

DIN 18709-4

ICS 01.040.07; 07.040

Ersatz für
DIN 18709-4:1984-01**Begriffe, Kurzzeichen und Formelzeichen in der Geodäsie –
Teil 4: Ausgleichungsrechnung und Statistik**Concepts, abbreviations and symbols in geodesy –
Part 4: Adjustment of observations and statisticsNotions, symboles et formules dans le domaine de la géodésie –
Partie 4: Calculs d'observations et statistique

Gesamtumfang 58 Seiten

Normenausschuss Bauwesen (NABau) im DIN

Inhalt

	Seite
Vorwort	3
1 Anwendungsbereich	4
2 Normative Verweisungen	4
3 Grundbegriffe (<i>en: terms and definitions</i>)	5
3.1 Beobachtung von Zufallsvariablen (<i>en: observation of random variables</i>)	5
3.2 Statistische Beschreibung von stetigen Zufallsvariablen (<i>en: statistical description of continuous random variables</i>)	8
3.3 Beobachtungsreihen für stetige Zufallsvariable (<i>en: series of observations of continuous random variables</i>)	11
3.4 Beurteilende Statistik (<i>en: statistical inference</i>)	14
3.5 Normalverteilte Zufallsvariable (<i>en: normal distributed random variables</i>)	18
3.6 Zufallsvektoren (<i>en: random vectors</i>)	21
3.7 normalverteilte Zufallsvektoren (<i>en: normal distributed random vectors</i>)	25
3.8 Beziehungen zwischen zwei Zufallsvektoren (<i>en: relationships between two random vectors</i>)	28
3.9 Abweichungen, Varianzen und Kovarianzen von Funktionen eines Zufallsvektors (Kovarianzfortpflanzung) (<i>en: errors, variances and covariances of functions of a random vector</i>)	30
4 Modelle und Verfahren der Ausgleichungsrechnung (<i>en: models and methods of adjustment theory</i>)	31
4.1 Bezeichnungen (<i>en: notations</i>)	31
4.2 Allgemeinfall der Ausgleichungsrechnung (<i>en: general case of adjustment</i>) (Gauß-Helmert-Modell)	34
4.3 Ausgleichung vermittelnder Beobachtungen (<i>en: parametric adjustment</i>) („Gauß-Markov-Modell“)	36
5 Regression (<i>en: regression</i>)	38
5.1 Bezeichnungen (<i>en: notations</i>)	38
5.2 Regressionsmodelle (<i>en: regression models</i>)	39
6 Transformation (<i>en: transformation</i>)	42
6.1 Bezeichnungen (<i>en: notations</i>)	42
6.2 Gebräuchliche Transformationsmodelle (<i>en: common transformation models</i>)	44
6.3 2D-Transformationsparameter (<i>en: 2D-transformation parameters</i>)	47
7 Zuverlässigkeit (<i>en: reliability</i>)	49
7.1 Bezeichnungen (<i>en: notations</i>)	49
7.2 Zuverlässigkeitsmaße (<i>en: reliability measures</i>)	49
Anhang A (informativ) Geodätische Punktfelder (<i>en: geodetic control stations</i>)	52
Anhang B (informativ) Inversen symmetrischer Matrizen (<i>en: inverses of symmetric matrices</i>)	54
Literaturhinweise	55
Stichwortverzeichnis	56

Vorwort

Diese Norm wurde vom Normenausschuss Bauwesen (NABau), Fachbereich 3 „Vermessungswesen, Geoinformation“, Arbeitsausschuss „Geodäsie“, NA 005-03-01 AA, erarbeitet.

DIN 18709 *Begriffe, Kurzzeichen und Formelzeichen in der Geodäsie* besteht aus:

- *Teil 1: Allgemeines*
- *Teil 2: Ingenieurvermessung*
- *Teil 3: Seevermessung*
- *Teil 4: Ausgleichungsrechnung und Statistik*
- *Teil 5: Auswertung kontinuierlicher Messreihen*

Es wird auf die Möglichkeit hingewiesen, dass einige Texte dieses Dokuments Patentrechte berühren können. Das DIN [und/oder die DKE] sind nicht dafür verantwortlich, einige oder alle diesbezüglichen Patentrechte zu identifizieren.

Änderungen

Gegenüber DIN 18709-4:1984-01 wurden folgende Änderungen vorgenommen:

- a) neuer Titel;
- b) Inhalt der Norm an aktuelle Entwicklungen angepasst und um die Abschnitte 5, 6 und 7 erweitert.

Frühere Ausgaben

DIN 18709-4: 1984-01

1 Anwendungsbereich

Diese Norm gilt für die Verarbeitung, Auswertung und Beurteilung anfallender Daten in der Geodäsie, soweit diese stochastischer Natur sind. Zweck dieser Norm ist es einerseits, den geodätischen Sprachgebrauch an Begriffe anderer Disziplinen, soweit diese Begriffe übergeordnete Bedeutung erlangt haben, anzupassen. Andererseits werden jedoch, wo dies möglich ist, die in der Geodäsie eingeführten Begriffe beibehalten.

Grundlagen dieser Norm sind die Standardwerke der Ausgleichungsrechnung und mathematischen Statistik, insbesondere auch DIN V ENV 13005.

2 Normative Verweisungen

Die folgenden zitierten Dokumente sind für die Anwendung dieses Dokuments erforderlich. Bei datierten Verweisungen gilt nur die in Bezug genommene Ausgabe. Bei undatierten Verweisungen gilt die letzte Ausgabe des in Bezug genommenen Dokuments (einschließlich aller Änderungen).

DIN 1319-1:1995-01, *Grundlagen der Messtechnik — Teil 1: Grundbegriffe*

DIN 1319-3, *Grundlagen der Messtechnik — Teil 3: Auswertung von Messungen einer einzelnen Messgröße, Messunsicherheit*

DIN 1319-4, *Grundlagen der Messtechnik — Teil 4: Auswertung von Messungen; Messunsicherheit*

DIN 13303-1, *Stochastik — Wahrscheinlichkeitstheorie, Gemeinsame Grundbegriffe der mathematischen und der beschreibenden Statistik — Begriffe und Zeichen*

DIN 18709-1, *Begriffe, Kurzzeichen und Formelzeichen im Vermessungswesen — Teil 1: Allgemeines*

DIN 55350-13, *Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik — Begriffe zur Genauigkeit von Ermittlungsverfahren und Ermittlungsergebnissen*

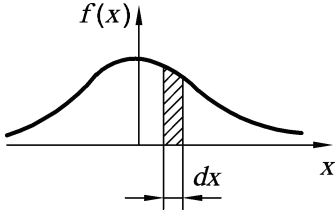
DIN 55350-21, *Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik — Begriffe der Statistik — Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen*

3 Grundbegriffe (*en: terms and definitions*)

Ab-schnitt	Zeichen	Benennung	Definition
3.1 Beobachtung von Zufallsvariablen (<i>en: observation of random variables</i>)			
3.1.1	X L	Messgröße Zufallsgröße <i>en: random variable</i>	physikalische Größe, der die Messung gilt [DIN 1319-1:1995-01] ANMERKUNG 1 Das Messen ist das Vergleichen eines quantitativen Merkmals, d. h. der Messgröße, mit einer als Maßeinheit definierten Ausprägung dieses Merkmals, dem Normal (siehe 3.1.3, Anmerkung 1). Zufallsvariablen können auch nichtphysikalisch definiert sein (siehe Beispiel 1). BEISPIEL 1 Kaufpreise bei der Bewertung von Grundstücken. ANMERKUNG 2 Mathematische Definition (siehe DIN 13303-1). ANMERKUNG 3 Ist die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen stetig, so wird die Zufallsvariable als stetig bezeichnet. Auch wenn die Auflösung eines Messinstrumentes, z. B. bedingt durch die digitale Anzeige, die Messwerte (siehe 3.1.3) diskretisiert, wird weiterhin von einer stetigen Zufallsvariablen gesprochen. ANMERKUNG 4 Eine Messgröße muss nicht unmittelbar Gegenstand der Messung sein. Sie kann auch indirekt über bekannte physikalische und/oder mathematische Beziehungen mit Größen zusammenhängen, die unmittelbar gemessen werden (siehe DIN 1319-1). BEISPIEL 2 In die elektrooptische Messung einer Strecke (Messgröße) fließt nicht nur die Ablesung am Messgerät ein. Zusatzinformationen über den aktuellen Zustand der Atmosphäre (Temperatur, Luftdruck, Luftfeuchtigkeit), Modellannahmen über die Signalausbreitung in der Atmosphäre und Kalibrierparameter werden darüber hinaus berücksichtigt, um die gesuchte Messgröße (Strecke) zu bestimmen. ANMERKUNG 5 Eine Zufallsvariable kann skalar oder mehrdimensional definiert sein. Vektorielle Zufallsvariablen werden durch fettgedruckte Buchstaben X bzw. L gekennzeichnet (siehe DIN 1303) und als Zufallsvektoren (siehe 3.6) bezeichnet. BEISPIEL 3 Die dreidimensionalen Koordinaten einer satellitengestützten Positionsbestimmung bilden eine vektorielle Messgröße in einem anzugebenden Koordinatensystem; die Komponenten dieses Vektors sind skalare Messgrößen.

Ab-schnitt	Zeichen	Benennung	Definition
3.1.2	Y	Einflussgröße <i>en: influence quantity</i>	Größe, die nicht Gegenstand der Messung ist, jedoch die Messgröße und die Auswertung beeinflusst [DIN 1319-1:1995-01] ANMERKUNG 1 Für die Auswertung von Messwerten (siehe 3.1.3) ist die Erfassung der relevanten Einflussgrößen notwendig. Soweit ihre Auswirkungen auf die Messgröße bekannt sind, werden diese Auswirkungen als Korrekturen oder Reduktionen (siehe DIN 1319-1) berücksichtigt. ANMERKUNG 2 Einflussgrößen können sowohl den Messvorgang als auch den augenblicklichen Zustand eines Messobjektes beeinflussen. In diesen Fällen sollte über geeignete Auswerteverfahren zwischen der Wirkung der Einflussgrößen auf den Messvorgang und auf das Messobjekt getrennt werden. BEISPIEL 1 Die Stauhöhe einer Talsperre (Ursache) bestimmt in hohem Maße die Durchbiegung einer Staumauer (Wirkung). Ohne Informationen über die Stauhöhe ist eine Beurteilung der Durchbiegung (Messgröße) nicht möglich. ANMERKUNG 3 In den Fällen, in denen die Auswirkungen von Einflussgrößen auf eine Messgröße nicht in Form einer Korrektur oder Reduktion (siehe DIN 18709-1) berücksichtigt werden können, sollte die Messanordnung derart gestaltet werden, dass sich die Auswirkungen durch Messungshäufung und Mittelbildung mindern (Randomisierung), oder dass die Auswirkungen durch mess- und auswertetechnische Maßnahmen kompensiert werden. BEISPIEL 2 Beim Nivellement wird durch die Messanordnung „aus der Mitte“ der Einfluss der nivellistischen Refraktion und von Restabweichungen der Kalibrierung im Messergebnis weitestgehend beseitigt.
3.1.3	x_i l_i	Beobachtungswert Messwert <i>en: observed value</i>	Einzelwert aus einer Beobachtungsreihe (siehe 3.1.5) für eine Zufallsvariable (siehe 3.1.1), im speziellen Einzelwert aus einer Beobachtungsreihe für eine Messgröße ANMERKUNG 1 Der Messwert ist das Produkt aus der Maßeinheit und dem Zahlenwert, der angibt, wie oft die Maßeinheit in der Messgröße enthalten ist. Das Anbringen von Korrekturen und Reduktionen (siehe DIN 18709-1) an einen Beobachtungswert ändert nicht dessen Charakter. ANMERKUNG 2 Der Beobachtungswert setzt sich aus dem wahren Wert $\tilde{X}$ (siehe 3.2.5) und der wahren Abweichung η_i (siehe 3.3.2) bzw. dem wahren Wert $\tilde{X}$ und der zufälligen Abweichung ε_i (siehe 3.3.1) sowie der systematischen Abweichung Δ (siehe 3.2.6) zusammen: $x_i = \tilde{X} + \eta_i = \tilde{X} + \Delta + \varepsilon_i$

Ab-schnitt	Zeichen	Benennung	Definition
3.1.4	$\hat{x}$ $\hat{X}$	Messergebnis <i>en: result of measurement</i>	aus Messungen gewonnener Schätzwert für den wahren Wert einer Messgröße [DIN 1319-1:1995-01] ANMERKUNG 1 Das Messergebnis einer durch wiederholte Messung erfassten Messgröße ist in der Regel das arithmetische Mittel aus den von systematischen Einflüssen befreiten Messwerten. ANMERKUNG 2 Das Messergebnis kann skalar $\hat{x}$ oder mehrdimensional $\hat{x}$ definiert sein (siehe 4.1.10). ANMERKUNG 3 Zu einem vollständigen Messergebnis (siehe 3.3.9) gehört die Angabe der Messunsicherheit (siehe 3.3.10). ANMERKUNG 4 In DIN V ENV 13005 wird zwischen unberichtigtem und wegen systematischer Messabweichungen berichtigtem Messergebnis unterschieden. Ein Messergebnis nach dieser Norm wird immer als berichtigtes Messergebnis bewertet.
3.1.5	—	Beobachtungsreihe Messreihe <i>en: series of observations</i>	Folge gleichartiger Beobachtungs- bzw. Messwerte x_i , $i = 1, 2, \dots, n$ (siehe 3.1.3) für eine Zufallsvariable X (siehe 3.1.1) ANMERKUNG Eine Beobachtungsreihe kann unter Wiederholbedingungen (siehe 3.2.14) oder unter Vergleichsbedingungen (siehe 3.2.15) ermittelt werden.
3.1.6	n	Umfang einer Beobachtungsreihe <i>en: size of a series of observations</i>	Anzahl der Beobachtungswerte einer Beobachtungsreihe (siehe 3.1.5)
3.1.7	f ν, r	Anzahl der Freiheitsgrade <i>en: number of degrees of freedom</i>	Anzahl der überschüssigen Beobachtungen ANMERKUNG 1 Bei der Ermittlung des Mittelwertes $\bar{x}$ nach 3.3.3 aus einer Beobachtungsreihe (siehe 3.1.5) (mit unbekanntem μ_X , siehe 3.2.4) mit dem Umfang n gilt $f = n - 1$. ANMERKUNG 2 Die Anzahl der Freiheitsgrade wird in 7.2.1 als Redundanz r bezeichnet, in DIN V ENV 13005 hingegen als ν .
3.1.8	—	Messgenauigkeit <i>en: accuracy of observations</i>	qualitative Bezeichnung für das Ausmaß der Annäherung eines Messergebnisses (siehe 3.1.4) an den gesuchten Wert (siehe DIN 55350-13) ANMERKUNG 1 Bei Messgrößen ist der gesuchte Wert der wahre Wert $\tilde{X}$ (siehe 3.2.5). ANMERKUNG 2 Sofern Missverständnisse nicht zu erwarten sind, kann die Messgenauigkeit auch als „Genauigkeit“ bezeichnet werden. ANMERKUNG 3 Je höher die Messgenauigkeit, desto kleiner ist die Messunsicherheit (siehe 3.3.10). ANMERKUNG 4 Nach DIN 55350-13 wird die Benennung „Genauigkeit“ nur als qualitatives Merkmal verwendet.

Ab-schnitt	Zeichen	Benennung	Definition
3.2 Statistische Beschreibung von stetigen Zufallsvariablen (en: statistical description of continuous random variables)			
3.2.1	$F(x)$ $G(x)$	Verteilungs-funktion en: distribution function	Funktion, welche für jedes x die Wahrscheinlichkeit P ergibt, dass eine Zufallsvariable X nicht größer als x ist (siehe DIN 55350-21) $F(x) = P(X \leq x)$ ANMERKUNG Wahrscheinlichkeit P (siehe DIN 13303-1).
3.2.2	x_p	p-Quantil en: p -quantile	Wert, für den die Verteilungsfunktion einen vorgegebenen Wert p annimmt (siehe DIN 13303-1 und DIN 55350-21) $F(x_p) = P(X \leq x_p) = p$
3.2.3	$f(x)$ $g(x)$	Wahrscheinlichkeits-dichte en: probability density	erste Ableitung der Verteilungsfunktion (siehe Bild 1 und DIN 55350-21) $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$  Bild 1 — Wahrscheinlichkeitsdichte ANMERKUNG Mittels der Wahrscheinlichkeitsdichte kann die Wahrscheinlichkeit P angegeben werden, mit der eine Zufallsvariable X in ein differentielles Intervall an der Stelle x fällt: $P(x \leq X < x + dx) = f(x) dx$
3.2.4	$E(X)$ μ_X	Erwartungs-wert einer Zu-fallsvariablen en: expected value of a random variable	$E(X) = \mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx \quad (\text{siehe DIN 55350-21})$ ANMERKUNG 1 Der Erwartungswert kann skalar als $E(X)$, auch μ_X , oder mehrdimensional als $E(X)$, auch μ_X , definiert sein. ANMERKUNG 2 Ein Schätzwert für den Erwartungswert ist der Mittelwert $\bar{x}$ (siehe 3.3.3). Bei unendlich großem Umfang n der Beobachtungsreihe fallen diese beiden Werte zusammen, d. h. es gilt für beliebiges $\delta > 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} P(\bar{x} - E(X) > \delta) = 0$ ANMERKUNG 3 Der wahre Wert (siehe 3.2.5) sollte nicht mit dem Erwartungswert als Grenzwert des Mittelwertes mit unendlich großem Umfang n der Beobachtungsreihe verwechselt werden.
3.2.5	$\tilde{X}$	wahrer Wert en: true value	tatsächlicher Wert einer Zufallsvariablen X (siehe 3.1.1) zum Zeitpunkt der Beobachtung ANMERKUNG 1 Der wahre Wert kann skalar oder mehrdimensional definiert sein.

Ab-schnitt	Zeichen	Benennung	Definition
			ANMERKUNG 2 Eine Zufallsvariable kann so definiert sein, dass für sie kein wahrer Wert existiert. BEISPIEL 1 Die Zufallsvariable „Verkehrswert in €/m² eines Wohngrundstückes in mittlerer Lage“ besitzt einen Erwartungswert, der nach 3.2.4 als Mittel aus Kaufpreisen geschätzt werden kann; von einem wahren Wert kann in diesem Fall jedoch nicht gesprochen werden. ANMERKUNG 3 Der wahre Wert einer Zufallsvariablen bleibt in der Regel unbekannt, wenn er nicht aus theoretischen Überlegungen hergeleitet werden kann. BEISPIEL 2 Winkelsumme im Dreieck.
3.2.6	Δ	systematische Abweichung systematischer Fehler, systematische Messabweichung <i>en: systematic error/bias</i>	$\Delta = E(X) - \tilde{X}$ ANMERKUNG 1 Eine systematische Abweichung hat ihre Ursache z. B. in Unvollkommenheiten der Messinstrumente oder des Beobachtungsverfahrens; sie ist in allen Beobachtungswerten (siehe 3.1.3) einer Beobachtungsreihe (siehe 3.1.5) grundsätzlich enthalten (siehe DIN 1319-1). ANMERKUNG 2 Möglichkeiten zum Aufdecken systematischer Abweichungen ergeben sich aus einer erneuten Messung unter Benutzung eines anderen Messverfahrens, eines anderen Messinstrumentes bzw. der Wiederholung unter äußeren Vergleichsbedingungen (siehe 3.2.15).
3.2.7	—	grober Fehler Irrtum <i>en: gross error</i>	durch Irrtum des Beobachters (z. B. Verwechslungen) oder durch Fehlfunktion von Komponenten des Messsystems verursachter Fehler
3.2.8	σ_X^2	Varianz <i>en: variance</i>	$\sigma_X^2 = E((X - \mu_X)^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_X)^2 f(x) dx$ ANMERKUNG Ein Schätzwert für die Varianz σ_X^2 ist die empirische Varianz s_X^2 (siehe 3.3.5). Bei unendlich großem Umfang n (siehe 3.1.6) einer Beobachtungsreihe (siehe 3.1.5) fallen die beiden Werte zusammen, d. h. es gilt für beliebiges $\delta > 0$: $\lim_{n \rightarrow \infty} P(s_X^2 - \sigma_X^2 > \delta) = 0$
3.2.9	σ_X	Standardabweichung <i>en: standard deviation</i>	positive Quadratwurzel aus der Varianz σ_X^2 ANMERKUNG Zusammenhang mit der früheren Benennung „mittlerer Fehler“ (siehe 3.3.6, Anmerkung).
3.2.10	—	Wiederholstandardabweichung <i>en: repeatability standard deviation</i>	Standardabweichung σ_X (siehe 3.2.9) eines Beobachtungswertes x_i (siehe 3.1.3), ermittelt unter Wiederholbedingungen (siehe DIN 1319-1) ANMERKUNG In der Geodäsie wird anstelle der Wiederholstandardabweichung auch die Benennung „innere Messgenauigkeit“ verwendet.

Ab-schnitt	Zeichen	Benennung	Definition
3.2.11	—	Vergleich- standard- abweichung <i>en: reproducibility standard deviation</i>	Standardabweichung σ_x (siehe 3.2.9) eines Beobachtungswertes x_i (siehe 3.1.3), ermittelt unter Vergleichsbedingungen (siehe DIN 1319-1) ANMERKUNG 1 In der Geodäsie wird für die Vergleichstandardabweichung häufig die Benennung „äußere Messgenauigkeit“ verwendet. ANMERKUNG 2 Bei einer Vermessung sollte die Messunsicherheit (siehe 3.3.10) in Form der Vergleichstandardabweichung angegeben werden.
3.2.12	—	Richtigkeit <i>en: correctness</i>	qualitative Bezeichnung für das Ausmaß der Annäherung des Erwartungswertes μ_x an den wahren Wert $\tilde{X}$ einer Messgröße X (siehe DIN 55350-13) ANMERKUNG 1 Ein quantitatives Maß für die Richtigkeit eines Beobachtungswertes x_i (siehe 3.1.3) ist die systematische Abweichung Δ (siehe 3.2.6). Je kleiner die systematische Abweichung Δ , desto besser nähert sich μ_x an $\tilde{X}$ an. ANMERKUNG 2 Geodätische Auswerteverfahren gehen in der Regel von der Annahme $\tilde{X} = \mu_x$ aus. Diese Annäherung wird durch das Anbringen von Korrekturen und Reduktionen an den Messwert bzw. durch die Messungsanordnung sichergestellt.
3.2.13	—	Präzision <i>en: precision</i>	qualitative Bezeichnung für das Ausmaß der Streuung von Beobachtungswerten x_i (siehe 3.1.3) unter Wiederholbedingungen (siehe DIN 55350-13) ANMERKUNG Ein quantitatives Maß für die Präzision eines Beobachtungswertes x_i (siehe 3.1.3) ist die Wiederholstandardabweichung (siehe 3.2.10). Je kleiner die Wiederholstandardabweichung, desto präziser ist das Messergebnis $\hat{x}$. Die Präzision entspricht der in der Geodäsie gebräuchlichen Benennung „innere Messgenauigkeit“.
3.2.14	—	Wiederhol- bedingungen <i>en: repeatability conditions</i>	Bedingungen, unter denen einzelne Beobachtungswerte x_i (siehe 3.1.3) für dieselbe Messgröße X so gewonnen werden, dass etwaige systematische Abweichungen gleich bleiben (siehe DIN 1319-1) ANMERKUNG 1 Wiederholbedingungen liegen dann vor, wenn die Messbedingungen unverändert bleiben (z. B. dasselbe Messverfahren, dieselbe Messeinrichtung, dieselben äußeren Bedingungen, derselbe Beobachter). ANMERKUNG 2 Wiederholbedingungen beschreiben ein Modell, welches dadurch gestört werden kann, dass sich die Einflussgrößen (siehe 3.1.2) während der wiederholten Messung in gewissen Grenzen ändern.
3.2.15	—	Vergleichs- bedingungen <i>en: reproducibility conditions</i>	Bedingungen, unter denen einzelne Beobachtungswerte x_i (siehe 3.1.3) für dieselbe Messgröße X so gewonnen werden, dass Unterschiede der systematischen Abweichungen wirksam werden (siehe DIN 1319-1) ANMERKUNG 1 Vergleichsbedingungen liegen dann vor, wenn die Messbedingungen gänzlich oder zumindest teilweise verändert werden. ANMERKUNG 2 Bei Vermessungen ist die Erzeugung von Vergleichs- oder Wiederholbedingungen (siehe 3.2.14) unter Umständen nur eingeschränkt möglich.

Ab-schnitt	Zeichen	Benennung	Definition
3.3 Beobachtungsreihen für stetige Zufallsvariable (en: series of observations of continuous random variables)			
3.3.1	ε_i	zufällige Abweichung zufällige Mess-abweichung <i>en: random error</i>	Differenz zwischen einem Beobachtungswert x_i (siehe 3.1.3) und dem Erwartungswert μ_X (siehe 3.2.4) einer Zufallsvariablen X (siehe 3.1.1) $\varepsilon_i = x_i - \mu_X, \quad i = 1, 2, \dots, n$
3.3.2	η_i	wahre Abweichung wahre Mess-abweichung <i>en: true error</i>	Differenz zwischen einem Beobachtungswert x_i (siehe 3.1.3) und dem wahren Wert $\tilde{X}$ (siehe 3.2.5) einer Zufallsvariablen X (siehe 3.1.1), zugleich die Summe aus systematischer Abweichung Δ (siehe 3.2.6) und zufälliger Abweichung ε_i (siehe 3.3.1) $\eta_i = x_i - \tilde{X} = \Delta + \varepsilon_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$ ANMERKUNG Falls die Beobachtungswerte keine systematische Abweichung enthalten, sind die zufällige und die wahre Abweichung identisch.
3.3.3	$\bar{x}$	(arithmetischer) Mittelwert <i>en: mean value</i>	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ ANMERKUNG 1 Der Mittelwert $\bar{x}$ ist ein Schätzwert für den Erwartungswert μ_X (siehe 3.2.4). ANMERKUNG 2 Alternativ wird zur Kennzeichnung des Erwartungswertes der Median (siehe DIN 13303-1) als mittlerer Wert einer Beobachtungsreihe verwendet.
3.3.4	v_i	Verbesserung Residuum <i>en: residual</i>	Differenz zwischen dem Mittelwert $\bar{x}$ (siehe 3.3.3) und einem Beobachtungswert x_i (siehe 3.1.3) für eine Zufallsvariable X (siehe 3.1.1) $v_i = \bar{x} - x_i, \quad i = 1, 2, \dots, n$ ANMERKUNG Die Differenz wird auch als Restabweichung $e_i = x_i - \bar{x}$, $i = 1, 2, \dots, n$ angegeben.
3.3.5	s_X^2 $\hat{\sigma}_X^2$	(empirische) Varianz <i>en: experimental variance</i>	Schätzwert für die Varianz σ_X^2 (siehe 3.2.8, DIN 13303-1 und DIN V ENV 13005) $s_X^2 = \hat{\sigma}_X^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n v_i^2$ ANMERKUNG 1 Der Erwartungswert von s_X^2 ist σ_X^2 . ANMERKUNG 2 Sofern eine Verwechslung mit der Varianz σ_X^2 nicht zu erwarten ist, kann auf den Zusatz „empirisch“ verzichtet werden. ANMERKUNG 3 Wenn der Erwartungswert μ_X (siehe 3.2.4) der Zufallsvariablen X (siehe 3.1.1) bekannt ist, wird die empirische Varianz s_X^2 aus den zufälligen Abweichungen ε_i (siehe 3.3.1) berechnet.

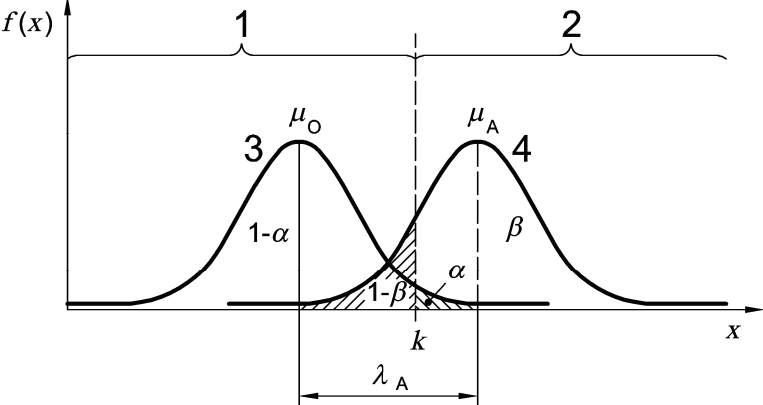
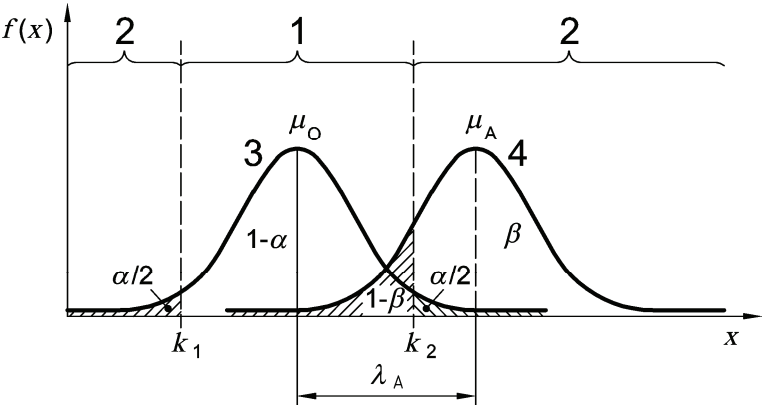
Ab-schnitt	Zeichen	Benennung	Definition
			$s_X^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2$
3.3.6	s_X $\hat{\sigma}_X$	(empirische) Standardabweichung <i>en: experimental standard deviation</i>	positive Quadratwurzel aus der empirischen Varianz s_X^2 (siehe DIN 13303-1) ANMERKUNG Für die (empirische) Standardabweichung sollte die veraltete Benennung „mittlerer Fehler“ nicht verwendet werden.
3.3.7	$\sigma_{\bar{X}}$	Standardabweichung des Mittelwertes <i>en: standard deviation of the mean value</i>	Standardabweichung der Zufallsvariablen $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ (siehe 3.3.3) $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}}$ ANMERKUNG Dies trifft zu, sofern die Zufallsvariablen X_i (siehe 3.1.1) als gleichgewichtig und unabhängig voneinander gelten können.
3.3.8	$s_{\bar{X}}$	(empirische) Standardabweichung des Mittelwertes <i>en: experimental standard deviation of the mean value</i>	Schätzwert für die Standardabweichung $\sigma_{\bar{X}}$ (siehe 3.3.7) des Mittelwertes $s_{\bar{X}} = \frac{s_X}{\sqrt{n}}$
3.3.9	u	Messunsicherheit <i>en: uncertainty of a measurement</i>	dem Messergebnis zugeordneter Parameter, der die Streuung der Werte kennzeichnet, die der Messgröße (siehe DIN V ENV 13005) zugeordnet werden kann ANMERKUNG 1 In der Geodäsie wird die Messunsicherheit in der Regel durch eine Standardabweichung σ_X (siehe 3.2.9) gekennzeichnet. ANMERKUNG 2 In die Messunsicherheit sollte, gemäß einer Korrektur k_v mit $E(k_v) = 0$ betrachtet, auch die Unsicherheit eines Beobachtungsverfahrens eingehen. ANMERKUNG 3 In die Messunsicherheit kann, gemäß einer Korrektur k_s mit $E(k_s) = 0$ betrachtet, auch die Unsicherheit des Messobjektes eingehen (Systemrauschen). ANMERKUNG 4 Wird die Messunsicherheit bei der Messung einer Messgröße aus den Messunsicherheiten mehrerer unabhängiger Einflussgrößen hergeleitet, so wird diese hergeleitete Messunsicherheit als kombinierte Messunsicherheit bezeichnet (siehe DIN V ENV 13005).

Ab-schnitt	Zeichen	Benennung	Definition
3.3.10	—	vollständiges Messergebnis <i>en: complete result of a measurement</i>	Messergebnis (siehe 3.1.4) mit Angaben zur Messunsicherheit (siehe 3.3.9 und DIN 1319-1) ANMERKUNG 1 Ist $\hat{x}$ das Messergebnis einer skalaren Messgröße und die Standardabweichung σ_X ein Ausdruck für die Messunsicherheit (siehe 3.3.9), so ist $\hat{x} \pm \sigma_X$ eine der möglichen Schreibweisen für das vollständige Messergebnis (siehe DIN 1319-3). Diese Schreibweise sollte gewählt werden, wenn die Messunsicherheit (3.3.9) als Intervall gekennzeichnet wird. ANMERKUNG 2 Weitere mögliche Gesichtspunkte bei der Angabe eines vollständigen Messergebnisses sind Angaben zum eingesetzten Messinstrumentarium, den Messbedingungen, den Messzeitpunkten usw.
3.3.11	—	relative Messunsicherheit <i>en: relative uncertainty of a measurement</i>	Messunsicherheit (siehe 3.3.9), in der Regel ausgedrückt durch die Standardabweichung σ_X (siehe 3.2.9), bezogen auf den Betrag des Messergebnisses $\hat{x}$ (siehe 3.1.4) oder eine Bezugsgröße D ANMERKUNG 1 In DIN 1319-1 wird die relative Messunsicherheit als Quotient von Messunsicherheit zu dem Betrag des Messergebnisses definiert: $\frac{u}{ \hat{x} }, \hat{x} \neq 0$ In der Geodäsie wird die relative Messunsicherheit, davon abweichend, auf eine charakteristische Bezugsgröße D, insbesondere die Länge des Messweges, bezogen $\frac{u}{D}, D > 0$ BEISPIEL 1 Für den nivellierten Höhenunterschied zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 wird eine Standardabweichung von $\sigma_X = 1,5 \text{ mm}$ ermittelt. Die Länge des Messweges zwischen den Punkten P_1 und P_2 beträgt $D = 1,7 \text{ km}$. Als relative Messunsicherheit ergibt sich $\frac{1,5 \text{ mm}}{1,7 \text{ km}} = 0,9 \frac{\text{mm}}{\text{km}}$ ANMERKUNG 2 In der Geodäsie sind Angaben über die Messunsicherheit vielfach unmittelbar relative Messunsicherheiten, da sie nur durch Multiplikation mit dem Abstand zweier Punkte zu Messunsicherheiten im Koordinatensystem führen. ANMERKUNG 3 Bei einigen Messverfahren (z. B. in der Photogrammetrie und bei satellitengestützten Positionierungen), wird die Leistungsfähigkeit des gesamten Messverfahrens durch die Angabe von Relationen beschrieben (z. B. 1 : 1 00 000, 1 : 500 000). Durch Multiplikation mit dem Abstand zweier Punkte wird hieraus eine Messunsicherheit im Objektraum. BEISPIEL 2 Ist die Ausdehnung des Objektraumes 10 m, so entspricht der Relation 1:100 000 einer Standardabweichung $\sigma_X = 0,1 \text{ mm}$.

Ab-schnitt	Zeichen	Benennung	Definition										
3.4 Beurteilende Statistik (en: statistical inference)													
3.4.1	$1-\alpha$	Vertrauens-niveau Konfidenz-niveau en: confidence level	Für die Berechnung eines Vertrauensbereichs vorgegebene Wahrscheinlichkeit P ANMERKUNG α ist üblicherweise eine im Vergleich mit der maximalen Wahrscheinlichkeit 1 kleine Zahl (z. B. $\alpha = 0,05$ oder $\alpha = 0,01$) und wird als Irrtumswahrscheinlichkeit (siehe 3.4.9) bezeichnet.										
3.4.2	C	Vertrauens-intervall Vertrauens-bereich, Konfidenzintervall en: confidence interval	Vertrauensintervall $C = [C_u, C_o]$ (siehe 3.4.3), das den Erwartungswert μ_X (siehe 3.2.4) für einen zu schätzenden Parameter X mit der Wahrscheinlichkeit $P = 1 - \alpha$ (siehe 3.4.1) überdeckt $P(\mu_X \in C) = P(C_u \leq \mu_X \leq C_o) = P(\hat{x} - k \sigma_X \leq \mu_X \leq \hat{x} + k \sigma_X) = 1 - \alpha$, mit $\hat{x}$ als Messergebnis (siehe 3.1.4). ANMERKUNG 1 Nach DIN 13303-2 ist der „Vertrauensbereich“ die übergeordnete Benennung zu Vertrauensintervall, Vertrauensellipse (siehe 3.7.3) und Vertrauenshyperellipsoid (siehe 3.7.2). ANMERKUNG 2 Siehe 3.2.12, Anmerkung 2. ANMERKUNG 3 Der Faktor k ist von der Wahl des Vertrauensniveaus abhängig. Bei normalverteilten Zufallsvariablen sind häufig benutzte Werte für $1 - \alpha$: <table><tr><td>$1 - \alpha$ %</td><td>k</td></tr><tr><td>68,26</td><td>1,00</td></tr><tr><td>95</td><td>1,96</td></tr><tr><td>99</td><td>2,58</td></tr><tr><td>99,7</td><td>3,00</td></tr></table> ANMERKUNG 4 Falls nicht anders vereinbart, bezieht sich ein Vertrauens- oder Konfidenzbereich auf das Vertrauensniveau $1 - \alpha = 95 \%$ (Signifikanzniveau). ANMERKUNG 5 Die in Vermessungsanweisungen häufig zu findenden „größten zulässigen Abweichungen“ (früher auch als „Fehlergrenzen“ bezeichneten Grenzwerte) leiten sich in der Regel aus dem Wert $k = 3$ her. ANMERKUNG 6 Bei der Ermittlung des Vertrauensbereiches unter Benutzung einer empirischen Standardabweichung nach 3.3.8 werden die Quantile der t -Verteilung (siehe 3.5.9) verwendet.	$1 - \alpha$ %	k	68,26	1,00	95	1,96	99	2,58	99,7	3,00
$1 - \alpha$ %	k												
68,26	1,00												
95	1,96												
99	2,58												
99,7	3,00												

Ab-schnitt	Zeichen	Benennung	Definition
3.4.3	C_u, C_o	untere bzw. obere Vertrauensgrenze untere bzw. obere Konfidenzgrenze <i>en: lower resp. upper limit of confidence</i>	untere bzw. obere Grenze des Vertrauensintervalls einer Zufallsvariablen (siehe 3.1.1) ANMERKUNG 1 Wenn nicht ausdrücklich anders angegeben, gilt neben der Wahrscheinlichkeitsbeziehung in 3.4.2 zusätzlich die Symmetriebedingung: $P(\mu_X < C_u) = P(\mu_X > C_o) = \frac{\alpha}{2}$ ANMERKUNG 2 In der Benennung der Vertrauensgrenzen wird zwischen den Zufallsvariablen und ihren Schätzwerten nicht unterschieden.
3.4.4	U	erweiterte Messunsicherheit <i>en: extended uncertainty of a measurement</i>	Kennwert für die Genauigkeit einer Messung, der einen Wertebereich kennzeichnet, der den wahren Wert $\tilde{X}$ (siehe 3.2.5) einer Messgröße mit hoher Wahrscheinlichkeit enthält (siehe DIN 1319-3 und DIN V ENV 13005) $U = k \cdot u$ Dabei ist u die Messunsicherheit (siehe 3.3.9); k der Faktor (siehe 3.4.2, Anmerkung 3). ANMERKUNG Der Erweiterungsfaktor k zu der Messunsicherheit (siehe 3.3.10) wird nach DIN 1319-3 vorzugsweise als $k=2$ genommen. In DIN V ENV 13005 werden für den Faktor k Werte zwischen 2 und 3 angegeben. Eine Zuordnung zu einer Wahrscheinlichkeit P erfolgt nicht, da keine Aussage zur Verteilungsfunktion der Messgröße X und der auf sie einwirkenden Einflussgrößen Y_i (siehe 3.1.2), deren Unsicherheiten bei der Ermittlung der Messunsicherheit (siehe 3.3.10) berücksichtigt werden, getroffen werden kann.
3.4.5	—	Parameterschätzung <i>en: parameter estimation</i>	Schätzung der gesuchten Parameter einer Grundgesamtheit aus der Analyse einer Stichprobe (indirekter Repräsentationsschluss) ANMERKUNG In der Regel werden für die geschätzten Parameter Vertrauensintervalle (siehe 3.4.2) angegeben.
3.4.6	—	Verteilungstest <i>en: distribution test</i>	Prüfung einer Verteilungshypothese und Beurteilung der Güte der Anpassung zwischen einer theoretischen Verteilung (Verteilung der Grundgesamtheit) und einer empirischen Verteilung (Verteilung der Stichprobe) ANMERKUNG Eine typische Anwendung ist die Prüfung einer Stichprobe auf Normalverteilung (siehe 3.5.1).

Ab-schnitt	Zeichen	Benennung	Definition
3.4.7	—	Modellfehler <i>en: model error</i>	Fehler im funktionalen oder stochastischen Modell, das einer Parameterschätzung (siehe 3.4.5) zu Grunde liegt ANMERKUNG Modellfehler sind z. B.: — unvollständiger bzw. fehlerhafter funktionaler Zusammenhang zwischen Beobachtungswerten (siehe 3.1.3) und Parameter (siehe 4.3), z. B. Vernachlässigung von Maßstabs- oder Nullpunktkorrektur bei der elektrooptischen Distanzmessung (siehe DIN 18709-1); — unvollständiges bzw. fehlerhaftes stochastisches Modell nach 4.1.6 (z. B. durch die Vernachlässigung von Korrelationen); — grobe Fehler (siehe 3.2.7).
3.4.8	—	Hypothesen-test Parametertest <i>en: hypothesis test, parameter test</i>	Prüfen von Hypothesen ANMERKUNG 1 Hypothesen werden z. B. bezüglich der Parameter geprüft. ANMERKUNG 2 Dabei sind z. B. die Aufdeckung von Modellfehlern (siehe 3.4.7), die Deformationsanalyse oder die eventuelle Überparameterisierung von Ausgleichungsmodellen von besonderer Bedeutung. ANMERKUNG 3 Mit einem Parameter u und einem angenommenen Wert bzw. Sollwert u_0 gilt bei einer Prüfung auf Gleichheit: — Nullhypothese H_0: $u = u_0$; — Alternativhypothese H_A: Gegenhypothese zur Nullhypothese; • als einseitiger Test: $u > u_0$ (bzw. $u < u_0$); • als zweiseitiger Test: $u \neq u_0$. ANMERKUNG 4 Für das Testschema gilt: a) Aufstellung von H_0 und H_A, Vorgabe von α (siehe 3.4.9); b) Berechnung einer Testgröße (z. B. entsprechend 3.5.2 oder 3.5.8); c) Bestimmung der Testschranke(n) für Annahme oder Verwerfung von H_0 entsprechend der Verteilung der Testgröße; d) Testentscheidung und Interpretation.
3.4.9	α	Irrtumswahrscheinlichkeit <i>en: error probability</i>	Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines Fehlers. ANMERKUNG 1 Bei einem Fehler 1. Art handelt es sich um das Verwerfen der Nullhypothese H_0, obwohl sie richtig ist (siehe Bild 2). ANMERKUNG 2 Die Sicherheitswahrscheinlichkeit zur korrekten Annahme von H_0 ist $1 - \alpha$.

Ab-schnitt	Zeichen	Benennung	Definition
3.4.10	β	Testgüte <i>en: power of the test</i>	Wahrscheinlichkeit für die Ablehnung der Nullhypothese H_0 bei Zutreffen der Alternativhypothese H_A (richtige Entscheidung) ANMERKUNG Der Fehler 2. Art steht für die Irrtumswahrscheinlichkeit $1 - \beta$, mit der H_0 angenommen wird, obwohl sie falsch ist (siehe Bild 2).  a) beim einseitigen Parametertest  b) beim zweiseitigen Parametertest Legende 1 Annahmebereich 2 Verwerfungsbereich 3 Dichte von H_0 4 Dichte von H_A λ_A Nichtzentralitätsparameter k, k_1, k_2 Grenzwerte für den Annahmebereich Bild 2 — Irrtumswahrscheinlichkeiten und Testgüte
3.4.11	λ_A	Nichtzentralitätsparameter <i>en: noncentrality parameter</i>	Abstand zwischen den Verteilungszentren der Nullhypothese H_0 und einer Alternativhypothese H_A (siehe 3.4.8, Anmerkung 3) ANMERKUNG Siehe Bild 2.

Ab-schnitt	Zeichen	Benennung	Definition
3.5 Normalverteilte Zufallsvariable (en: normal distributed random variables)			
3.5.1	$N(\mu_X, \sigma_X^2)$	Normal-verteilung <i>en: normal distribution</i>	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen X (siehe 3.1.1) mit dem Erwartungswert μ_X (siehe 3.2.4) und der Varianz σ_X^2 (siehe 3.2.8), welche die Wahrscheinlichkeitsdichte $f(x) = \frac{1}{\sigma_X} \varphi\left(\frac{x - \mu_X}{\sigma_X}\right), \quad -\infty < x < \infty, \quad \sigma_X > 0$ aufweist, mit $\varphi(u)$ aus 3.5.3 ANMERKUNG 1 Schreibweise: X verteilt nach $N(\mu_X, \sigma_X^2)$, auch $X \sim N(\mu_X, \sigma_X^2)$. ANMERKUNG 2 Wenn nicht besondere Umstände dagegen sprechen, werden die Beobachtungswerte (siehe 3.1.3) in der Geodäsie als normalverteilt angenommen. Eine Überprüfung dieser Hypothese im Einzelfall ist wegen des gewöhnlich zu geringen Umfangs der Beobachtungsreihen (3.1.5) nur selten möglich.
3.5.2	$N(0,1)$	standardisierte Normalverteilung Standardnormalverteilung <i>en: standardized normal distribution</i>	Wahrscheinlichkeitsverteilung einer Zufallsvariablen Y mit dem Erwartungswert $\mu_Y = 0$ und der Varianz $\sigma_Y^2 = 1$, welche die Wahrscheinlichkeitsdichte $\varphi(u)$ nach 3.5.3 aufweist ANMERKUNG 1 Schreibweise: $Y \sim N(0,1)$. ANMERKUNG 2 Eine nach $N(\mu_X, \sigma_X^2)$ verteilte Zufallsvariable X wird in eine nach $N(0,1)$ verteilte Zufallsvariable Y transformiert durch: $Y = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$
3.5.3	$\varphi(u)$	Wahrscheinlichkeitsdichte der standardisierten Normalverteilung <i>en: probability density of standardized normal distribution</i>	$\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right), \quad -\infty < u < \infty$ ANMERKUNG Voraussetzung: $Y \sim N(0,1)$