

Stochastik

Mathematische Statistik

Begriffe und Zeichen

DIN
13 303
Teil 2

Stochastics; mathematical statistics; concepts, signs and symbols

Inhalt

	Seite
Vorbemerkung	1
1 Grundbegriffe der mathematischen Statistik	2
2 Statistische Tests	4
3 Punktschätzer	7
4 Bereichsschätzer	9
Zitierte Normen	11
Erläuterungen	11
Stichwortverzeichnis	11

Die Normen DIN 13 303 Teil 1 und Teil 2 dienen dazu, die Begriffe und Zeichen der Stochastik zu normen, und zwar im vorliegenden Teil 2 die Begriffe und Zeichen der mathematischen Statistik. Dieser Teil fußt auf DIN 13 303 Teil 1.

Ergänzend hierzu behandeln die Normen DIN 55 350 Teil 21 bis Teil 24 die Begriffe der Statistik aus der Sicht der praktischen Anwendung, wobei dort auf eine strenge mathematische Darstellungsweise im allgemeinen verzichtet wird.

Bezüglich der verwendeten mathematischen Zeichen und Begriffe gelten DIN 1302 und die dort zitierten weiteren Normen mathematischen Inhalts, insbesondere DIN 5473.

Internationale Patentklassifikation

G 06 G 7/52

G 06 F 15/36

Fortsetzung Seite 2 bis 12

Normenausschuß Einheiten und Formelgrößen (AEF) im DIN Deutsches Institut für Normung e. V.
Ausschuß Qualitätssicherung und angewandte Statistik (AQS) im DIN

Nachdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung des DIN Deutsches Institut für Normung e. V., Berlin, gestattet.

1 Grundbegriffe der mathematischen Statistik

Vor Beginn der statistischen Untersuchung legt man im Sinne der beiden in der Anmerkung zu Abschnitt 1.1 von DIN 13303 Teil 1 (Ausgabe Mai 1982) angegebenen Beschreibungen fest:

- die Ergebnismenge, aus der ein Ergebnis ermittelt werden soll, oder
- die Zufallsvariablen, von denen je ein Wert (eine Realisation) ermittelt werden soll.

Bei beiden Beschreibungen kennt man im allgemeinen nicht die dem Experiment wirklich zugrunde liegende wahre Wahrscheinlichkeitsverteilung (siehe Nr 1.1). Dabei ist die Grundannahme, daß die wahre Wahrscheinlichkeitsverteilung zur Menge der zugelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen (siehe Nr 1.2) gehört.

1	2	3	4	5
Nr	Name	Zeichen	Definition	Bemerkung
1.1	wahre Wahrscheinlichkeitsverteilung		Grundbegriff (mit der Bedeutung: die dem Experiment wirklich zugrunde liegende, im allgemeinen unbekannte Wahrscheinlichkeitsverteilung)	Für die wahre Wahrscheinlichkeitsverteilung werden dieselben Zeichen wie für die zugelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen (siehe Nr 1.2) verwendet: P_θ , wenn eine Familie von zugelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen vorliegt, sonst P .
1.1.1	wahrer Parameterwert		Parameterwert der wahren Wahrscheinlichkeitsverteilung	Der wahre Parameterwert ist im allgemeinen Element einer ein- oder mehrdimensionalen Parametermenge oder einer anderen Indexmenge, z. B. einer Menge von Verteilungsfunktionen. Als Zeichen für den wahren Parameterwert wird oft dasselbe Zeichen wie für den Parameter als Variable benutzt, in dieser Norm meistens ϑ . Zum Begriff des Parameters siehe DIN 13303 Teil 1.
1.2	Menge der zugelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen	$\mathcal{P}$	Grundbegriff (mit der Bedeutung: Aufgrund einer geeigneten Planung des Experimentes und/oder theoretischer Überlegungen sowie aus dem Vorwissen wird festgestellt, welche Wahrscheinlichkeitsverteilungen als zugelassen anzusehen sind.)	Man beachte, daß zwar in der Regel die Menge der zugelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen (und darunter natürlich die wahre Wahrscheinlichkeitsverteilung) interessiert, daß dieselbe Menge aber auf verschiedene Weise parametrisiert, d. h. als Wertebereich einer Familie dargestellt werden kann. Zum Begriff des Modells siehe Anmerkung zu 1.2 und 1.2.1.
1.2.1	Familie der zugelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen		eine Abbildung, die jedem ϑ aus einer Parametermenge (Indexmenge) Θ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung P_ϑ zuordnet, wobei $\mathcal{P} = \{P_\vartheta : \vartheta \in \Theta\}$	Die Familie der zugelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen wird oft wie die Menge der zugelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen bezeichnet, obwohl sie davon begrifflich verschieden ist.
1.2.2	Menge der zugelassenen Parameterwerte	Θ	Parametermenge (Indexmenge) der Familie der zugelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen	Auch Parameterraum genannt

1	2	3	4	5
Nr	Name	Zeichen	Definition	Bemerkung
1.3	suffiziente Funktion (für den Parameter ϑ der Familie P_ϑ mit $\vartheta \in \Theta$)		allgemein: eine Funktion t der möglichen Werte einer Zufallsvariablen X, zu der es Funktionen $g_\vartheta: W(t) \rightarrow \mathbb{R}_+$ und $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ gibt, so daß $\langle \omega \mapsto g_\vartheta(t(X(\omega))) \rangle h(\omega) >$ die Wahrscheinlichkeiten oder eine Dichte $\langle \omega \mapsto f_\vartheta(\omega) \rangle >$ der Wahrscheinlichkeitsverteilung P_ϑ für alle $\vartheta \in \Theta$ angibt. Dabei hängt h nicht von ϑ ab. speziell: für den Fall, daß die Werte $x_1, \dots, x_n$ von n Zufallsvari- ablen $X_1, \dots, X_n$ ermittelt werden, eine Funktion $\langle x_1, \dots, x_n \mapsto t(x_1, \dots, x_n) \rangle >$, zu der es Funktio- nen $g_\vartheta: W(t) \rightarrow \mathbb{R}_+$ und $h: \mathcal{X}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ gibt, so daß $\langle x_1, \dots, x_n \mapsto g_\vartheta(t(x_1, \dots, x_n)) \rangle h(x_1, \dots, x_n) >$ die Wahrscheinlich- keiten oder eine Dichte $\langle x_1, \dots, x_n \mapsto f_\vartheta(x_1, \dots, x_n) \rangle >$ der Wahrscheinlichkeitsverteilung P_ϑ für alle $\vartheta \in \Theta$ angibt. Dabei hängt h nicht von ϑ ab.	$T = t(X)$ bzw. $T = t(X_1, \dots, X_n)$ sind suffiziente Zufallsvariable. Zur Erläuterung des Begriffs suffiziente Zufallsvariable (auch erschöpfend genannt) siehe Anmerkung zu 1.3.
Anmerkung zu 1.2 und 1.2.1: Anstelle des Begriffs der Familie der zugelassenen Wahrscheinlichkeits- verteilungen wird auch der Begriff des stocha- stischen Modells gebraucht. Modelle werden nicht nur durch die Angabe von Wahrschein- lichkeitsverteilungen, sondern auch durch die Angabe von Gleichungen für Zufallsvariable formuliert. Ein Spezialfall ist das lineare Modell: die Grundannahme, daß die zu messenden Zu- fallsgrößen Linearkombinationen von unbe- kannten Parametern und Zufallsgrößen sind, z.B. $X_{ij} = \mu + \xi_i + \varepsilon_{ij},$ wobei beim Modell mit Zufallskomponenten ξ_i und ε_{ij}, beim Modell mit systematischen Kom- ponenten nur ε_{ij} Zufallsgrößen sind (siehe z.B. DIN 53803 Teil 1).			Siehe auch das in Nr 3.3 Spalte 4 b vorkom- mende lineare Modell $E_\vartheta X = C' \vartheta + c.$ Man beachte: In einem vorgegebenen realen Experiment ist die Wahl der Menge $\mathcal{G}$ der zu- gelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen oder der Parametermenge Θ der Familie der zugelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilun- gen oder allgemein des stochastischen Modells nicht eindeutig festgelegt. Dementsprechend hängen die im folgenden zu behandelnden sta- tistischen Verfahren außer von der Fragestel- lung auch noch von dieser Wahl ab. Anmerkung zu 1.3: Eine suffiziente Zufallsvariable T (z.B. suffiziente Prüfvariable (siehe Nr 2.7.2)) ent- oder suffizienter Schätzer (siehe Nr 3.1.2)) ent-	hält alle Information über den unbekannten wahren Parameterwert ϑ der unbekannten wahren Wahrscheinlichkeitsverteilung P_ϑ, die man aus den zu ermittelnden Daten entnehmen kann. Sind z.B. $X_1, \dots, X_n$ stochastisch unab- hängig $N(\mu, \sigma^2)$ verteilt, so gilt: $(\bar{X}, s_X^2) \text{ suffizient für } (\mu, \sigma^2), \text{ wenn } \mu \text{ und } \sigma^2 \text{ unbekannt,}$ $\bar{X} \text{ suffizient für } \mu, \text{ wenn nur } \mu \text{ unbekannt,}$ $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 \text{ suffizient für } \sigma^2, \text{ wenn nur } \sigma^2 \text{ unbekannt.}$

2 Statistische Tests

Die Definitionen der in dieser Tabelle genormten Begriffe und Zeichen nehmen auf eine Familie von zugelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen P_δ mit $\delta \in \Theta$ Bezug. Diese Definitionen gelten auch für nichtparametrische Tests, wenn man δ und Θ geeignet interpretiert (z.B. δ als Verteilungsfunktion und Θ als Menge von Verteilungsfunktionen).

1	2	3	4	5
Nr	Name	Zeichen	Definition	Bemerkung
2.1	(statistischer) Test		(statistisches) Verfahren, um zwischen einer Nullhypothese H_0 und einer Alternativhypothese H_1 zu entscheiden (siehe Nr 2.3)	Man beachte, daß aufgrund einer problembezogenen Arbeitshypothese ein statistischer Test oft so geplant wird, daß die Alternativhypothese der Arbeitshypothese entspricht. Ist die Arbeitshypothese z.B. „es liegt eine Wirkung vor“, so soll das Gegenteil „es liegt keine Wirkung vor (Wirkung gleich Null)“, d.h. die Nullhypothese, mit Hilfe des statistischen Tests verworfen werden.
2.1.1	(statistische) Hypothese		eine Aussage über den wahren Parameterwert (oder die wahre Wahrscheinlichkeitsverteilung)	Siehe Anmerkung und Beispiele zu 2.1. Für randomisierten Test siehe Nr 2.8.
2.1.2	Nullhypothese (auch kurz: Hypothese)	H_0	eine Hypothese (mit der in der Bemerkung angegebenen Bedeutung), z.B. die Aussage $\delta \in \Theta_0$, also $H_0: \delta \in \Theta_0$	Die Negation ist bezüglich der Menge der zugelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen zu bilden, wenn zu einem $\delta \in \Theta \setminus \Theta_0$ eine Wahrscheinlichkeitsverteilung gehört, die auch zu einem Parameter der Hypothese gehört.
2.1.3	Alternativhypothese (auch kurz: Alternative)	H_1	die Negation der Nullhypothese über den wahren Parameterwert (oder die wahre Wahrscheinlichkeitsverteilung), z.B. die Aussage $\delta \in \Theta_1$ mit $\Theta_1 = \Theta \setminus \Theta_0$, also $H_1: \delta \in \Theta_1$ Die Negation wird bezüglich der Menge der zugelassenen Parameterwerte (oder der zugelassenen Wahrscheinlichkeitsverteilungen) gebildet.	
2.2.1	einfache Hypothese		Die Hypothese legt die Wahrscheinlichkeitsverteilung eindeutig fest: $H_0: \delta = \delta_0$	Beispiel für die Parameter (μ, σ^2) der Normalverteilung: $H_0: \mu = \mu_0, \sigma > 0$
2.2.2	zusammengesetzte Hypothese		Es liegt keine einfache Hypothese vor.	
2.3	kritischer Bereich (des Tests)		eine Teilmenge K der Ergebnismenge Ω (siehe dazu z.B. Nr 2.7.4)	Fällt das Ergebnis in den kritischen Bereich, so wird die Nullhypothese verworfen und die Alternativhypothese akzeptiert, andernfalls wird die Nullhypothese nicht verworfen, aber damit die Nullhypothese nicht von vornherein angenommen. Siehe Beispiele zu 2.1.
2.4.1	Operations-Charakteristik		$< \delta \rightarrow P_\delta(\bar{K}) > \Theta$	Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese nicht zu verwerfen.
2.4.2	Gütefunktion		$< \delta \rightarrow P_\delta(K) > \Theta$	Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese zu verwerfen. Die Funktionswerte der Operations-Charakteristik und der Gütefunktion werden für Parameterwerte, die zur Nullhypothese gehören, anders interpretiert als für zur Alternativhypothese gehörige und dementsprechend auch anders benannt. (Siehe Nr 2.5 und Nr 2.6, insbesondere die Bemerkung in Nr 2.6.2). Zur Wahl eines Zeichens für die Gütefunktion siehe Anmerkung zu 2.4.2.