

Linear-viskoelastische Stoffe

Begriffe, Stoffgesetze, Grundfunktionen

DIN
13 343

ICS 17.060; 01.060.20; 01.040.17

Linear viscoelastic materials;
 Concepts, constitutive equations, basic functions

Inhalt

	Seite		Seite
1 Anwendungsbereich	1	5.1.1 Kelvin-Voigt-Körper	5
2 Einfache Verformungen, Verformungsleistung	1	5.1.2 Maxwell-Flüssigkeit	5
2.1 Einfache Dehnung	2	5.2 Drei- und Vier-Parameter-Stoffe	6
2.2 Einfache Scherung	2	5.2.1 Drei-Parameter-Festkörper	
2.3 Gleichförmige Kontraktion	2	(Poynting-Thomson-Körper)	6
2.4 Verformungsleistung	2	5.2.2 Drei-Parameter-Flüssigkeit	
3 Einteilung der Stoffe	2	(Jeffreys-Flüssigkeit)	6
3.1 Reinelastischer Festkörper, hookescher Körper	2	5.2.3 Vier-Parameter-Festkörper	7
3.2 Reinviskose Flüssigkeit, newtonsche Flüssigkeit	2	5.2.4 Vier-Parameter-Flüssigkeit	
3.3 Viskoelastische und linear-viskoelastische Stoffe	3	(Burgers-Flüssigkeit)	7
4 Grundversuche und Grundfunktionen	3	5.3 n-Parameter-Stoffe	7
4.1 Grundversuche mit sprungartiger Beanspruchung	3	6 Viskoelastische Stoffe mit kontinuierlichen	
4.1.1 Kriech- und Kriecherholungsversuch	3	Spektren	9
4.1.2 Spann- und Relaxationsversuch	3	7 Abstrakte Formulierung und Struktur der linearen	
4.2 Grundversuche mit impulsartiger Beanspruchung	3	Theorie der viskoelastischen Stoffe	10
4.2.1 Kriecherholungsversuch nach impulsartiger		7.1 Operatoren, ihre Darstellungen und Eigenwerte	10
Spannungsbeanspruchung	3	7.2 Struktur der linearen Theorie	10
4.2.2 Relaxationsversuch nach impulsartiger		8 Verallgemeinerung der linearen Theorie der	
Verformungsbeanspruchung	4	Viskoelastizität für beliebige Verformungen	11
4.3 Verknüpfung beliebiger Spannungs- und		8.1 Spannungs- und Deformationstensor	11
Verformungsverläufe mittels der Grundfunktionen		8.2 Das allgemeine Stoffgesetz für	
der sprungartigen und impulsartigen		isotrope viskoelastische Stoffe	11
Beanspruchung	4	Zitierte Normen und andere Unterlagen	12
4.4 Grundversuche mit harmonisch-periodischer		Erläuterungen	12
Beanspruchung	4	Stichwortverzeichnis	13
5 Viskoelastische Stoffe mit diskreten Spektren			
(n-Parameter-Stoffe)	5		
5.1 Zwei-Parameter-Stoffe	5		

1 Anwendungsbereich

Diese Norm gilt nur für das rheologische Verhalten viskoelastischer Stoffe im linearen Beanspruchungsbereich; deshalb wird von darüber hinaus geltenden Begriffen nicht in ihrem vollen Bedeutungsumfang Gebrauch gemacht. Alle Aussagen gelten für ein typisches Volumenelement im Sinne der Kontinuumsmechanik.

Auf endliche Volumina können diese deshalb nur angewendet werden, wenn der Stoff unter den jeweiligen Versuchsbedingungen als makroskopisch homogen betrachtet werden kann und einer ortsunabhängigen Verformungsgeschichte unterworfen worden ist. Entsprechend bleiben Einflüsse der Massenträgheit außer Betracht, da diese nicht das Spannungs-Verformungs-Verhalten des Stoffes selbst betreffen, auch wenn sie für die sich darin abspielenden Vorgänge von Bedeutung sind und bei deren Beschreibung mitberücksichtigt werden müssen.

In dieser Norm werden auch Stoffgemische (Stoffsysteme) kurz als Stoffe (das ist der Oberbegriff für Festkörper und Fluide) bezeichnet. Die auf Flüssigkeiten bezogenen Aussagen gelten grundsätzlich für alle Fluide, wenngleich die Gesetze des viskoelastischen Stoffverhaltens vorwiegend für Flüssigkeiten im engeren Sinne von praktischer Bedeutung sind. Von der Einbeziehung anisotroper Stoffe wird abgesehen, da deren Behandlung einen unverhältnismäßig größeren mathematischen Aufwand erfordern würde.

2 Einfache Verformungen, Verformungsleistung

Rheologische Stoffgesetze stellen im allgemeinen Funktionalbeziehungen zwischen den Vorgeschichten des Spannungstensors und des Deformationstensors dar. Als **einfache** Verformungen oder Deformationen werden solche Verformungen bezeichnet, bei denen der Span-

Fortsetzung Seite 2 bis 14

Normenausschuß für Einheiten und Formelgrößen (AEF) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V.


Documents

Document Sharing Hub

nungs- und Deformationstensor jeweils durch eine oder höchstens zwei skalare Größen gekennzeichnet werden können. Hierzu gehören die einfache Dehnung, die einfache Scherung und die gleichförmige Kontraktion (siehe DIN 13 316).

2.1 Einfache Dehnung

Einfache Dehnung liegt z. B. bei der Zug- bzw. Stauchverformung einer stabförmigen Probe eines homogenen Stoffes in der Achsenrichtung vor. Die relative Längenänderung (bezogen auf den Anfangs-, den End- oder den momentanen Zustand) wird als Dehnung (oder Längsdehnung) ε bezeichnet, das negative Verhältnis von Querdehnung zu Längsdehnung als **Poissonzahl** μ . Ist $\varepsilon > 0$, wird die Dehnung auch **uniaxiale Dehnung** genannt, ist $\varepsilon < 0$, dagegen **biaxiale Dehnung** oder **Stauchung**. Die erzeugende Spannung, d. h. die Zugkraft, dividiert durch den momentanen Querschnitt (seltener: den Anfangsquerschnitt), ist die **Dehnspannung** σ (negativ bei Stauchung).

2.2 Einfache Scherung

Einfache Scherung liegt z. B. bei der Verformung einer plattenförmigen Probe eines homogenen Stoffes in einer in seinem großen Begrenzungsflächenpaar liegenden Richtung vor. Der Quotient aus Verschiebung und Plattendicke heißt Scherung γ . Die sie erzeugende Spannung, d. h. die auf die Plattenfläche bezogene Schubkraft, heißt die **Schubspannung** (oder **Scherspannung**) τ .

2.3 Gleichförmige Kontraktion

Gleichförmige Kontraktion liegt bei der Volumenverkleinerung eines beliebig geformten homogenen Probekörpers vor, derart, daß das Ausgangs- und das momentane Volumen geometrisch ähnlich sind. Die relative Volumenverminderung (bezogen auf den Anfangs-, den End- oder den momentanen Zustand) wird als **Volumenkontraktion** ζ bezeichnet. Die sie erzeugende (negative) Spannung, d. h. die auf ein Oberflächenelement bezogene und senkrecht auf dieses wirkende Kraft, heißt der isotrope Druck p .

ANMERKUNG 1: Statt der Volumenkontraktion ζ wird häufig ihr negativer Wert, die Volumendilatation ϑ verwendet (siehe DIN 1304 Teil 1).

ANMERKUNG 2: Die verschiedenen Möglichkeiten der Definition von Zugdehnung ε und Volumenkontraktion ζ führen in der Theorie der endlichen Verformungen zu unterschiedlichen Verformungsmaßen. Da aber eine lineare Theorie in der Regel auf sehr kleine Verformungen beschränkt ist, benötigt man hier nur die sogenannten „infinitesimalen“ Verformungsmaße, für welche die Unterschiede bei verschiedener Wahl der Bezugsgrößen als klein von höherer Ordnung vernachlässigt werden können.

2.4 Verformungsleistung

Die bei den einfachen Verformungen aufgebrachte volumenbezogene Verformungsleistung ergibt sich zu

$$\dot{w}_E = \sigma \dot{\varepsilon}, \quad \dot{w}_G = \tau \dot{\gamma}, \quad \dot{w}_K = p \dot{\zeta}, \quad (1)$$

wobei w die volumenbezogene Arbeit und der übergestellte Punkt die substantielle Zeitableitung bedeuten (siehe Abschnitt 8.1).

3 Einteilung der Stoffe

3.1 Reinelastischer Festkörper, hookescher Körper

Ein mechanisch belasteter Stoff verhält sich als Festkörper (siehe DIN 13 316), wenn er bei beliebig langer Einwirkungs-dauer auch beträchtlicher Spannungen nach Wegnahme der Belastung seine ursprüngliche Gestalt wieder annimmt. Der Festkörper heißt reinelastisch (kurz: elastisch), wenn

der Momentanwert der Verformung nur vom Momentanwert der Spannung abhängt. Bezugszustand für die Verformung ist in der Regel der spannungsfreie Zustand. Die gesamte Verformungsarbeit wird dabei als elastische Energie gespeichert und kann bei der Entlastung vollständig zurückgewonnen werden.

Ist die Beziehung zwischen Spannung und Verformung linear, so heißt der Festkörper linear-reinelastisch und wird kurz als hookescher Körper bezeichnet. Für die oben definierten einfachen Verformungen nimmt das Hookesche Gesetz folgende Gestalt an:

$$\sigma = E\varepsilon, \quad \tau = G\gamma, \quad p = K\zeta; \quad (2)$$

dabei werden die Stoffkonstanten E als **Elastizitätsmodul** (kurz: E -Modul), G als **Schubmodul** (auch Scher- oder Torsionsmodul) und K als **Kompressionsmodul** (oder Volumenmodul) bezeichnet. Ihre Kehrwerte heißen **Dehnkomplianz** $D = 1/E$, **Scherkomplianz** $J = 1/G$ und **Volumenkomplianz** $B = 1/K$. Ein Stoff, für den $K \gg G$ bzw. $B \ll J$ (idealisiert: $K = \infty$ bzw. $B = 0$) gilt, wird als dichtebeständig oder inkompressibel bezeichnet.

Wenn die Änderung der Dichte ρ vernachlässigt werden kann, ergibt sich für die vollständig als Energie gespeicherte Verformungsarbeit

$$w_E = \frac{E}{2} \varepsilon^2, \quad w_G = \frac{G}{2} \gamma^2, \quad w_K = \frac{K}{2} \zeta^2. \quad (3)$$

ANMERKUNG 1: Bei realen Festkörpern ist der linear-reinelastische (hookesche) Bereich auf kleine Spannungen und Verformungen beschränkt.

ANMERKUNG 2: Wird das Wort „Körper“ in Verbindung mit einem Namen verwendet, so hat es stets die Bedeutung „Festkörper“.

3.2 Reinviskose Flüssigkeit, newtonsche Flüssigkeit

Ein mechanisch belasteter Stoff verhält sich als Flüssigkeit (siehe DIN 13 342), wenn eine beliebig kleine, von einem isotropen Druck verschiedene Spannung bei hinreichend langer Einwirkungs-dauer zu beliebig großen bleibenden Verformungen führt. Eine Flüssigkeit heißt reinviskos (kurz: viskos), wenn der Momentanwert der Verformungsgeschwindigkeit nur vom Momentanwert der Spannung abhängt. Die gesamte Verformungsarbeit wird dabei irreversibel in Wärme verwandelt.

Ist die Beziehung zwischen Spannung und Verformungsgeschwindigkeit linear, so heißt die Flüssigkeit linear-reinviskos und wird kurz als newtonsche Flüssigkeit bezeichnet. Für die oben definierten einfachen Verformungen nimmt das Newtonsche Gesetz folgende Gestalt an:

$$\sigma = \eta_E \dot{\varepsilon}, \quad \tau = \eta \dot{\gamma}; \quad (4)$$

dabei werden die Stoffkonstanten η_E als **Dehnaviskosität** und η als **Scherviskosität** bezeichnet. Ihre Kehrwerte heißen **Dehnfluidität** $\varphi_E = 1/\eta_E$ und **Scherfluidität** $\varphi = 1/\eta$. Für die gleichförmige Kontraktion läßt sich ein Newtonsches Gesetz nicht formulieren, denn auch Flüssigkeiten zeigen bezüglich Volumenänderungen festkörperartige Eigenschaften. Im Falle von hookeschem Verhalten ist ihnen somit zusätzlich ein Kompressionsmodul zugeordnet. Für viele Anwendungsfälle können Flüssigkeiten (im engeren Sinne) als dichtebeständig betrachtet werden. Es gilt dann $\eta_E = 3\eta$ (siehe Abschnitt 8.2).

Kann die Änderung der Dichte ρ vernachlässigt werden, ergibt sich für die vollständig dissipierte volumenbezogene Verformungsleistung

$$\dot{w}_E = \eta_E \dot{\varepsilon}^2, \quad \dot{w}_G = \eta \dot{\gamma}^2. \quad (5)$$

ANMERKUNG 1: Häufig werden linear-reinviskose Flüssigkeiten nur dann als newtonsche Flüssigkeiten

ten bezeichnet, wenn sie dichtebeständig sind. Dies ist um so mehr gerechtfertigt, als Flüssigkeiten, deren Scherverhalten durch eine Scherviskosität η und deren Kontraktionsverhalten durch einen Kompressionsmodul K beschrieben werden, ein komplizierteres, nämlich viskoelastisches Dehnverhalten zeigen. Hier ist es deshalb angemessener, statt von einer newtonschen Flüssigkeit schlechthin von einer Flüssigkeit mit newtonschem Scherverhalten (allgemeiner: Gestaltänderungsverhalten) zu sprechen.

ANMERKUNG 2: Bei Gasen, für die kein spannungsfreier Zustand mit endlicher Dichte existiert, muß der Kompressionsmodul mittels differentieller Volumen- und Druckänderungen definiert werden. Für barotrope Änderungen ($q = q(p)$) gilt unter der Voraussetzung des Gesetzes des idealen Gases $K = q(dp/dq)$.

3.3 Viskoelastische und linear-viskoelastische Stoffe

Stoffe, die nebeneinander sowohl elastische als auch viskose Eigenschaften aufweisen, werden als viskoelastische Stoffe bezeichnet. Entsprechend wird die Verformungsarbeit teilweise elastisch gespeichert, teilweise aber irreversibel in Wärme umgewandelt. Die zugehörigen rheologischen Stoffgesetze sind nicht mehr als Beziehungen zwischen den Momentanwerten von Spannung und Verformung bzw. Spannung und Verformungsgeschwindigkeit darstellbar, sondern enthalten grundsätzlich die gesamten Verläufe bis zum Beobachtungszeitpunkt, die sogenannten **Vorgeschichten**.

Viskoelastische Stoffe, deren rheologisches Verhalten dem **Boltzmannschen Superpositionsprinzip** gehorcht, werden als linear-viskoelastische Stoffe bezeichnet. Dieses Prinzip besagt, daß, wenn jeweils zwei Spannungs- und Verformungsverläufe einander zugeordnet sind, dies auch für die Vielfachen und die Summen beider zutrifft.

4 Grundversuche und Grundfunktionen

Zur Kennzeichnung der rheologischen Eigenschaften linear-viskoelastischer Stoffe eignen sich besonders deren Reaktionen auf gewisse einfache Beanspruchungsverläufe, die sogenannten Grundversuche. Hierbei können entweder der Spannungs- oder der Verformungsverlauf vorgegeben werden. Man unterscheidet durchweg drei Typen von Grundversuchen, nämlich solche mit sprungartiger, impulsartiger und harmonisch-periodischer (sinusförmiger) Beanspruchung. Durch die aus diesen Grundversuchen abgeleiteten Grundfunktionen lassen sich beliebige Spannungs- und Verformungsverläufe in einfacher Weise zueinander in Beziehung setzen.

Die nachfolgenden Ausführungen werden explizit nur in der Bezeichnungsweise der einfachen Scherung formuliert. Sie lassen sich aber unmittelbar auch auf die einfache Dehnung und (mit im einzelnen angemerkten Einschränkungen) auf die gleichförmige Kontraktion übertragen.

4.1 Grundversuche mit sprungartiger Beanspruchung

Die Heaviside-Funktion (Einheitssprung) werde durch

$$H(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } -\infty < t \leq 0 \\ 1 & \text{für } 0 < t < \infty \end{cases} \quad (6)$$

definiert.

ANMERKUNG: An der Stelle $t=0$ sind auch andere Definitionen gebräuchlich, insbesondere $H(0) = 1/2$, doch ist die obige Definition für die folgenden Zwecke besonders günstig.

4.1.1 Kriech- und Kriecherholungsversuch

Beim Kriechversuch wird der Spannungsverlauf in Form einer Sprungfunktion

$$\tau(t) = \tau_0 H(t) \quad (7)$$

vorgegeben. Der zugehörige Verformungsverlauf

$$y(t) = \tau_0 J^+(t) \quad (8)$$

liefert eine Grundfunktion $J^+(t)$, die als **Kriechkomplianz** bezeichnet wird.

Ergänzt man den Kriechversuch durch einen Kriecherholungsversuch in der Weise, daß nach einer Zeit Δt die Spannung wieder sprunghaft weggenommen wird,

$$\tau(t) = \tau_0 [H(t) - H(t - \Delta t)], \quad (9)$$

so stellt sich (gemäß dem Superpositionsprinzip) der Verformungsverlauf wie folgt dar:

$$y(t) = \tau_0 [J^+(t) - J^+(t - \Delta t)]. \quad (10)$$

4.1.2 Spann- und Relaxationsversuch

Beim Spannversuch wird die Verformungsgeschwindigkeit in Form einer Sprungfunktion

$$\dot{y}(t) = \dot{y}_0 H(t) \quad (11)$$

vorgegeben, was einem bei null beginnenden linearen Anstieg der Verformung selbst entspricht:

$$y(t) = \dot{y}_0 t H(t). \quad (12)$$

Der zugehörige Spannungsverlauf

$$\tau(t) = \dot{y}_0 \eta^+(t) \quad (13)$$

liefert dann eine Grundfunktion $\eta^+(t)$, die als **Spannviskosität** bezeichnet wird.

Ergänzt man den Spannversuch durch einen Relaxationsversuch in der Weise, daß nach einer Zeit Δt die Verformungsgeschwindigkeit sprunghaft auf null zurückgenommen, d. h. die Verformung konstant gehalten wird, also

$$\dot{y}(t) = \dot{y}_0 [H(t) - H(t - \Delta t)], \quad (14)$$

$$y(t) = \dot{y}_0 [t H(t) - (t - \Delta t) H(t - \Delta t)] \quad (15)$$

gilt, so stellt sich der Spannungsverlauf wie folgt dar:

$$\tau(t) = \dot{y}_0 [\eta^+(t) - \eta^+(t - \Delta t)]. \quad (16)$$

4.2 Grundversuche mit impulsartiger Beanspruchung

Die Dirac-Funktion (Delta-Distribution, Einheitsstoß) werde formal durch

$$\delta(t) = \frac{dH(t)}{dt} \quad (17)$$

definiert, d. h., es gelte $\delta(t) = 0$ für $t \neq 0$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = \int_0^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (18)$$

ANMERKUNG: Eine Änderung der oben gegebenen Definition von $H(t)$ zieht auch eine solche von $\delta(t)$ nach sich. Setzt man in symmetrischer Weise $H(0) = 1/2$, so folgt entsprechend

$$\int_{-\infty}^0 \delta(t) dt = \int_0^{\infty} \delta(t) dt = \frac{1}{2}. \quad (19)$$

4.2.1 Kriecherholungsversuch nach impulsartiger Spannungsbeanspruchung

Hierbei läßt man die Dauer Δt der Beanspruchung gegen null gehen, derart, daß der „Spannungsstoß“ $T_0 = \tau_0 \Delta t$ einen endlichen Wert behält:

$$\tau(t) = T_0 \delta(t). \quad (20)$$

Der zugehörige Verformungsverlauf

$$\gamma(t) = T_0 \frac{dJ^+(t)}{dt} = T_0 \varphi^+(t) \quad (21)$$

liefert eine weitere Grundfunktion $\varphi^+(t) = dJ^+(t)/dt$, die als **Retardationsfluidität** bezeichnet wird.

4.2.2 Relaxationsversuch nach impulsartiger Verformungsbeanspruchung

Hierbei läßt man die Dauer Δt des Verformungsvorgangs gegen null gehen, derart, daß die Verformung $\gamma_0 = \dot{\gamma}_0 \Delta t$ selbst einen endlichen Wert behält:

$$\dot{\gamma}(t) = \gamma_0 \delta(t), \quad \gamma(t) = \gamma_0 H(t). \quad (22)$$

Der zugehörige Spannungsverlauf

$$\tau(t) = \gamma_0 \frac{d\eta^+(t)}{dt} = \gamma_0 G^+(t) \quad (23)$$

liefert eine weitere Grundfunktion $G^+(t) = d\eta^+(t)/dt$, die als **Relaxationsmodul** bezeichnet wird.

ANMERKUNG: Wenn keine Verwechslungsmöglichkeit besteht, kann das Hochzeichen + bei den obigen Grundfunktionen weggelassen werden.

4.3 Verknüpfung beliebiger Spannungs- und Verformungsverläufe mittels der Grundfunktionen der sprungartigen und impulsartigen Beanspruchung

Durch Anwendung des Boltzmannschen Superpositionsprinzips lassen sich beliebige Spannungs- und Verformungsverläufe als sogenannte **Integraltransformationen vom Faltungstyp** miteinander verknüpfen, bei denen die Integralkerne durch die oben definierten Grundfunktionen gegeben sind.

Aus diesen Transformationen resultieren zugleich Beziehungen zwischen solchen Grundfunktionen, denen vorgegebene Spannungsverläufe und solchen, denen vorgegebene Verformungsverläufe zugeordnet sind.

4.4 Grundversuche mit harmonisch-periodischer Beanspruchung

Harmonisch-periodische (d. h. sinusförmige) Spannungs- und Verformungsbeanspruchungen seien, wie in Naturwissenschaft und Technik weithin üblich, in komplexer Form dargestellt. Dabei wird angenommen, daß der Realteil der jeweiligen durch Unterstreichungen als solche gekennzeichneten komplexen Größe den physikalischen Vorgang beschreibt (siehe DIN 5483 Teil 3).

ANMERKUNG 1: Bei den im folgenden durch eine Tilde ($\sim$) gekennzeichneten Größen, die sämtlich komplexe Größen darstellen, kann an sich – wie allgemein üblich – auf eine zusätzliche Kennzeichnung durch Unterstreichungen verzichtet werden.

Da bei linearem Verhalten einer sinusförmigen Anregung stets auch eine sinusförmige Reaktion entspricht, die sich nur in Amplitude und Phase, nicht aber in der Frequenz unterscheiden kann, so folgt für die Spannungs- und Verformungsbeanspruchung

$$\underline{\tau}(t) = \underline{\tilde{\tau}}_0 e^{i\omega t}, \quad (24)$$

$$\underline{\gamma}(t) = \underline{\tilde{\gamma}}_0 e^{i\omega t}, \quad \dot{\underline{\gamma}}(t) = \underline{\tilde{\dot{\gamma}}}_0 e^{i\omega t}, \quad (25)$$

worin die komplexen Größen $\underline{\tilde{\tau}}_0$, $\underline{\tilde{\gamma}}_0$ und $\underline{\tilde{\dot{\gamma}}}_0 = i\omega \underline{\tilde{\gamma}}_0$ zugleich Amplitude und Phase des jeweiligen Vorgangs kennzeichnen, i die imaginäre Einheit und ω die Kreisfrequenz bedeuten.

Hiermit lassen sich folgende Grundfunktionen definieren:

- a) Grundfunktionen, denen vorgegebene Spannungsverläufe zugeordnet sind:

$$\underline{\tilde{\tau}}_0 / \underline{\tilde{\gamma}}_0 = \underline{\tilde{J}}(\omega) \quad \text{komplexe Komplianz,} \quad (26)$$

$$\underline{\tilde{\tau}}_0 / \underline{\tilde{\dot{\gamma}}}_0 = \underline{\tilde{\varphi}}(\omega) = i\omega \underline{\tilde{J}}(\omega) \quad \text{komplexe Fluidität,} \quad (27)$$

- b) Grundfunktionen, denen vorgegebene Verformungsverläufe zugeordnet sind:

$$\underline{\tilde{\tau}}_0 / \underline{\tilde{\gamma}}_0 = \underline{\tilde{G}}(\omega) \quad \text{komplexer Modul,} \quad (28)$$

$$\underline{\tilde{\tau}}_0 / \underline{\tilde{\dot{\gamma}}}_0 = \underline{\tilde{\eta}}(\omega) = \underline{\tilde{G}}(\omega) / i\omega \quad \text{komplexe Viskosität.} \quad (29)$$

Ihre Real- und (positiven bzw. negativen) Imaginärteile

$$\underline{\tilde{J}}(\omega) = J'(\omega) - iJ''(\omega), \quad \underline{\tilde{G}}(\omega) = G'(\omega) + iG''(\omega), \quad (30)$$

$$\underline{\tilde{\varphi}}(\omega) = \varphi'(\omega) + i\varphi''(\omega), \quad \underline{\tilde{\eta}}(\omega) = \eta'(\omega) - i\eta''(\omega) \quad (31)$$

werden wie folgt bezeichnet:

$$J'(\omega) \quad \text{Speicherkomplianz,} \\ G'(\omega) \quad \text{Speichermodul,}$$

$$J''(\omega) \quad \text{Verlustkomplianz,} \\ G''(\omega) \quad \text{Verlustmodul,}$$

$$\varphi'(\omega) = \omega J''(\omega) \quad \text{Wirkfluidität,} \\ \eta'(\omega) = G''(\omega) / \omega \quad \text{Wirkviskosität,}$$

$$\varphi''(\omega) = \omega J'(\omega) \quad \text{Blindfluidität,} \\ \eta''(\omega) = G'(\omega) / \omega \quad \text{Blindviskosität.}$$

Damit bildet man die weiteren Größen:

$$|\underline{\tilde{J}}(\omega)| = [J'^2(\omega) + J''^2(\omega)]^{1/2} \\ \text{Betrag der komplexen Komplianz,} \quad (32)$$

$$|\underline{\tilde{G}}(\omega)| = [G'^2(\omega) + G''^2(\omega)]^{1/2} \\ \text{Betrag des komplexen Moduls,} \quad (33)$$

$$|\underline{\tilde{\varphi}}(\omega)| = [\varphi'^2(\omega) + \varphi''^2(\omega)]^{1/2} \\ \text{Betrag der komplexen Fluidität,} \quad (34)$$

$$|\underline{\tilde{\eta}}(\omega)| = [\eta'^2(\omega) + \eta''^2(\omega)]^{1/2} \\ \text{Betrag der komplexen Viskosität,} \quad (35)$$

$$\tan \delta(\omega) = J''(\omega) / J'(\omega) = G''(\omega) / G'(\omega) \\ = \varphi'(\omega) / \varphi''(\omega) = \eta'(\omega) / \eta''(\omega)$$

$$\text{Verlustfaktor (mechanische Dämpfung),} \quad (36)$$

$$\delta(\omega) = \arctan [J''(\omega) / J'(\omega)] = \dots \text{Verlustwinkel.} \quad (37)$$

ANMERKUNG 2: Die harmonisch-periodische Beanspruchung wird häufig als „dynamische“ Beanspruchung und die dieser zugeordneten Größen werden entsprechend als „dynamische Größen“ bezeichnet, z. B. die komplexe Komplianz als „dynamische Komplianz“ bzw. ihr absoluter Betrag als „absolute dynamische Komplianz“ usw. Diese Bezeichnungsweise ist aber irreführend, da „dynamisch“ in aller Regel durch die Massenträgheit verursachte Wirkungen kennzeichnet, die in den Grundfunktionen nicht einbezogen sind. Der Begriff „dynamische Viskosität“ ist außerdem schon für die hier kurz als „Viskosität“ bezeichnete Größe η (Gegensatz: „kinematische Viskosität“ $\nu = \eta / \rho$) verbraucht. Daher sollte der Begriff „dynamisch“ für das bei der harmonisch-periodischen Beanspruchung zutage tretende Stoffverhalten generell vermieden werden.

ANMERKUNG 3: Die komplexen Grundfunktionen werden hier, statt wie sonst durchweg üblich durch einen Stern (*), durch eine Tilde ($\sim$) gekennzeichnet, da der Stern in den Natur- und Ingenieurwissenschaften ganz allgemein zur Kennzeichnung einer konjugiert komplexen Größe verwendet wird (siehe DIN 1302).

ANMERKUNG 4: Der Verlustwinkel $\delta(\omega)$ darf nicht mit der Dirac-Funktion verwechselt werden.

Aus den Gleichungen (26) bis (29) ist zu ersehen, daß die Grundfunktionen nach a) und nach b) paarweise miteinander verknüpft sind:

$$\tilde{I}(\omega) \tilde{G}(\omega) = 1, \quad \tilde{\varphi}(\omega) \tilde{\eta}(\omega) = 1; \quad (38)$$

hieraus resultieren auch für deren Real- und Imaginärteile einfache Umrechnungsformeln.

Dagegen hängen die komplexen Grundfunktionen mit den ihnen korrespondierenden Grundfunktionen der sprung- und impulsartigen Beanspruchung in der Form von **Laplace-Transformationen** bzw. damit verwandten **Carson-Transformationen** zusammen (siehe DIN 5487).

ANMERKUNG: Nach Durchführung gewisser Umformungen läßt sich die Laplace-Transformation in der Regel auch durch eine **Fourier-Transformation** ersetzen, wodurch gewisse Komplikationen entfallen. Auch beliebige Spannungs- und Verformungsverläufe lassen sich unter Zuhilfenahme von Fourier-Transformation und -Rücktransformation durch die komplexen Grundfunktionen in einfacher Weise miteinander verknüpfen.

5 Viskoelastische Stoffe mit diskreten Spektren (n -Parameter-Stoffe)

Eine große Klasse linear-viskoelastischer Stoffe (n -Parameter-Stoffe) läßt sich symbolisch durch sogenannte passive Netzwerke darstellen, die aus **hookeschen Elementen** („Federn“) und **newtonschen Elementen** („Dämpfern“) zusammengesetzt sind, siehe Bild 1. Diese symbolisieren die Zusammenhänge

$$a) \quad \tau = G\gamma, \quad \dot{\gamma} = J\tau \quad (39)$$

und

$$b) \quad \tau = \eta\dot{\gamma}, \quad \dot{\gamma} = \varphi\tau \quad (40)$$

und stellen somit, für sich genommen, die Stoffgesetze des hookeschen Körpers und der newtonschen Flüssigkeit dar.

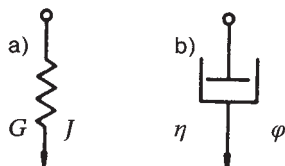


Bild 1: Symbole für (a) das hookesche Element (Feder) und (b) das newtonsche Element (Dämpfer)

Diese Elemente können entweder unter gemeinsamer Verformung bezüglich der Spannung superponiert („parallel geschaltet“) oder unter gemeinsamer Spannung bezüglich der Verformung superponiert („hintereinandergeschaltet“) werden.

ANMERKUNG: Die durch Zusammenschalten von Federn und Dämpfern erzeugten Netzwerke sind elektrischen Netzwerken, die etwa aus Kapazitäten und ohmschen Widerständen zusammengesetzt sind, äquivalent. So kann man z. B. den Federn die Kehrwerte der Kapazitäten, den Dämpfern die Widerstände, der mechanischen Spannung die elektrische Spannung, der Verformung die elektrische Ladung zuordnen, muß dann allerdings Hintereinander- und Parallelschaltung vertauschen. Daher ist die lineare Theorie der viskoelastischen Stoffe mit endlich vielen Parametern formal aus der Theorie der passiven elektrischen (Eintor-)Netzwerke ableitbar.

5.1 Zwei-Parameter-Stoffe

Die Parallel- und Hintereinanderschaltung zweier gleichartiger Elemente kann durch ein einziges Element ersetzt werden, wobei sich die Moduln bzw. Viskositäten oder die Komplianzen bzw. Fluiditäten addieren. Daher ergeben nur die Parallel- oder die Hintereinanderschaltung von Feder und Dämpfer echte Zwei-Parameter-Stoffe.

5.1.1 Kelvin-Voigt-Körper

Die Parameter des Kelvin-Voigt-Körpers sind der Modul G bzw. die Komplianz J und die Viskosität η bzw. die Fluidität φ . Der Quotient $\kappa = \eta/G = J/\varphi$ wird als **Retardationszeit** bezeichnet. Das Stoffgesetz lautet

$$\tau = G\gamma + \eta\dot{\gamma} \quad \text{bzw.} \quad \dot{\gamma} + \kappa\dot{\tau} = J\tau; \quad (41)$$

die Netzwerk-Darstellung ist in Bild 2 angegeben.

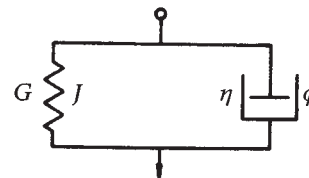


Bild 2: Kelvin-Voigt-Körper

Die Grundfunktionen der sprungartigen, impulsartigen und periodischen Beanspruchung lauten

$$J^+(t) = J(1 - e^{-t/\kappa})H(t), \quad (42)$$

$$\eta^+(t) = (\eta + Gt)H(t), \quad (43)$$

$$\varphi^+(t) = \varphi e^{-t/\kappa}H(t), \quad (44)$$

$$G^+(t) = \eta\delta(t) + GH(t), \quad (45)$$

$$\tilde{I}(\omega) = J \left(\frac{1}{1 + \kappa^2 \omega^2} - i \frac{\kappa \omega}{1 + \kappa^2 \omega^2} \right), \quad (46)$$

$$\tilde{G}(\omega) = G + i\eta\omega = G(1 + i\kappa\omega). \quad (47)$$

Der Kelvin-Voigt-Körper verbindet ein festkörperartiges Gleichgewichtsverhalten ($\lim_{t \rightarrow \infty} J^+(t) = J$) mit einem flüssigkeitsartigen Anfangsverhalten ($\lim_{t \rightarrow +0} \eta^+(t) = \eta$). Durch das Symbol $+0$ soll angedeutet werden, daß der Grenzübergang von positiven t -Werten her auszuführen ist.

5.1.2 Maxwell-Flüssigkeit

Die Parameter der Maxwell-Flüssigkeit sind der Modul G bzw. die Komplianz J und die Viskosität η bzw. die Fluidität φ . Der Quotient $\lambda = J/\varphi = \eta/G$ wird hierbei als **Relaxationszeit** bezeichnet. Das Stoffgesetz lautet

$$\dot{\gamma} = J\dot{\tau} + \varphi\tau \quad \text{bzw.} \quad \tau + \lambda\dot{\tau} = \eta\dot{\gamma}; \quad (48)$$

die Netzwerk-Darstellung ist in Bild 3 angegeben.

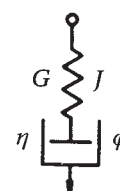


Bild 3: Maxwell-Flüssigkeit