	4	5	6
Nr	Zeichen	Verwendung	Sprechweise	Definition	Bemerkungen
1.1			n -stellige Verknüpfung von $A_1 \times \dots \times A_n$ nach A	Funktion mit Definitionsbereich $A_1 \times \dots \times A_n$ und Wertebereich sub A	Es handelt sich also um eine Funktion, die genau für alle n -Tupel $\langle x_1, \dots, x_n \rangle$ mit $x_i \in A_i$ ($i = 1, \dots, n$) definiert ist und deren Werte in A liegen. Auch bei partiellen Funktionen aus $A_1 \times \dots \times A_n$ in A redet man von partiellen Verknüpfungen. Eine nicht-partielle Verknüpfung kann im Gegensatz hierzu als totale Verknüpfung bezeichnet werden.
1.2			n -stellige Verknüpfung auf A	Funktion mit Definitionsbereich A^n und Wertebereich sub A	Eine solche Verknüpfung wird auch als interne Verknüpfung auf A bezeichnet, während man Verknüpfungen nach Nr 1.1, bei denen nicht alle Mengen $A_1, \dots, A_n$ gleich A sind, als externe bezeichnet. Beispiele: Addition und Multiplikation von Zahlen sind interne zweistellige Verknüpfungen auf $\mathbb{C}$. Die Beschränkungen auf die Standardmengen $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ sind darauf zweistellige interne Verknüpfungen. Man beachte, daß die Skalarmultiplikation von Vektoren in dieser Terminologie eine externe, das Vektorprodukt eine interne Verknüpfung ist.
1.3	τ	$(x \tau y)$	$x \tau$ -verknüpft mit y	der Funktionswert von τ an der Stelle $\langle x, y \rangle$	Im folgenden seien τ (mögliche Lesart: Trick) und $\perp$ (mögliche Lesart: Track) beliebige zweistellige Verknüpfungen auf A , die natürlich auch mit spezielleren Verknüpfungen übereinstimmen können. Als Verknüpfungszeichen nimmt man auch oft $\circ, \square, *$ (allgemein) oder $+, \cap, \cup$ (in spezieller Bedeutung). Zur Einsparung von Klammern sind jeweils besondere Konventionen erforderlich, doch vereinbart man generell, daß $\cdot$ stärker bindet als $+$. Der Malpunkt wird oft weggelassen, Außenklammern eines einzelnen Verknüpfungsterms ebenfalls.
1.4			x, y sind τ -vertauschbar	$x \tau y = y \tau x$	Wenn klar ist, welche Verknüpfung gemeint ist, so läßt man hier und in folgenden Fällen den Zusatz „ τ -“ weg.
1.5			τ ist kommutativ	$A x \wedge y (x \tau y = y \tau x)$	Eine zweistellige Verknüpfung ist genau dann kommutativ, wenn je zwei Argumente vertauschbar sind.

1	2	3	4	5	6
Nr	Zeichen	Verwendung	Sprechweise	Definition	Bemerkungen
1.6			τ ist assoziativ	$\wedge x \wedge y \wedge z (x \tau (y \tau z) = (x \tau y) \tau z)$	Hierbei ist τ als interne Verknüpfung vorausgesetzt. Man redet auch bei gewissen externen Verknüpfungen von Assoziativität, wenn auf beiden Seiten der Gleichung verschiedene Verknüpfungen gemeint sind, die jedoch mit demselben Symbol notiert werden. Beispiel (x, y Skalare, $\vec{x}$ Vektor): $x \cdot (y \cdot \vec{x}) = (x \cdot y) \cdot \vec{x}.$
1.7			e ist τ -neutrales Element	$\wedge x (x \tau e = e \tau x = x)$	Eine Verknüpfung hat höchstens ein neutrales Element. Wenn für τ das Pluszeichen $+$ steht, so schreibt man 0 für das neutrale Element (Nullelement), wenn für τ der Malpunkt $\cdot$ steht, so kann man 1 für das neutrale Element schreiben (Einselement).
1.8			y ist τ -invers zu x	$y \tau x = x \tau y = e$	Hierbei ist e das neutrale Element für τ . Für assoziatives τ hat jedes x höchstens ein τ -Inverses. Wenn für τ das Pluszeichen $+$ steht, so schreibt man $-x$ (Negatives von x), wenn für τ der Malpunkt $\cdot$ steht, so schreibt man x^{-1} oder $\frac{1}{x}$ (Reziprokes von x) für das Inverse von x .
1.9			x ist τ -invertierbar	$\forall y (x \tau y = y \tau x = e)$	Ein Element ist τ -invertierbar, wenn es ein Inverses hat. Die Zahl 0 ist nicht bezüglich der Multiplikation invertierbar.
1.10			x ist τ -idempotent	$x \tau x = x$	
1.11			x ist τ -involutorisch	$x \tau x = e \wedge x \neq e$	Hierbei ist e das τ -neutrale Element. Ein involutorisches Element ist sein eigenes Inverses.
1.12			x ist τ -linksregulär	$\wedge y \wedge z (x \tau y = x \tau z \rightarrow y = z)$	Entsprechend sind rechtsreguläre Elemente definiert.
1.13			τ ist rechtsdistributiv bezüglich $\perp$	$\wedge x \wedge y \wedge z (x \tau (y \perp z) = (x \tau y) \perp (x \tau z))$	Entsprechend ist Linksdistributivität definiert. τ ist distributiv bezüglich $\perp$, wenn τ linksdistributiv und rechtsdistributiv bezüglich $\perp$ ist. Wenn τ kommutativ ist, so stimmen Linksdistributivität und Rechtsdistributivität überein. Man redet auch bei gewissen externen Verknüpfungen von Distributivität, wenn auf beiden Seiten der Gleichung verschiedene Verknüpfungen gemeint sind, die jedoch mit demselben Symbol notiert werden. Beispiel (x, y Skalare, $\vec{x}$ Vektor): $(x + y) \cdot \vec{x} = x \cdot \vec{x} + y \cdot \vec{x}.$

1	2	3	4	5	6
Nr	Zeichen	Verwendung	Sprechweise	Definition	Bemerkungen
1.14	τ	τx_i $i = 1$	τ -Verknüpfung der x_i über i von 1 bis n	rekursive Definition: $\tau x_i = x_1$ $\tau x_i = (\tau x_i) \tau x_{n+1}$	τ sei dabei eine interne zweistellige Verknüpfung. τ ist die iterierte τ-Verknüpfung. Für $n = 3$ ist z. B. $\tau x_i = (x_1 \tau x_2) \tau x_3$ Wenn es ein neutrales Element e für τ gibt, so setzt man $\tau x_i = e$ (leere τ-Verknüpfung). Für τ ist i. allg. die große Ausführung des Zeichens τ zu nehmen. Doch nimmt man $\sum$ (Summenzeichen), wenn für τ das Pluszeichen $+$, und $\prod$ (Produktzeichen), wenn für τ der Malpunkt $\cdot$ steht. Die Vorschrift für den Laufindex kann u. U. auch anders lauten, etwa „$i \in I$“ (falls τ kommutativ und assoziativ und I endlich ist): $\tau x_i, \quad i \in I$ sie kann aus satztechnischen Gründen rechts oben und unten an das Verknüpfungszeichen angehängt oder in Klammern hinter den Ausdruck geschrieben werden: $\tau_{i=1}^n x_i, \quad \tau x_i \quad (i = 1, \dots, n),$ oder durch den Index i am Verknüpfungszeichen bloß angedeutet erscheinen: $\tau_i x_i.$ Man beachte, daß der hier eingeführte Begriff genauer als τ-Verknüpfung „von rechts“ oder „mit Klammerung nach links“ zu bezeichnen ist. Ein analoger Begriff „von links“ könnte auch eingeführt werden, der zu entsprechend modifizierten Begriffen in Nr 1.15 und Nr 1.16 führen würde.

1	2	3	4	5	6
Nr	Zeichen	Verwendung	Sprechweise	Definition	Bemerkungen
1.15			n -te τ -Iterierte von x	$\prod_{i=1}^n x$	Es handelt sich um die n -fache τ -Verknüpfung des Elementes x mit sich selbst. Wenn für τ das Pluszeichen $+$ steht, so schreibt man nx (n -faches von x), wenn für τ der Malpunkt $\cdot$ steht, so schreibt man x^n (n -te Potenz von x).
1.16			τ -Ordnung von x	die kleinste positive Zahl n (wenn es ein solches n gibt), so daß die n -te τ -Iterierte von x gleich dem neutralen Element e ist	Bei der Addition redet man von der additiven, bei der Multiplikation von der multiplikativen Ordnung. Man sagt, die Ordnung sei unendlich, wenn alle n -ten τ -Iterierten ($n > 0$) vom neutralen Element verschieden sind.
1.17		$\tau(X_1, \dots, X_n)$	τ -Verknüpfung der Komplexe $X_1, \dots, X_n$	$\{\tau(x_1, \dots, x_n) \mid x_1 \in X_1 \wedge \dots \wedge x_n \in X_n\}$	Hierbei sei τ Verknüpfung von $A_1 \times \dots \times A_n$ nach A und $X_1 \subseteq A_1, \dots, X_n \subseteq A_n$. Die Mengen X_i werden in diesem Zusammenhang auch als Komplexe bezeichnet. Wenn einer der Komplexe einelementig ist, etwa $X_i = \{x_i\}$, so schreibt man in dem Symbol x_i für $\{x_i\}$.
1.18			X ist τ -stabil	$\tau(X, \dots, X) \subseteq X$	Hierbei ist τ eine interne n -stellige Verknüpfung auf A und $X \subseteq A$. Man sagt auch, X sei unter τ abgeschlossen. Auch bei gewissen externen Verknüpfungen redet man von stabilen Komplexen. Wenn z. B. $\tau: A \times B \rightarrow B$ und $X \subseteq B$, so ist X τ -stabil, wenn $A \cap X \subseteq X$.
1.19			R ist reflexiv auf A	$\bigwedge x \, xRx$	In den folgenden Nummern ist R als zweistellige Relation auf A vorausgesetzt, d. h. $R \subseteq A^2$.
1.20			R ist symmetrisch	$\bigwedge x \, \bigwedge y \, (xRy \rightarrow yRx)$	
1.21			R ist transitiv	$\bigwedge x \, \bigwedge y \, \bigwedge z \, (xRy \wedge yRz \rightarrow xRz)$	
1.22			R ist komparativ	$\bigwedge x \, \bigwedge y \, \bigwedge z \, (xRz \wedge yRz \rightarrow xRy)$	
1.23			R ist identitiv R ist antisymmetrisch	$\bigwedge x \, \bigwedge y \, (xRy \wedge yRx \rightarrow x = y)$	
1.24			R ist asymmetrisch	$\bigwedge x \, \bigwedge y \, (xRy \rightarrow \neg yRx)$	

1	2	3	4	5	6
Nr	Zeichen	Verwendung	Sprechweise	Definition	Bemerkungen
1.25			R ist antireflexiv	$\neg x R x$	
1.26			R ist konnex auf A	$\neg x \wedge y (x R y \vee y R x \vee x = y)$	
1.27			R ist Äquivalenzrelation auf A	R ist eine Relation auf A , die reflexiv auf A , symmetrisch und transitiv ist	Beispiel: Wenn f Funktion ist, so ist $\{x, y \mid f(x) = f(y)\}$ eine Äquivalenzrelation auf dem Definitionsbereich von f , die Faserung vermöge f . Äquivalenzrelationen werden oft durch Zeichen wie $\sim, \equiv, \cong$ o. ä. bezeichnet.
1.28	x_R		Äquivalenzklasse von x nach R	$\{y \mid y R x\}$	In Nr 1.28 und Nr 1.29 ist R eine Äquivalenzrelation auf A . Für x_R werden auch oft andere, nicht systematische Bezeichnungen ad hoc eingeführt. Beispiel für Äquivalenzklassen: Wenn f eine Funktion ist und R die Faserung vermöge f ist (siehe voriges Beispiel), so ist $x_R = \{y \mid f(y) = f(x)\}$, die Faser von x oder über $f(x)$ vermöge der Funktion f .
1.29	$/$	A/R	Quotient der Menge A nach der Äquivalenzrelation R , Äquivalenzklassenmenge	$\{x_R \mid x \in A\}$	A/R ist eine Partition von A . Jede Partition $\mathcal{M}$ von A liefert eine Äquivalenzrelation auf A : $\{x, y \mid (\exists M \in \mathcal{M}) (x, y \in M)\}$

2 Strukturen mit genau einer Trägermenge

Derartige Strukturen sind gegeben durch eine Trägermenge und gewisse ausgezeichnete Verknüpfungen, Relationen oder Elemente. Diese Daten faßt man zu einem Tupel zusammen. Strukturen können mit großen Skript- oder Frakturbuchstaben bezeichnet werden, die zugehörigen Trägermengen werden dann mit den entsprechenden großen Antiquabuchstaben bezeichnet. Im folgenden seien

$$\mathcal{A} = \langle A, O_1, \dots, O_k \rangle, \\ \mathcal{B} = \langle B, Q_1, \dots, Q_k \rangle$$

Strukturen, d. h. A, B seien nichtleere Mengen (die Trägermengen oder Individuenbereiche von $\mathcal{A}, \mathcal{B}$), und für jedes i mit $1 \leq i \leq k$ sei entweder O_i n_i -stellige Verknüpfung auf A und Q_i n_i -stellige Verknüpfung auf B (d. h. $O_i : A^{n_i} \rightarrow A$ und $Q_i : B^{n_i} \rightarrow B$), oder O_i sei n_i -stellige Relation auf A und Q_i sei n_i -stellige Relation auf B (d. h. $O_i \subseteq A^{n_i}$ und $Q_i \subseteq B^{n_i}$), von welcher Art (d. h. Verknüpfung, Relation oder Element) die O_i sind, bezeichnet man als Signatur der Struktur. So sind z. B. Verbände (siehe Abschnitt 5) von der Signatur „Menge mit zwei zweistelligen Verknüpfungen“. Die oben eingeführten Strukturen $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind von derselben Signatur.

Von O_i und Q_i (mit demselben Index i , die also in $\langle A, O_1, \dots, O_k \rangle$ und $\langle B, Q_1, \dots, Q_k \rangle$ an derselben Stelle stehen) sagt man, daß es einander entsprechende Verknüpfungen, Relationen oder Elemente sind.

Als Elemente einer Struktur bezeichnet man die Elemente ihrer Trägermenge, die Kardinalzahl einer Struktur ist die Kardinalzahl ihrer Trägermenge. Im folgenden seien $x, y, z, \dots$ Elemente von $\mathcal{A}$.

1	2	3	4	5	6
Nr	Zeichen	Verwendung	Sprechweise	Definition	Bemerkungen
2.1	$\subseteq$	$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$	$\mathcal{A}$ ist Substruktur (Unterstruktur) von $\mathcal{B}$. $\mathcal{B}$ ist Erweiterung (Oberstruktur) von $\mathcal{A}$	$A \subseteq B$, und für $i = 1, \dots, k$ ist O_i die Einschränkung von Q_i auf A	Das heißt: Wenn O_i n_i -stellige Verknüpfung ist, so ist $O_i = Q_i \upharpoonright A^{n_i} = Q_i \cap (A^{n_i})^1$, wenn O_i n_i -stellige Relation ist, so ist $O_i = Q_i \cap A^{n_i}$, wenn O_i Element von A ist, so ist $O_i = Q_i$. Man beachte, daß gefordert wird, daß (im Falle von Verknüpfungen) die Einschränkung von Q_i auf A eine Verknüpfung auf A ist. Das bedeutet, daß A Q_i -stabil ist.
2.2	$\rightarrow$	$h: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$	h ist Homomorphismus von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$	es gelten (a), (b), (c) und (d): (a) $h: A \rightarrow B$, (b) wenn O_i n_i -stellige Verknüpfung ist, so gilt: $h(O_i(x_1, \dots, x_{n_i})) = Q_i(h(x_1), \dots, h(x_{n_i}))$, (c) wenn O_i n_i -stellige Relation ist, so gilt: $O_i(x_1 \dots x_{n_i}) \rightarrow Q_i(h(x_1) \dots h(x_{n_i}))$, (d) wenn O_i Element von A ist, so gilt: $h(O_i) = Q_i$	Die Bedingungen (a), (b), (c), (d) sind die Homomorphiebedingungen. Wenn in (c) $\leftrightarrow$ statt $\rightarrow$ gesetzt wird, so redet man von einem starken Homomorphismus. Wenn unter den ausgezeichneten Objekten $O_1, \dots, O_n$ von $\mathcal{A}$ keine Relationen sind, so wird Bedingung (c) leer, und jeder Homomorphismus ist stark. Oft bezeichnet man im Hinblick auf eine kategorientheoretische Behandlung die Tripel $(\mathcal{A}, h, \mathcal{B})$ als Homomorphismen (oder Morphismen) mit Quelle $\mathcal{A}$ und Ziel $\mathcal{B}$.
2.3			h ist Epimorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{B}$	h ist Homomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{B}$	
2.4			h ist Monomorphismus von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$	h ist starker injektiver Homomorphismus von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$	h ist dann ein Isomorphismus auf das Bild von h (siehe Nr 2.13).
2.5			h ist Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{B}$	h ist Monomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{B}$	
2.6			h ist Endomorphismus von $\mathcal{A}$	h ist Homomorphismus von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{A}$	
2.7			h ist Automorphismus von $\mathcal{A}$	h ist Isomorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{A}$	Die Automorphismen von $\mathcal{A}$ bilden mit der Hintereinanderausführung als Verknüpfung eine Gruppe, die Automorphismengruppe $\text{Aut}(\mathcal{A})$ von $\mathcal{A}$.
2.8			h ist Automorphismus von $\mathcal{A}$ bezüglich C	$C \subseteq A$, und h ist Automorphismus von $\mathcal{A}$ und $h(x) = x$ für alle x aus C	h läßt dann auch die von C erzeugte Unterstruktur elementweise fest.
2.9			C erzeugt $\mathcal{B}$	es sei $C \subseteq A$; $\mathcal{B}$ ist die kleinste Substruktur von $\mathcal{A}$, deren Trägermenge C als Teilmenge enthält	$\mathcal{B}$ ist durch die Teilmenge C von A eindeutig bestimmt und wird auch mit $\langle C \rangle$ bezeichnet. Falls in $\mathcal{A}$ keine Verknüpfungen vorkommen und C die ausgezeichneten Elemente von $\mathcal{A}$ enthält, so hat $\mathcal{B}$ die Trägermenge C .

1	2	3	4	5	6
Nr	Zeichen	Verwendung	Sprechweise	Definition	Bemerkungen
2.10			C erzeugt $\mathcal{B}$ in der Klasse $\mathcal{K}$ von Strukturen	es sei $C \subseteq A$, $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, $\mathcal{B}$ ist die kleinste Substruktur von $\mathcal{A}$ aus $\mathcal{K}$, deren Trägermenge C enthält	Hierbei wird $\mathcal{K}$ als eine Klasse von Strukturen vorausgesetzt, die gegen Isomorphismen und Durchschnitte abgeschlossen ist. $\mathcal{B}$ ist dann eindeutig bestimmt und wird auch mit $\langle C \rangle_{\mathcal{K}}$ bezeichnet.
2.11			$\sim$ ist Kongruenzrelation auf $\mathcal{A}$	es gelten (a), (b), (c): (a) $\sim$ ist Äquivalenzrelation auf A , (b) wenn $O_i n_i$ -stellige Verknüpfung ist, so gilt: $x_1 \sim y_1 \wedge \dots \wedge x_{n_i} \sim y_{n_i} \rightarrow O_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \sim O_i(y_1, \dots, y_{n_i})$, (c) wenn $O_i n_i$ -stellige Relation ist, so gilt: $x_1 \sim y_1 \wedge \dots \wedge x_{n_i} \sim y_{n_i} \rightarrow (O_i(x_1, \dots, x_{n_i}) \leftrightarrow O_i(y_1, \dots, y_{n_i}))$	
2.12	$/$	$\mathcal{A}/\sim$	Quotientenstruktur von $\mathcal{A}$ nach $\sim$	hierbei sei $\sim$ eine Kongruenzrelation auf $\mathcal{A}$, $\mathcal{A}/\sim$ hat die Menge $A/\sim$ der Äquivalenzklassen nach $\sim$ als Trägermenge. Verknüpfungen und Relationen sind repräsentantenweise definiert, d. h. die kanonische Abbildung $\langle x \mapsto x_\sim \rangle$, die jedes Element von $\mathcal{A}$ auf seine Äquivalenzklasse abbildet, ist ein starker Epimorphismus von $\mathcal{A}$ auf $\mathcal{A}/\sim$	Bei speziellen Arten von Strukturen lassen sich Kongruenzrelationen auch durch gewisse Substrukturen (Normalteiler, Ideale, Filter) charakterisieren. Die Quotientenstruktur führt dann auch wohl andere Bezeichnungen, wie z. B. Faktorgruppe, Restklassenring, o. ä. (siehe Nr 3.30, 4.11, 9.22).
2.13	Bild	Bild (h)	Bild von h	h sei Homomorphismus von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$, Bild (h) ist die Substruktur von $\mathcal{B}$ mit $\{h(x) \mid x \in A\}$	Wenn h ein Homomorphismus von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ ist, so ist h ein Epimorphismus von $\mathcal{A}$ auf Bild (h).
2.14	Kern	Kern (h)	Kern von h	h sei starker Homomorphismus von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$; Kern (h) ist eine Kongruenzrelation auf $\mathcal{A}$, und zwar $\{x, y \mid h(x) = h(y)\}$, die Faserung vermöge h	Wenn h starker Homomorphismus von $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ ist, so ist Bild (h) isomorph zu $\mathcal{A}/\text{Kern}(h)$. Bei speziellen Arten von Strukturen läßt sich der Kern oft durch gewisse Substrukturen oder Teilmengen (Normalteiler, Ideale, Filter) charakterisieren. Man bezeichnet dann auch diese als Kern (siehe Nr 3.29, 4.10, 7.8).
Bemerkungen: Die hier für Strukturen mit genau einer Trägermenge eingeführten Begriffe treten in ähnlicher Weise auch bei anderen Arten von Strukturen auf. Diese Begriffe sollen in den anderen Fällen jedoch nicht erneut definiert werden. In den Abschnitten 3 bis 6 werden spezielle Strukturen mit genau einer Trägermenge besprochen. Dabei kommen in Abschnitt 3 bis Abschnitt 5 Strukturen vor, in denen Verknüpfungen ausgezeichnet sind, in Abschnitt 6 Strukturen mit einer ausgezeichneten Relation. Gemischte Strukturen, in denen sowohl Verknüpfungen als auch Relationen ausgezeichnet sind, treten auch auf (z. B. geordnete Gruppen, geordnete Ringe), werden hier aber nicht besprochen.					

3 Halbgruppen und Gruppen

In diesem Abschnitt sei G eine nichtleere Menge, und x, y, z seien Elemente und X, Y seien Teilmengen von G .

1	2	3	4	5	6
Nr	Zeichen	Verwendung	Sprechweise	Definition	Bemerkungen
3.1			$\langle G, \cdot \rangle$ ist Halbgruppe	$\langle G, \cdot \rangle$ ist Struktur mit einer assoziativen internen zweistelligen Verknüpfung	Die Halbgruppe $\langle G, \cdot \rangle$ wird auch einfach mit G bezeichnet, wenn klar ist, was die Halbgruppenverknüpfung ist. Eine Halbgruppe wird, vornehmlich dann, wenn sie ein neutrales Element hat, auch als Monoid bezeichnet. Der Multiplikationspunkt wird in Verknüpfungstermen gewöhnlich weggelassen, wenn kein Mißverständnis möglich ist.
3.2			reguläre Halbgruppe	Halbgruppe, in der alle Elemente regulär sind	Es gilt also $\wedge x \wedge y \wedge z ((xy = xz \rightarrow y = z) \wedge (yx = zx \rightarrow y = z))$. Zu jeder kommutativen regulären Halbgruppe G gibt es eine bis auf Isomorphie bezüglich G eindeutig bestimmte kleinste kommutative Obergruppe, ihre Quotientengruppe.
3.3			$\langle G, \cdot \rangle$ ist Gruppe	$\langle G, \cdot \rangle$ ist Halbgruppe mit neutralem Element, in der jedes Element ein Inverses hat	Das neutrale Element wird auch mit e oder 1 bezeichnet (Einselement), das Inverse von x mit x^{-1} . Wenn klar ist, was die Gruppenverknüpfung ist, so wird auch einfach die Trägermenge G als Gruppe bezeichnet.
3.4			abelsche Gruppe, kommutative Gruppe	Gruppe, deren Gruppenverknüpfung kommutativ ist	Die Gruppenverknüpfung wird dann auch oft mit $+$ bezeichnet (additive Schreibweise), das neutrale Element mit 0 (Nullelement), das Inverse von x mit $-x$ (Negatives).
3.5			triviale Gruppe	Gruppe, die nur aus dem neutralen Element besteht	
3.6			zyklische Gruppe	Gruppe, die in der Klasse aller Gruppen von einem Element (d. h. einer elementigen Menge) erzeugt wird	
3.7			Untergruppe	Unterstruktur, die auch Gruppe ist	Eine Menge U ist Trägermenge einer Untergruppe von $\langle G, \cdot \rangle$, wenn $\emptyset \neq U \subseteq G \wedge \wedge x \wedge y (x, y \in U \rightarrow xy^{-1} \in U)$. Wenn klar ist, daß als Verknüpfung auf U die Einschränkung der Verknüpfung von $\langle G, \cdot \rangle$ zu nehmen ist, so wird auch die Trägermenge U als Untergruppe bezeichnet.
3.8			Ordnung einer Gruppe	Anzahl der Gruppenelemente (Kardinalzahl der Trägermenge)	