

Begriffe, Kurzzeichen und Formelzeichen im Vermessungswesen

Ausgleichsrechnung und Statistik

DIN
18 709
Teil 4

Concepts, abbreviations and symbols in surveying; calculus of observations and statistics

Notions, symboles et formules pour le levé de plans; calcul d'observations et statistique

Inhalt

	Seite		Seite
1 Anwendungsbereich und Zweck	1	2.6 Zufallsvektoren	8
2 Grundbegriffe der Fehlerlehre und der mathematischen Statistik	2	2.7 Normalverteilte Zufallsvektoren	11
2.1 Beobachtung von Zufallsgrößen	2	2.8 Beziehungen zwischen zwei Zufallsvektoren	12
2.2 Statistische Beschreibung von stetigen Zufallsgrößen	2	2.9 Abweichungen, Varianzen und Kovarianzen von Funktionen eines Zufallsvektors	13
2.3 Beobachtungsreihen (Meßreihen) für stetige Zufallsgrößen (Meßgrößen)	4	3 Modelle und Verfahren der Ausgleichsrechnung	15
2.4 Vertrauensbereiche	5	3.1 Allgemeinfeld der Ausgleichsrechnung	15
2.5 Normalverteilte Zufallsgrößen	6	3.2 Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen	17

1 Anwendungsbereich und Zweck

Diese Fachgrundnorm gilt für die Verarbeitung, Auswertung und Beurteilung der im Vermessungswesen anfallenden Daten, soweit diese stochastischer Natur sind. Zweck dieser Norm ist es einerseits, den geodätischen Sprachgebrauch an Begriffsbildungen anderer Disziplinen, soweit diese übergeordnete Bedeutung erlangt haben, anzupassen. Deshalb wurde die Norm mit dem Ausschuß Qualitätssicherung und angewandte Statistik (AQS) abgestimmt. Andererseits sollen jedoch, wo dies möglich ist, die im Vermessungswesen eingeführten Begriffe beibehalten werden.

Dementsprechend fußt diese Norm auf den Standardwerken der Ausgleichsrechnung und mathematischen Statistik ebenso wie auf den folgenden internationalen und nationalen Normen:

ISO 3534, DIN 1319 Teil 3, DIN 2257 Teil 2, DIN 13 303 Teil 1 und Teil 2, DIN 55 302 Teil 1, DIN 55 303 Teil 2 und Teil 4 (z. Z. Entwurf), DIN 55 350 Teil 13, Teil 21 und Teil 22.

Wo dies zweckmäßig ist, wird weitestgehend von der Matrizenalgebra Gebrauch gemacht nach DIN 5486. Die Matrizen Symbole sind in Antiqua (halbfett) zu setzen. In Schreibmaschinentexten sollten die Matrizen Symbole durch Unterstreichen kenntlich gemacht werden.

Fortsetzung Seite 2 bis 19

Normenausschuß Bauwesen (NABau) im DIN Deutsches Institut für Normung e. V.
Ausschuß Qualitätssicherung und angewandte Statistik (AQS) im DIN

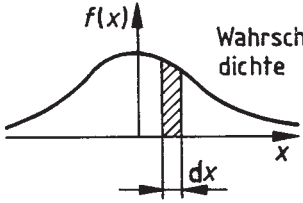
Nachdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung des DIN Deutsches Institut für Normung e. V., Berlin, gestattet.

2 Grundbegriffe der Fehlerlehre und der mathematischen Statistik

2.1 Beobachtung von Zufallsgrößen

Nr	Zeichen	Benennung	Erklärung, Bemerkung
2.1.1	X auch Y, Z	Zufallsgröße	Veränderliche Größe, die Werte einer vorgegebenen Menge von Werten entsprechend einer dieser Menge zugeordneten Verteilungsfunktion (siehe Nr 2.2.1) annehmen kann (nach DIN 55 350 Teil 21). Anmerkung 1: Für die mathematische Definition siehe DIN 13 303 Teil 1. Anmerkung 2: Ist die Verteilungsfunktion der Zufallsgröße stetig, so heißt die Zufallsgröße „stetige Zufallsgröße“. Die vorliegende Norm befaßt sich ausschließlich mit stetigen Zufallsgrößen. Anmerkung 3: Die Benennung „Größe“ wird hier in einem weiteren Sinne verstanden als in DIN 1313, wo damit physikalische Größen gemeint sind, siehe auch DIN 55 350 Teil 21. Z.B. werden bei der Bewertung von Grundstücken die Kaufpreise von Vergleichsgrundstücken als Zufallsgrößen angesehen.
2.1.2	x_i auch y_i, z_i	Beobachtungswert	Einzelwert aus einer Beobachtungsreihe für eine Zufallsgröße. $i = 1, 2, \dots, n$ n Umfang der Beobachtungsreihe
2.1.3	L	Meßgröße	Zufallsgröße, deren Werte durch Messung ermittelt werden. Anmerkung 1: Messen ist das Vergleichen eines quantitativen Merkmals, der Meßgröße, mit einer als Maßeinheit definierten Ausprägung dieses Merkmals, dem Normal. Anmerkung 2: Keine Meßgrößen im Sinne dieser Norm sind einerseits nicht-physikalische Zufallsgrößen (z. B. die Kaufpreise in Anmerkung 3 zu Nr 2.1.1) und andererseits Zufallsgrößen, die indirekt aus Meßgrößen abgeleitet werden, wie Punktkoordinaten, Flächengrößen usw. Durch das Anbringen von Korrekturen und Reduktionen (siehe DIN 18 709 Teil 1) an den Meßwerten (siehe Nr 2.1.4) wird dagegen der Charakter einer Meßgröße als solche nicht verändert.
2.1.4	l_i	Meßwert	Einzelwert aus einer Meßreihe für eine Meßgröße. $i = 1, 2, \dots, n$ n Umfang der Meßreihe Anmerkung: Der Meßwert ist das Produkt aus der Maßeinheit (siehe Anmerkung 1 zu Nr 2.1.3) und dem Zahlenwert, der angibt, wie oft die Maßeinheit in der Meßgröße enthalten ist.

2.2 Statistische Beschreibung von stetigen Zufallsgrößen

2.2.1	$F(x)$ auch $G(x)$	Verteilungsfunktion	Eine Funktion, welche für jedes x die Wahrscheinlichkeit P ergibt, daß eine Zufallsgröße X nicht größer als x ist (siehe DIN 55 350 Teil 21). $F(x) = P(X \leq x)$
2.2.2	x_p	p -Quantil	Wert, für den die Verteilungsfunktion einen vorgegebenen Wert p annimmt (siehe DIN 13 303 Teil 1 und DIN 55 350 Teil 21). $F(x_p) = P(X \leq x_p) = p$ Anmerkung: Für p -Quantil ist auch die Benennung Fraktile gebräuchlich.
2.2.3	$f(x)$ auch $g(x)$	Wahrscheinlichkeitsdichte	 Erste Ableitung der Verteilungsfunktion (siehe DIN 55 350 Teil 21) $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$ Anmerkung: Mittels der Wahrscheinlichkeitsdichte kann die Wahrscheinlichkeit P angegeben werden, mit der eine Zufallsgröße X in ein differentielles Intervall an der Stelle x fällt: $P(x \leq X < x + dx) = f(x) dx$

Fortsetzung

Nr	Zeichen	Benennung	Erklärung, Bemerkung
2.2.4	$E(X)$ auch μ_X	Erwartungswert	$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$ (siehe DIN 55 350 Teil 21) Anmerkung 1: Das Zeichen μ wird vorzugsweise für den Erwartungswert einer normalverteilten Zufallsgröße (siehe Nr 2.5) verwendet. Anmerkung 2: Ein Schätzwert für den Erwartungswert ist der Mittelwert $\bar{x}$ (siehe Nr 2.3.3). Bei unendlich großem Umfang n der Beobachtungsreihe fallen diese beiden Werte praktisch zusammen, d. h. es gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\bar{x} - E(X) > \varepsilon) = 0$ Anmerkung 3: Bei manchen geodätischen Problemstellungen erweist sich die Benennung des „wahren Wertes“ als nützlich (siehe Nr 2.2.5). Dieser darf nicht mit dem Erwartungswert verwechselt werden.
2.2.5	$\tilde{X}$	wahrer Wert	Tatsächlicher Wert einer Größe X im Augenblick der Beobachtung unter den gegebenen Bedingungen (siehe DIN 51 848 Teil 3). Anmerkung 1: Die Tilde dient zur Kennzeichnung des wahren Wertes, die wahren Werte der Zufallsgrößen Y, Z, L sind also $\tilde{Y}, \tilde{Z}, \tilde{L}$. Anmerkung 2: Eine Zufallsgröße kann so definiert sein, daß für sie kein wahrer Wert existiert. Beispiel: Die Zufallsgröße „Verkehrswert in DM/m² eines Wohngrundstückes in mittlerer Lage“ besitzt einen Erwartungswert, der nach Nr 2.2.4 als Mittel aus sehr vielen Kaufpreisen geschätzt werden kann; von einem wahren Wert kann in diesem Fall jedoch nicht gesprochen werden.
2.2.6	Δ	systematische Abweichung (auch systematischer Fehler)	$\Delta = E(X) - \tilde{X}$ Eine systematische Abweichung hat ihre Ursache z. B. in Unvollkommenheiten der Meßgeräte oder des Beobachtungsverfahrens; sie ist in allen Beobachtungswerten einer Beobachtungsreihe enthalten. Anmerkung 1: Siehe DIN 1319 Teil 3. Dort werden zusätzlich die „erfaßbaren systematischen Abweichungen“ definiert, die durch geeignete Meßanordnungen meßtechnisch bestimmt werden können. Eine derartige Unterscheidung ist im Vermessungswesen unnötig, da „erfaßbare systematische Abweichungen“ grundsätzlich durch das Anbringen entsprechender Korrekturen beseitigt werden sollen. Anmerkung 2: Auch im deutschen Sprachgebrauch wird für die systematische Abweichung häufig die englische Benennung „bias“ verwendet.
2.2.7	σ_X^2 auch $\sigma^2(X)$	Varianz	$\sigma_X^2 = \sigma^2(X) = E((X - \mu_X)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx$ Siehe DIN 13 303 Teil 1 und DIN 55 350 Teil 21. Anmerkung: Ein Schätzwert für die Varianz σ_X^2 ist die empirische Varianz s_X^2 (siehe Nr 2.3.5). Bei unendlich großem Umfang n der Beobachtungsreihe fallen diese beiden Werte praktisch zusammen, d. h. es gilt für beliebiges $\varepsilon > 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} P(s_X^2 - \sigma_X^2 > \varepsilon) = 0$
2.2.8	σ_X auch $\sigma(X)$	Standardabweichung	Quadratwurzel aus der Varianz σ_X^2, siehe DIN 13 303 Teil 1 und DIN 55 350 Teil 21. Anmerkung: Für den Zusammenhang mit der früheren Benennung „mittlerer Fehler“ siehe Anmerkung 2 zu Nr 2.3.6.

Fortsetzung

Nr	Zeichen	Benennung	Erklärung, Bemerkung
2.3 Beobachtungsreihen (Meßreihen) für stetige Zufallsgrößen (Meßgrößen)			
2.3.1	ε_i	zufällige Abweichung	Differenz zwischen einem Beobachtungswert (Meßwert) x_i und dem Erwartungswert μ_X einer Zufallsgröße (Meßgröße) X. $\varepsilon_i = x_i - \mu_X, \quad i = 1, 2, \dots, n$ n Umfang der Beobachtungsreihe (Meßreihe) Anmerkung: Die Benennung „zufällige Abweichung“ ist weiter gefaßt als der früher gebräuchliche „zufällige Fehler“. Diese frühere Benennung war nur sinnvoll, wenn für die Zufallsgröße X ein wahrer Wert $\tilde{X}$ existierte; siehe Anmerkung 2 zu Nr 2.2.5.
2.3.2	η_i	wahre Abweichung	Differenz zwischen einem Beobachtungswert (Meßwert) x_i und dem wahren Wert $\tilde{X}$ einer Zufallsgröße (Meßgröße) X, zugleich die Summe aus systematischer Abweichung Δ und zufälliger Abweichung ε_i. $\eta_i = x_i - \tilde{X} = \Delta + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$ n Umfang der Beobachtungsreihe (Meßreihe) Anmerkung 1: Falls die Beobachtungswerte keine systematische Abweichung enthalten, sind zufällige und wahre Abweichung identisch. Dies wurde früher oft stillschweigend vorausgesetzt. Anmerkung 2: Die früher gebräuchliche Benennung „wahrer Fehler“ soll übereinstimmend mit der Terminologie in DIN 1319 Teil 3 nicht mehr verwendet werden.
2.3.3	$\bar{x}$	(arithmetischer) Mittelwert	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \text{ nach DIN 13 303 Teil 1.}$ n Umfang der Beobachtungsreihe (Meßreihe) Anmerkung 1: Der Querstrich dient zur Kennzeichnung des Mittelwertes, die Mittelwerte für die Zufallsgrößen Y, Z, L sind also $\bar{y}, \bar{z}, \bar{l}$. Anmerkung 2: Wenn kein Mißverständnis zu befürchten ist, kann auf das Adjektiv verzichtet werden.
2.3.4	v_i	Verbesserung	Differenz zwischen dem Mittelwert $\bar{x}$ und einem Beobachtungswert (Meßwert) x_i für eine Zufallsgröße (Meßgröße) X. $v_i = \bar{x} - x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$ n Umfang der Beobachtungsreihe (Meßreihe) Anmerkung 1: Der Mittelwert $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ ist eine Zufallsgröße mit kleinerer Standardabweichung als die einzelne Zufallsgröße X_i (siehe Nr 2.2.7 und Nr 2.3.7) und wird deshalb als „besser“ angesehen; daher die Benennung Verbesserung. Anmerkung 2: In anderen Normen (DIN 1319 Teil 3 und DIN 2257 Teil 2) wird die negative Verbesserung $x_i - \bar{x}$ ohne besonderes Zeichen „zufällige Abweichung des Beobachtungswertes“ genannt. Die in die Ausgleichsrechnung eingeführte und häufig benötigte Benennung Verbesserung wird davon abweichend hier beibehalten.

Fortsetzung

Nr	Zeichen	Benennung	Erklärung, Bemerkung
2.3.5	s_x^2 auch $s^2(x)$	(empirische) Varianz	Schätzwert für die Varianz σ_X^2 (siehe Nr 2.2.7) nach DIN 13303 Teil 1. $s_x^2 = s^2(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n v_i^2$ n Umfang der Beobachtungsreihe (Meßreihe) Anmerkung 1: Auf das Adjektiv „empirisch“ kann verzichtet werden, wenn keine Verwechslung mit der Varianz σ_X^2 zu befürchten ist. Anmerkung 2: Wenn in Ausnahmefällen der Erwartungswert μ_X der Zufallsgröße X bekannt ist, wird die empirische Varianz s_x^2 aus den zufälligen Abweichungen ε_i berechnet. $s_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$ Anmerkung 3: DIN 13303 Teil 1 unterscheidet zwischen dem aus den Beobachtungswerten ermittelten Wert der empirischen Varianz $s_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ und der entsprechenden Zufallsvariable $s_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$ Der ermittelte Wert wird in Nr 2.3.5, Nr 2.3.6, Nr 2.3.8, Nr 2.5.12 und Nr 2.5.13 benutzt, während in Nr 2.5.8 die entsprechende Zufallsvariable benutzt wird.
2.3.6	s_x auch $s(x)$	(empirische) Standard- abweichung	Quadratwurzel aus der empirischen Varianz s_x^2, nach DIN 13303 Teil 1. Anmerkung 1: Auf das Adjektiv „empirisch“ kann verzichtet werden, wenn keine Verwechslung mit der in Nr 2.2.8 definierten Standardabweichung σ_X zu befürchten ist. Anmerkung 2: Die empirische Standardabweichung ist nahezu mit dem noch vielfach gebräuchlichen „mittleren Fehler“ identisch. Im Unterschied zu jenem hat die Standardabweichung jedoch nur das positive Vorzeichen. Die Benennung „mittlerer Fehler“ soll nicht mehr verwendet werden.
2.3.7	$\sigma_{\bar{X}}$ auch $\sigma(\bar{X})$	Standard- abweichung des Mittelwertes	Standardabweichung der Zufallsgröße $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ $\sigma_{\bar{X}} = \sigma(\bar{X}) = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$ n Umfang der Beobachtungsreihe (Meßreihe)
2.3.8	$s_{\bar{x}}$ auch $s(\bar{x})$	(empirische) Standard- abweichung des Mittelwertes	Schätzwert für die Standardabweichung $\sigma_{\bar{X}}$ nach Nr 2.3.7. $s_{\bar{x}} = s(\bar{x}) = \frac{s_x}{\sqrt{n}}$ n Umfang der Beobachtungsreihe (Meßreihe) Anmerkung: Auf das Adjektiv „empirisch“ kann verzichtet werden, wenn keine Verwechslung mit der Standardabweichung $\sigma_{\bar{X}}$ zu befürchten ist.
2.4 Vertrauensbereiche			Vertrauensbereich (auch Konfidenzbereich) ist nach DIN 13303 Teil 2 der Oberbegriff zu Vertrauensintervall (Nr 2.4.2), Vertrauensellipsoid (Nr 2.7.2) und Vertrauensellipse (Nr 2.7.3)
2.4.1	$1 - \alpha$	Vertrauensniveau auch Konfidenzniveau	Für die Berechnung eines Vertrauensbereichs vorgegebene Wahrscheinlichkeit. Anmerkung: α ist gewöhnlich eine im Vergleich mit 1 kleine Zahl, z. B. $\alpha = 0,05$ oder $\alpha = 0,01$.

Fortsetzung

Nr	Zeichen	Benennung	Erklärung, Bemerkung
2.4.2	C	Vertrauensintervall auch Konfidenzintervall	Das Vertrauensintervall $C = [C_u, C_o]$ (siehe Nr 2.4.3) enthält den wahren Wert $\tilde{\theta}$ für einen zu schätzenden Parameter θ mit der Wahrscheinlichkeit $P = 1 - \alpha$ (siehe Nr 2.4.1). $P(\tilde{\theta} \in C) = P(C_u \leq \tilde{\theta} \leq C_o) = 1 - \alpha$
2.4.3	C_u, C_o	untere bzw. obere Vertrauensgrenze auch untere bzw. obere Konfidenzgrenze	Untere bzw. obere Grenze des Vertrauensintervalls. Wenn nicht ausdrücklich anders bemerkt, gilt neben der Wahrscheinlichkeitsbeziehung in Nr 2.4.2 zusätzlich: $P(\tilde{\theta} < C_u) = P(\tilde{\theta} > C_o) = \frac{\alpha}{2}$ Da es sich bei den Vertrauensgrenzen um Zufallsgrößen handelt, werden die dafür berechneten Schätzwerte analog zu Nr 2.1.1 und Nr 2.1.2 mit Kleinbuchstaben angegeben. Anmerkung: In der Benennung der Vertrauensgrenze wird zwischen den Zufallsgrößen und ihren Schätzwerten nicht unterschieden, da dafür kein praktisches Bedürfnis besteht.
2.5 Normalverteilte Zufallsgrößen			
2.5.1	$N(\mu_X, \sigma_X^2)$	Normalverteilung	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße X mit Erwartungswert μ_X und Varianz σ_X^2 , welche die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x) = \frac{1}{\sigma_X} \varphi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right), \quad -\infty < x < \infty, \quad \sigma_X > 0$ aufweist, mit $\varphi(u)$ aus Nr 2.5.3. Anmerkung 1: X verteilt nach $N(\mu_X, \sigma_X^2)$. Anmerkung 2: Wenn nicht besondere Umstände dagegen sprechen, werden die Werte der im Vermessungswesen vorkommenden Meßgrößen als normalverteilt angenommen. Eine Überprüfung dieser Hypothese im Einzelfall ist wegen des gewöhnlich zu geringen Umfangs der Meßreihen nur selten möglich.
2.5.2	$N(0,1)$	Standardisierte Normalverteilung	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsgröße Y mit Erwartungswert $\mu_Y = 0$ und Varianz $\sigma_Y^2 = 1$, welche die Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi(u)$ aus Nr 2.5.3 aufweist. Anmerkung 1: Schreibweise: Y verteilt nach $N(0,1)$. Anmerkung 2: Eine nach $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ verteilte Zufallsgröße X wird in eine nach $N(0,1)$ verteilte Zufallsgröße Y transformiert durch: $Y = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$
2.5.3	$\varphi(u)$	Wahrscheinlichkeitsdichte der standardisierten Normalverteilung	$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right), \quad -\infty < u < \infty$
2.5.4	$\Phi(u)$	Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung	$\Phi(u) = P(Y \leq u) = \int_{-\infty}^u \varphi(x) dx, \quad -\infty < u < \infty$ Anmerkung: Y verteilt nach $N(0,1)$.
2.5.5	u_p	p -Quantil der standardisierten Normalverteilung	Wert, für den die Verteilungsfunktion $\Phi(u)$ einer nach $N(0,1)$ verteilten Zufallsgröße Y einen vorgegebenen Wert p annimmt. $\Phi(u_p) = p$