

Mechanik ideal elastischer Körper

Begriffe, Größen, Formelzeichen

DIN

13 316

Mechanics of ideal elastic bodies; concepts, quantities, symbols

Inhalt

	Seite		Seite
1 Geltungsbereich	1	6.2 Definition der Elastizitätsgrößen	7
2 Flächenträger und Längsträger	1	6.3 Lineares Elastizitätsgesetz	8
3 Geometrie der Verformungen (Kinematik)	1	6.4 Zusammenhang zwischen den elastischen Größen	8
3.1 Verrückung und Verformung	1	6.5 Isotherme und adiabatische Elastizitätsgrößen	8
3.2 Verzerrung	3	7 Elastizitätsgrößen des anisotropen ideal elastischen Körpers	9
4 Geometrie der Kräfte (Statik)	4	7.1 Elastizitätsgrößen bei strukturbedingter Anisotropie	9
4.1 Kompatibilitätsbedingungen	4	7.2 Elastizitätsgrößen bei texturbedingter Anisotropie	9
4.2 Spannung	5	Stichwortverzeichnis	9
5 Energie	6		
5.1 Äußere Arbeit	6		
5.2 Formänderungsenergie	7		
6 Kenngrößen der Elastizitätslehre	7		
6.1 Idealisierungen	7		

1 Geltungsbereich

In dieser Norm werden der ideal elastische, homogene, isotrope Körper und kurz der ideal elastische, homogene, anisotrope Körper behandelt, die unter Kraft- oder Temperatureinwirkung kleine Verformungen erfahren (siehe Abschnitt 6.1).

Die Beschränkung auf kleine Verformungen, wobei Kleinheit auch gegen die kleinen Erstreckungen des Körpers gefordert wird, bedeutet mathematisch, daß in den Verzerrungen (siehe Abschnitt 3.2) nur die ersten Potenzen der Verschiebungsableitungen (siehe Abschnitt 3.1.1) auftreten. Damit scheiden Labilitätserscheinungen wie Knicken, Kippen, Beulen für diese Norm aus.

2 Flächenträger und Längsträger

Elastische Körper, die eine oder zwei „kleine“ Abmessungen aufweisen, heißen **Flächen- oder Längsträger** (**Linienträger**). Wegen des großen mathematischen Aufwandes, den die Behandlung des dreidimensionalen Körpers erfordert, hat die Elastizitätstheorie für die technisch wichtigen Flächen- und Längsträger spezielle Theorien entwickelt, welche die Rechnung durch kinematische Näherungsannahmen, z.B. Ebenbleiben der Querschnitte, Erhaltung der Querschnittsgestalt, vereinfachen.

2.1 Flächenträger (Platte, Schale, Scheibe)

Ein Flächenträger heißt **Platte**, wenn er eben, **Schale**, wenn er gekrümmt oder gewunden ist. Herrscht in der Platte ein ebener Spannungszustand parallel zur Oberfläche, so spricht man von einer **Scheibe**.

2.2 Längsträger (Stab, Bogen, Balken)

Ein Längsträger heißt **Stab**, wenn er gerade, **Bogen**, wenn er gekrümmt ist. Wird der Stab verbogen, also nur

senkrecht zu seiner Achse verformt, spricht man von einem **Balken**.

3 Geometrie der Verformungen (Kinematik)

Die geometrischen Veränderungen eines Körpers gegenüber seinem Ausgangszustand werden beschrieben durch **Verrückungen**, **Verformungen** (siehe Abschnitt 3.1) und **Verzerrungen** (siehe Abschnitt 3.2).

3.1 Verrückung und Verformung

Das Wort **Verrückung** dient als Oberbegriff für die beiden Bewegungsarten **Verschiebung** (siehe Abschnitt 3.1.1) und **Verdrehung** (siehe Abschnitt 3.1.2). **Verformung** (siehe Abschnitt 3.1.3) ist die Gestalt- und Volumenänderung eines Körpers.

Anmerkung: Gegenstand der Elastizitätslehre ist nur der Anteil der Verrückungen, der mit einer Verformung verbunden ist, also nicht die Starrkörper-Verrückung.

3.1.1 Verschiebung**3.1.1.1 Verschiebung im Raum**

Die Ortsveränderung eines Punktes im verformten Körper gegenüber seiner Lage im unverformten Zustand heißt **Verschiebung**. Die drei kartesischen Komponenten des Verschiebungsvektors in Richtung der Achsen x, y, z werden mit u, v, w , in Tensorschreibweise (Achsen x_1, x_2, x_3) mit u_1, u_2, u_3 bezeichnet.

Anmerkung: Wenn, wie in der Hydromechanik, u, v, w die Komponenten der Verschiebungsgeschwindigkeit bedeuten, weicht man für die Verschiebungen auf ξ, η, ζ aus. In der Tensorschreibweise sind die Geschwindigkeitskomponenten v_1, v_2, v_3 , wodurch u_1, u_2, u_3 für die Verschiebungen frei werden.

Fortsetzung Seite 2 bis 10

Normenausschuß Einheiten und Formelgrößen (AEF) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V.

Nachdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung des DIN Deutsches Institut für Normung e. V., Berlin, gestattet.

3.1.1.2 Verschiebungen im Flächenträger

Im Flächenträger werden die Tangentialverschiebungen mit u, v oder u_1, u_2 , die Normalverschiebung wird mit w oder u_3 bezeichnet (siehe Bild 1).

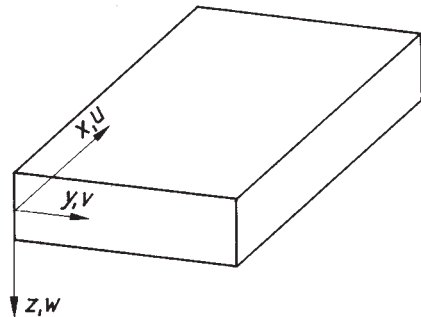


Bild 1.

3.1.1.3 Verschiebungen im Längsträger

Im Längsträger ist u oder u_1 die Längverschiebung, v, w oder u_2, u_3 sind die Querverschiebungen (siehe Bild 2).

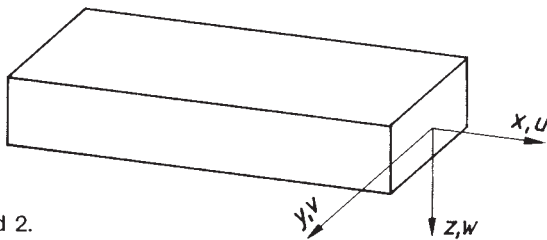


Bild 2.

3.1.2 Verdrehung

3.1.2.1 Verdrehung im Raum

Im dreidimensionalen Körper heißt – bei kleinen Verschiebungen – der Rotor des Verschiebungsvektors Verdrehungsvektor: $\vec{\chi} = \text{rot } \vec{u}$.

In kartesischen Koordinaten gilt:

$$\chi_x = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \chi_y = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right),$$

$$\chi_z = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Anmerkung: Ein dreidimensionales Kontinuum, das von $\vec{\chi}$ unabhängige Verdrehungen erfährt (6 statt 3 Bewegungsfreiheitsgrade), heißt Cosserat-Kontinuum. Flächen- und Längsträger lassen sich als Cosserat-Kontinua von zwei bzw. einer Dimension auffassen.

3.1.2.2 Verdrehungen in der Platte

Bei der Verbiegung einer Platte werden die Verdrehungen der – in sich eben bleibenden – Querschnitte durch die Neigungen der Flächennormalen beschrieben. In der Plattentheorie bezeichnet man die beiden Komponenten des Neigungsvektors ψ_x, ψ_y nach der Neigungsebene x - z , y - z , wobei der Index z wegliebt.

Anmerkung: In der Platte ohne Schubverzerrung (Kirchhoff, Schubverzerrung siehe Abschnitt 3.2.2) ist $\vec{\psi}$ der negative Gradient der Normalverschiebung (Durchsenkung) w :

$$\psi_x = - \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \psi_y = - \frac{\partial w}{\partial y}$$

3.1.2.3 Verdrehungen im Stab

Bei der Torsion des Stabes ist ϑ die Verdrehung des – seinen Umriß nicht ändernden – Querschnittes um die

Längsachse. Bei der Biegung sind Verdrehungen die Neigungen ψ_y, ψ_z der – in sich eben bleibenden – Querschnitte um die Achsen y, z . In der Stabtheorie indiziert man die Komponenten des Verdrehungsvektors nach den Drehachsen:

$$\psi_y, \psi_z, \psi_x = \vartheta$$

Anmerkung 1: Beim Balken ohne Schubverzerrung (Bernoulli) sind ψ_y, ψ_z gleich den Neigungen $-w', v'$ der Balkenmittellinie.

Anmerkung 2: Faßt man den tordierten Stab als dreidimensionales Gebilde auf, so ist ϑ die erste Komponente des Vektors $\vec{\chi}$ (siehe Abschnitt 3.1.2.1). Dagegen stimmt die Verdrehungsdefinition im gebogenen Stab mit der zweiten und dritten Gleichung des Abschnittes 3.1.2.1 in kartesischen Koordinaten nur beim Balken ohne Schubverzerrung überein.

3.1.3 Verformung

Von der Starrkörperbewegung abweichende Verrückungsdifferenzen heißen Verformungen oder Deformationen.

3.1.3.1 Längsverformung

Längsverformung (Längenänderung, Längung) ist beim Stab der Verschiebungsunterschied $\Delta u = u(x+l) - u(x)$ zweier Querschnitte (siehe Bild 3).

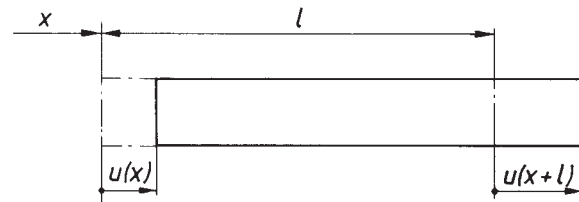


Bild 3.

Anmerkung: Im Versuchswesen ist es üblich, die Längenänderung eines Stabes der Länge l mit Δl zu bezeichnen.

3.1.3.2 Drillwinkel

Der Drillwinkel ist beim Stab der Verdrehungsunterschied $\Delta \vartheta = \vartheta(x+l) - \vartheta(x)$ zweier Querschnitte (siehe Bild 4).

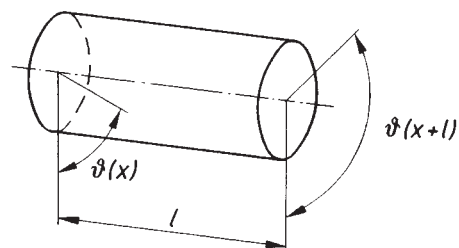


Bild 4.

3.1.3.3 Biegewinkel

Der Biegewinkel ist bei Platte und Balken der Neigungsunterschied $\Delta \psi = \psi(x+l) - \psi(x)$ zweier Querschnitte (siehe Bild 5).

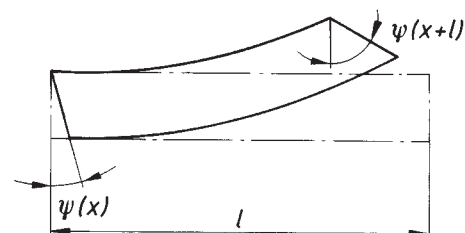


Bild 5.

3.1.3.4 Durchsenkung

Als Durchsenkung bezeichnet man die mit einer Verformung verbundene Platten- oder Balken-Querverschiebung $w(x, y)$ oder $w(x)$.

3.2 Verzerrung

Verzerrung ist das Verhältnis der Verformung zu der entsprechenden Ausgangsabmessung des Körpers.

3.2.1 Längsverzerrung, Dehnung

Das Verhältnis der Längsverformung du zur Ausgangslänge dx eines Körperstückes heißt Längsverzerrung oder Dehnung ε :

$$\varepsilon = \frac{du}{dx}$$

Für die negative Dehnung wird vielfach das Wort Stauchung benutzt.

Anmerkung: Bei dreidimensionaler Verzerrung treten drei Dehnungen

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$

auf.

3.2.2 Schubverzerrung, Schiebung

Erfahren die Eckpunkte eines Flächenelementes dx, dy Verschiebungen in ihrer Ebene senkrecht zu den Seiten, so heißt die Abweichung vom ursprünglich rechten Winkel Schubverzerrung, Schiebung oder Scherung:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = \gamma_{yx} \quad (\text{siehe Bild 6})$$

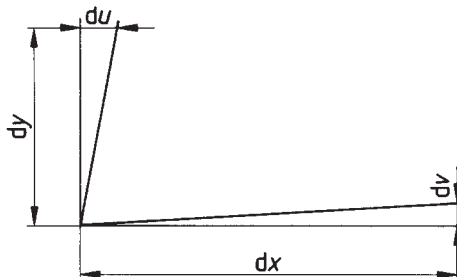


Bild 6.

Anmerkung 1: Bei dreidimensionaler Verzerrung gilt für Schnittflächen parallel zur y - z -Ebene und zur z - x -Ebene:

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = \gamma_{zy}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \gamma_{xz}$$

In der Tensorrechnung wird $\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \gamma_{ik}$ statt γ_{ik} ($i, k = x, y, z; i \neq k$) benutzt.

Anmerkung 2: Das Wort „Gleitung“ soll für bleibende Verformung vorbehalten werden.

3.2.3 Verzerrungstensor

Der aus den drei Dehnungen und den drei halben Schiebungen gebildete Tensor

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

heißt Verzerrungstensor. Er ist symmetrisch zur Hauptdiagonalen.

3.2.4 Hauptdehnungen

Durch Drehung des Koordinatensystems können die Nebenglieder des Tensors ε zu Null gemacht werden. Die so definierten Richtungen heißen Hauptrichtungen 1, 2, 3; die zugehörigen Dehnungen heißen Hauptdehnungen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$.

Anmerkung: In der experimentellen Spannungsanalyse ist es üblich, im Endergebnis die Indizes so zu wählen, daß $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ ist.

3.2.5 Volumenänderung und Gestaltänderung

3.2.5.1 Volumenänderung

Als Volumenänderung, Volumendilatation oder kurz Dilatation bezeichnet man das Verhältnis der Änderung $\Delta(dV)$ zum Ausgangsvolumen:

$$e = \frac{\Delta(dV)}{dV}$$

Bei kleinen Verzerrungen ist:

$$e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Den Tensor

$$\varepsilon^0 = \begin{pmatrix} e/3 & 0 & 0 \\ 0 & e/3 & 0 \\ 0 & 0 & e/3 \end{pmatrix}$$

nennt man den zum Verzerrungstensor gehörigen Kugeltensor; er kennzeichnet die Volumenänderung.

Anmerkung 1: Bei homogener Verformung kann man die Dilatation e als das Verhältnis zweier endlicher Volumina definieren:

$$e = \frac{\Delta V}{V} = \frac{\text{Volumenänderung}}{\text{Ausgangsvolumen}}$$

Anmerkung 2: Statt des Formelzeichens e wird vielfach auch θ geschrieben.

3.2.5.2 Gestaltänderung

Der Resttensor (Deviator) beschreibt die Gestaltänderung des Körpers:

$$\varepsilon^{\text{Dev}} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} - e/3 & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} - e/3 & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} - e/3 \end{pmatrix}$$

Tabelle 1. Übersicht zu Abschnitt 3.1

	Verrückungen	
	Verschiebungen u, v, w	Verdrehungen ψ_x, ψ_y (Neigungen) $\vartheta; \psi_y, \psi_z$
Platte (Scheibe) Stab (Balken)	u, v, w	$\vartheta; \psi_y, \psi_z$
	Verformungen	
	Δu , speziell Δl w (Durchsenkung)	$\Delta \vartheta$ (Drillwinkel) $\Delta \psi$ (Biegewinkel)
Stab Balken und Platte		