

Elektrische Netze

Algebraisierung der Topologie und Grundlagen der Berechnung elektrischer Netze

DIN
13 322
Teil 2

Electrical networks; algebraification of topology and fundamentals of electrical network calculation

1 Anwendungsbereich und Zweck

Während in DIN 13322 Teil 1 Grundbegriffe der Topologie elektrischer Netze und der Graphentheorie zusammengestellt sind, werden in der vorliegenden Norm die entsprechenden algebraischen Darstellungen wiedergegeben. Grundsätzlich können viele Ergebnisse der Topologie der Netze rein algebraisch beschrieben und bewiesen werden.

In dieser Norm wird ein Verbraucher-Bezugspfeilsystem zugrundegelegt. Somit ist $UI > 0$, falls durch einen positiven Ohmschen Widerstand Gleichstrom fließt; bei Wechselstrom ergibt sich in der Darstellung der komplexen Rechnung $\text{Re}(UI^*) > 0$.

Zur Berechnung elektrischer Netze werden im wesentlichen drei Methoden verwendet: Trennmengenanalyse (speziell: Knotenanalyse), Maschenanalyse (speziell: Fenstermaschenanalyse), Zustandsanalyse.

Dabei werden für lineare Zweipolnetze nur die Kirchhoffschen Gesetze (Knoten- und Maschenregel) und eine lineare Strom-Spannungs-Beziehung (z.B. Ohmsches Gesetz) benutzt.

Trennmengen- und Maschenanalyse sind zueinander dual. Die Fenstermaschenanalyse ist nur bei Netzen mit planaren Graphen (siehe DIN 13322 Teil 1, Ausgabe 04.88, Abschnitt 5.2) anwendbar.

Zur Durchführung der Analysen empfiehlt es sich, die Netztopologie zu algebraisieren. Dazu dienen Inzidenzmatrizen gerichteter Graphen. Ihre Zweigorientierung ist bei dem gewählten Verbraucher-Bezugspfeilsystem identisch mit der Bezugsrichtung von Zweigstrom und -spannung. Es werden nur zusammenhängende Graphen betrachtet, da untereinander separierte Teilnetze für sich analysiert werden können.

2 Formelzeichen

Über die in DIN 1303 und in DIN 5487 empfohlene Schreibweise von Vektoren und Matrizen bzw. Laplace-Transformierten hinaus werden in dieser Norm grundsätzlich folgende Schreibweisen verwendet:

- a) Vektoren und Matrizen sind halbfett gesetzt; Kleinbuchstaben für Vektoren, Großbuchstaben für Matrizen.
- b) $\mathbf{f}_k$ Vektor mit den Zeitfunktionen $f_1, f_2, \dots, f_k$ als Koordinaten
- c) $\tilde{\mathbf{f}}_k$ Vektor mit den Laplace-Transformierten $F_1, F_2, \dots, F_k$ als Koordinaten

d) $\mathbf{A}_m^n$ (lies: A m n) rechteckige Teilmatrix von $\mathbf{A}$ mit m Zeilen und n Spalten

$\mathbf{A}^z$ Teilmatrix aus allen Zeilen und z Spalten von $\mathbf{A}$

$\mathbf{A}_r$ r -reihige (quadratische) Teilmatrix von $\mathbf{A}$; „Teilmatrix“ schließt hier die „Gesamtmatrix“ ein.

e) $\mathbf{a}_{\mu \cdot}$ Zeile μ } der Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{A}_m^n$
 $\mathbf{a}_{\cdot \nu}$ Spalte ν }

f) $\mathbf{B}_R^C$ (lies: B R C) diejenige Teilmatrix einer fundamentalen Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix, die die Inzidenzen der Fundamentalmaschen aller Widerstände in Verbindungszweigen mit allen Kondensatoren in Baumzweigen beschreibt (siehe Abschnitt 8 über Zustandsanalyse).

$(\mathbf{B}_R^C)^T = \mathbf{B}_C^R$ Transponierte von $\mathbf{B}_R^C$

3 Inzidenzmatrizen zur Trennmengenanalyse

3.1 Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix

3.1.1 Die Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix $\mathbf{A}$ eines schlingenfreien gerichteten Graphen besteht aus $r(=v-1)$ Zeilen und e Spalten. Das Element a_{qe} in der Zeile q und der Spalte e ist:

$$a_{qe} = \begin{cases} +1, & \text{falls der Zweig } e_e \text{ mit dem Knoten } v_q \text{ inzidiert} \\ & \text{und von ihm weg gerichtet ist} \\ -1, & \text{falls der Zweig } e_e \text{ mit dem Knoten } v_q \text{ inzidiert} \\ & \text{und auf ihn zu gerichtet ist} \\ 0, & \text{falls der Zweig } e_e \text{ nicht mit dem Knoten } v_q \text{ inzidiert.} \end{cases}$$

Eine vorteilhafte Knotenbenummerung ordnet einem beliebig ausgewählten Bezugsknoten die Nummer 0 zu und benummt die Knoten mit steigendem Abstand vom Bezugsknoten. In Übereinstimmung damit ergibt sich eine geeignete Zweigbenummerung, indem ein am Knoten v_q inzidenter Zweig die Nummer q bekommt, falls er mit einem Knoten geringeren Abstandes inzidiert. Die restlichen $e-r$ Zweige werden danach ebenfalls entsprechend dem Abstand ihrer Knoten vom Bezugsknoten benummt. Die Zweige orientiert man vorzugsweise in Richtung fallender Knotennummern.

Fortsetzung Seite 2 bis 9

Normenausschuß Einheiten und Formelgrößen (AEF) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V.
Deutsche Elektrotechnische Kommission im DIN und VDE (DKE)

Jede Art der Vervielfältigung, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung des DIN Deutsches Institut für Normung e.V., Berlin, gestattet.

Beispiel 1:

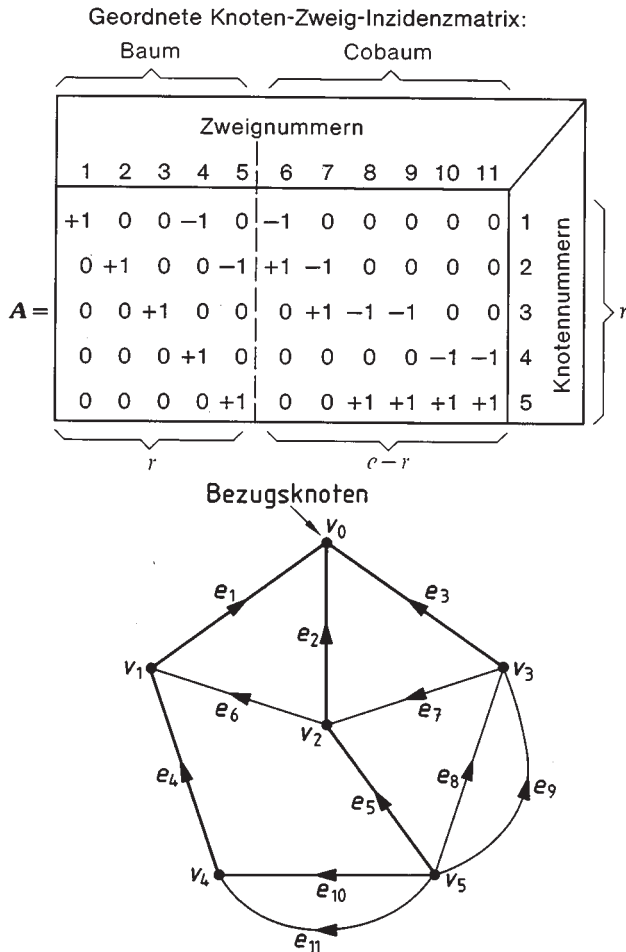


Bild 1. Graph zum Beispiel 1; Baumzweige dick, Verbindungszweige dünn

3.1.2 Addiert man alle Spaltenvektoren von Zweigen eines Weges (siehe DIN 13322 Teil 1, Ausgabe 04.88, Abschnitt 4.1.2), bei denen Zweigorientierung und Wegrichtung übereinstimmen, und subtrahiert alle Spaltenvektoren der restlichen Wegzweige, dann verbleiben im Summenvektor nur die Inzidenzelemente der Endknoten. Fallen beide Endknoten zusammen, d.h. bildet der Weg eine Masche, resultiert als Summe der Nullvektor.

Beispiel 2: (Masche der Zweige e_1, e_2, e_6 in Bild 1)

$$\mathbf{a}_{\bullet 1} - \mathbf{a}_{\bullet 2} + \mathbf{a}_{\bullet 6} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0)^T$$

Beispiel 3: (Weg der Zweige e_4, e_6, e_{10} in Bild 1)

$$\mathbf{a}_{\bullet 4} - \mathbf{a}_{\bullet 6} + \mathbf{a}_{\bullet 10} = (0 \ -1 \ 0 \ 0 \ 1)^T$$

3.2 Trennmengen-Zweig-Inzidenzmatrix

Die Trennmengen-Zweig-Inzidenzmatrix $\mathbf{C}$ eines schlingenfreen gerichteten Graphen besteht aus $r = (v-1)$ Zeilen und e Spalten. Das Element c_{qe} in der Zeile q und der Spalte e ist:

$$c_{qe} = \begin{cases} +1, & \text{falls der Zweig } e_e \text{ zur Trennmengen mit der Nummer } q \text{ gehört und beide Orientierungen übereinstimmen} \\ -1, & \text{falls der Zweig } e_e \text{ zur Trennmengen mit der Nummer } q \text{ gehört und beide Orientierungen entgegengesetzt sind} \\ 0, & \text{falls der Zweig } e_e \text{ nicht zur Trennmengen mit der Nummer } q \text{ gehört.} \end{cases}$$

Spezielle Trennmengen bestehen aus denjenigen Zweigen, die jeweils mit einem Knoten inzidieren. Läßt man dabei die Trennmengen des Bezugsknotens unberücksichtigt und orientiert die anderen r Knoten-Trennmengen nach außen, d.h. von ihrem Knoten weg, dann ist $\mathbf{C}$ mit $\mathbf{A}$ identisch.

Die zu einem Baum gehörenden Fundamentaltrennmengen sind untereinander linear unabhängig. Jeder der r Baumzweige gehört zu genau einer Trennmengen, die außer dem Baumzweig nur noch Verbindungszweige enthält. Man wählt zweckmäßig übereinstimmende Benummerung und Orientierung für die Trennmengen und ihren Baumzweig. Damit erscheint die Trennmengen-Zweig-Inzidenzmatrix in ihrer Fundamentalfarm:

$$\mathbf{C}_f = (\mathbf{1}_r \mid \mathbf{C}_r^m) \quad (1)$$

Beispiel 4:

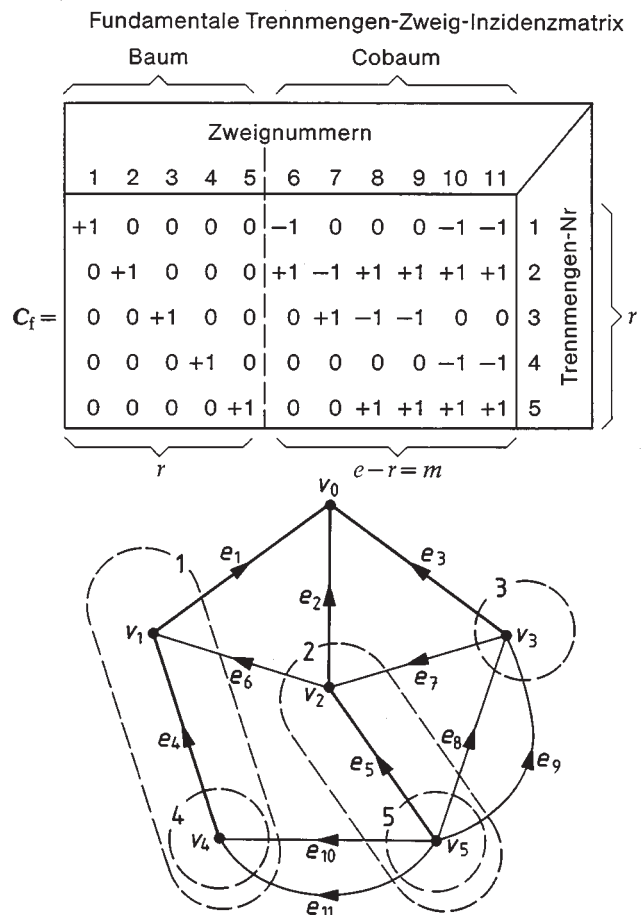


Bild 2. Graph zum Beispiel 4; Baumzweige dick; Verbindungszweige dünn; Trennmengen durch Strichelung gekennzeichnet

4 Inzidenzmatrix zur Maschenanalyse

Die Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix $\mathbf{B}$ eines schlingenfreen gerichteten Graphen besteht aus $m = e - r$ Zeilen und e Spalten. Das Element $b_{\mu e}$ in der Zeile μ und der Spalte e ist:

$$b_{\mu e} = \begin{cases} +1, & \text{falls der Zweig } e_e \text{ zur Masche mit der Nummer } \mu \text{ gehört und beide Orientierungen übereinstimmen} \\ -1, & \text{falls der Zweig } e_e \text{ zur Masche mit der Nummer } \mu \text{ gehört und beide Orientierungen entgegengesetzt sind} \\ 0, & \text{falls der Zweig } e_e \text{ nicht zur Masche mit der Nummer } \mu \text{ gehört.} \end{cases}$$

Bei ebenen Graphen verlaufen spezielle Maschen entlang der Innengebiete (Fenster) und im Außengebiet. Ohne die Außenmasche sind die Fenstermaschen untereinander linear unabhängig.

Die zu einem Baum gehörenden Fundamentalmaschen sind untereinander linear unabhängig. Jeder der m Verbindungszweige gehört zu genau einer Masche, die allein über Baumzweige geschlossen wird. Zweckmäßig benummt man die Maschen in gleicher Reihenfolge wie ihre Verbindungszweige und übernimmt deren Richtung als Maschenorientierung. Damit erscheint die Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix in ihrer Fundamentalfarm:

$$B_f = (B_m^r | 1_m) \quad (2)$$

Beispiel 5:

Maschen-Zweig-Inzidenzmatrix

Baum

Cobaum

Zweignummern

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

+1	-1	0	0	0	+1	0	0	0	0	0	1
0	+1	-1	0	0	0	+1	0	0	0	0	2
0	-1	+1	0	-1	0	0	+1	0	0	0	3
0	-1	+1	0	-1	0	0	0	+1	0	0	4
+1	-1	0	+1	-1	0	0	0	0	+1	0	5
+1	-1	0	+1	-1	0	0	0	0	0	+1	6

Maschennummern

m

$e - m = r$

m

Bild 3. Graph zum Beispiel 5;
Baumzweige dick, Verbindungszweige dünn; Maschen gestrichelt

5 Eigenschaften der Inzidenzmatrizen

5.1 Orthogonalität

Aus Abschnitt 3.1.2 resultiert

$$AB^T = 0 \quad (3a)$$

und allgemeiner

$$BC^T = 0, \quad (3b)$$

d.h. jede Masche hat mit jeder Trennmengen eine gerade Anzahl von Zweigen gemeinsam; bei der einen Hälfte der Zweige stimmen Maschen- und Trennmengenorientierung

überein, während sie bei der anderen Hälfte entgegengesetzt sind. Maschen-Zweig- und Trennmengen-Zweig-Inzidenzmatrix sind orthogonal zueinander. Die m Zeilenvektoren von B dienen als Basisvektoren des m -dimensionalen Maschenraumes, die r Zeilenvektoren von $C(A)$ als Basisvektoren des r -dimensionalen Trennmengenraumes.

Beide Räume sind orthogonale und komplementäre Unterräume des $e(=m+r)$ -dimensionalen linearen Zweigraumes eines Graphen.

5.2 Beziehungen unter den Inzidenzmatrizen, Wegmatrix

Da jede Inzidenzmatrix die Topologie eines Graphen beschreibt, kann man alle Inzidenzmatrizen aus einer Knoten-Zweig-Inzidenzmatrix A ableiten. Mit der Partition

$$A = (P_r^{-1} | A_r^m) \quad (4)$$

$$\text{und Rang } A = \text{Rang } P_r = r \quad (5)$$

gewinnt man eine fundamentale Trennmengen-Zweig-Inzidenzmatrix:

$$C_f = P_r A \quad (6)$$

D.h. es ist:

$$C_r^m = P_r A_r^m \quad (7)$$

Wegen der Orthogonalität von B_f und C_f besteht bei Bezug auf denselben Baum die Beziehung:

$$B_m^r = -(C_r^m)^T \quad (8)$$

Zu den Baumzweigen von P_r^{-1} ist P_r die Wegmatrix und kann deshalb direkt dem gerichteten Graphen entnommen werden. Die quadratische Wegmatrix hat die Ordnung r , ihre Zeilen entsprechen den Baumzweigen und ihre Spalten den gerichteten Wegen innerhalb des Baumes von jedem Knoten zum Bezugsknoten von A .

Das Element p_{ij} von P_r ist:

$$p_{ij} = \begin{cases} +1, & \text{falls der Baumzweig } e_i \text{ innerhalb des Weges vom Knoten } v_j \text{ zum Bezugsknoten liegt und Zweigorientierung mit Wegrichtung übereinstimmt} \\ -1, & \text{falls der Baumzweig } e_i \text{ innerhalb des Weges vom Knoten } v_j \text{ zum Bezugsknoten liegt und die Zweigorientierung entgegengesetzt zur Wegrichtung verläuft} \\ 0, & \text{falls der Baumzweig } e_i \text{ nicht mit dem Weg vom Knoten } v_j \text{ zum Bezugsknoten inzidiert.} \end{cases}$$

Die von null verschiedenen Elemente in jeweils einer Zeile von P_r sind gleich. Mit der in Abschnitt 3.1 vorgeschlagenen Zweigorientierung enthält P_r nur die Zahlen 0 bzw. 1.

Beispiel 6:

Aus Bild 1 ermittelt man folgende Wegmatrix:

Knotennummer = Wegnummer					
1	2	3	4	5	
1	0	0	1	0	1
0	1	0	0	1	2
0	0	1	0	0	3
0	0	0	1	0	4
0	0	0	0	1	5

Baumzweig-Nr