

DIN 18709-5

ICS 01.040.07; 07.040

**Begriffe, Kurzzeichen und Formelzeichen in der Geodäsie –
Teil 5: Auswertung kontinuierlicher Messreihen**

Concepts, abbreviations and symbols in geodesy –
Part 5: Evaluation of continuous series of observations

Notions, symboles et formules dans le domaine de la géodésie –
Partie 5: Analyse de séries de mesures continues

Gesamtumfang 42 Seiten

Normenausschuss Bauwesen (NABau) im DIN

Inhalt

	Seite
Vorwort	3
Einleitung.....	4
1 Anwendungsbereich	4
2 Normative Verweisungen.....	4
3 Eindimensionale stochastische Prozesse (<i>en: one-dimensional stochastic processes</i>).....	5
3.1 Grundbegriffe stochastischer Prozesse (<i>en: terms and definitions of stochastic processes</i>)	5
3.2 Spezielle stochastische Prozesse (<i>en: special stochastic processes</i>).....	13
4 Beziehungen zwischen eindimensionalen stochastischen Prozessen (<i>en: relations between one-dimensional stochastic processes</i>).....	18
5 Mehrdimensionale stochastische Prozesse (<i>en: multidimensional stochastic processes</i>).....	22
6 Eindimensionale Filter (<i>en: one-dimensional filters</i>)	25
6.1 Grundbegriffe (<i>en: basic terms and definitions</i>)	25
6.2 Filterarten (<i>en: filter types</i>)	26
7 Filter- und Prädiktionsverfahren (<i>en: filtering and prediction methods</i>).....	30
7.1 Kollokation (<i>en: collocation</i>)	30
7.2 Kalman-Filter (<i>en: Kalman filter</i>)	33
Anhang A (informativ) Schätzung der Parameter von stochastischen Prozessen (<i>en: estimation of the parameters of stochastic processes</i>).....	38
Literaturhinweise	40
Stichwortverzeichnis	41

Vorwort

Diese Norm wurde vom Normenausschuss Bauwesen (NABau), Fachbereich 03 „Vermessungswesen, Geoinformation“, Arbeitsausschuss „Geodäsie“, NA 005-03-01 AA, erarbeitet.

DIN 18709 *Begriffe, Kurzzeichen und Formelzeichen in der Geodäsie* besteht aus:

- *Teil 1: Allgemeines*
- *Teil 2: Ingenieurvermessung*
- *Teil 3: Seevermessung*
- *Teil 4: Ausgleichungsrechnung und Statistik*
- *Teil 5: Auswertung kontinuierlicher Messreihen*

Es wird auf die Möglichkeit hingewiesen, dass einige Texte dieses Dokuments Patentrechte berühren können. Das DIN [und/oder die DKE] sind nicht dafür verantwortlich, einige oder alle diesbezüglichen Patentrechte zu identifizieren.

Einleitung

Häufig werden in der Geodäsie Messgrößen erfasst, die die zeitlich variable Geometrie eines zu beobachtenden Objekts beschreiben. Ein zu beobachtendes Objekt lässt sich als ein zusammengesetztes, abgegrenztes Ganzes betrachten und erfüllt damit die Definition eines physischen Systems. Die Veränderungen eines physischen Systems beruhen auf der Übertragung, Umwandlung und Erhaltung von Materie, Impuls und Energie. Diese Veränderungen werden als Prozess bezeichnet und sind als Systemeingang sowie als Systemausgang in Form von Messreihen zu erfassen. Die Realisierung eines stochastischen Prozesses kann nicht nur zeitabhängig (dann als Zeitreihe bezeichnet), sondern auch ortsabhängig erfolgen. Der Parameter Zeit wird dann durch einen oder mehrere ortsbezogene Parameter ersetzt bzw. ergänzt.

Im Zeit-, Orts- und Frequenzraum können mit Hilfe mathematischer Operatoren deterministische und stochastische Prozesseigenschaften sowie Beziehungen zwischen stochastischen Prozessen beschrieben werden, wobei die Operatoren die Eigenschaften stochastischer Prozesse hervorheben oder dämpfen. Ein System wird in ein Modell abgebildet, welches aufgrund bekannter Gesetzmäßigkeiten und getroffener Annahmen das System und seine Prozesse bezüglich ausgewählter Fragestellungen hinreichend genau beschreibt. Filter- und Prädiktionsverfahren schätzen die deterministischen und stochastischen Parameter des Modells.

1 Anwendungsbereich

Diese Norm gilt für die Verarbeitung, Auswertung und Beurteilung von stochastischen Prozessen, wie sie in der Geodäsie in der Form kontinuierlicher Messreihen vorliegen. Zweck dieser Norm ist es, den geodätischen Sprachgebrauch an Begriffe anderer Disziplinen anzupassen, soweit diese übergeordnete Bedeutung erlangt haben. Andererseits müssen jedoch, wo dies möglich ist, die in der Geodäsie eingeführten Begriffe beibehalten werden. Grundlagen dieser Norm sind die Standardwerke der Zeitreihen-, Prozess-, Signalanalyse und der Systemtheorie.

Typische Anwendungsgebiete dieser Norm sind die Analyse kontinuierlicher Überwachungsvermessungen (z. B. von Bauwerken) und die Modellierung von Prozessen, die eine zeitliche Komponente aufweisen (z. B. die Trajektorie eines fahrenden Autos). Daneben werden die vorgestellten Verfahren auch zur Beschreibung und Auswertung von Messverfahren verwendet, die unabhängig von der beobachteten Geometrie kontinuierliche Messreihen erzeugen (z. B. Messungen mit dem Global Positioning System).

2 Normative Verweisungen

Die folgenden zitierten Dokumente sind für die Anwendung dieses Dokuments erforderlich. Bei datierten Verweisungen gilt nur die in Bezug genommene Ausgabe. Bei undatierten Verweisungen gilt die letzte Ausgabe des in Bezug genommenen Dokuments (einschließlich aller Änderungen).

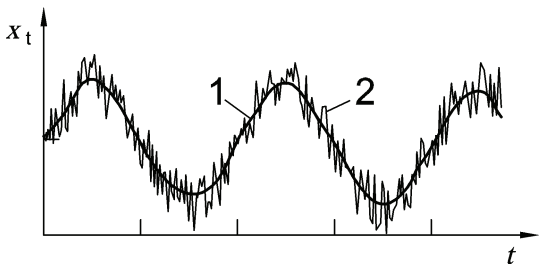
DIN 18709-4, *Begriffe, Kurzzeichen und Formelzeichen in der Geodäsie — Teil 4: Ausgleichsrechnung und Statistik*

DIN IEC 60050-351, *Internationales Elektrotechnisches Wörterbuch — Teil 351: Leittechnik*

3 Eindimensionale stochastische Prozesse (*en: one-dimensional stochastic processes*)

Ab-schnitt	Zeichen	Benennung	Definition
3.1 Grundbegriffe stochastischer Prozesse (<i>en: terms and definitions of stochastic processes</i>)			
3.1.1	$X(t)$	stochastischer Prozess Zufallsprozess <i>en: stochastic process</i>	Folge von Zufallsereignissen, die als Menge $X(t)$ von Zufallsvariablen (siehe DIN 18709-4) in Abhängigkeit von einem Parameter t dargestellt werden kann, wobei t in einer Zahlenmenge T, in der Regel dem Messungszeitraum (siehe 3.1.4), variiert ANMERKUNG 1 Im Gegensatz zu einem deterministischen Prozess, der vollständig vorhergesagt und reproduziert werden kann, ist ein stochastischer Prozess an keiner Stelle t exakt vorhersagbar und kann nicht reproduziert werden. ANMERKUNG 2 Der stochastische Prozess kann nicht kausal-funktional, sondern nur durch seine Verteilungs(dichte)funktion (siehe 3.1.13) dargestellt werden. ANMERKUNG 3 Ein Prozess wird auch dann als stochastisch bezeichnet, wenn er neben stochastischen auch unbekannte deterministische Anteile enthält. ANMERKUNG 4 Ist $t \in \mathbf{Z}$ ($\mathbf{Z}$: Menge der ganzen Zahlen), so handelt es sich um einen diskreten stochastischen Prozess; ist $t \in \mathbf{R}$ ($\mathbf{R}$: Menge der reellen Zahlen), so ist der Prozess kontinuierlich. BEISPIEL Der zeitliche Temperaturverlauf an einem bestimmten Ort kann durch einen stochastischen Prozess beschrieben werden. ANMERKUNG 5 Ein stochastischer Prozess, dessen Autokovarianzfunktion (siehe 3.1.6) sich bei Variation des Parameters nicht beliebig ändert, heißt stochastischer Prozess mit Erhaltensneigung.
3.1.2	$x(t)$	Realisierung eines stochastischen Prozesses <i>en: realization of a stochastic process</i>	(zeitlich) geordnete Folge von Beobachtungswerten (siehe DIN 18709-4), wobei für jeden Zeitpunkt $t \in T$ (siehe 3.1.1) genau ein Beobachtungswert vorliegt ANMERKUNG 1 Alle möglichen Realisierungen $\{x_i(t); i = 0, 1, 2, \dots\}$ bilden den stochastischen Prozess $X(t)$ (siehe 3.1.1). ANMERKUNG 2 Ist der Parameter t die Zeit, so wird ein eindimensionaler stochastischer Prozess auch als Zeitreihe bezeichnet. ANMERKUNG 3 Handelt es sich bei den Werten einer Zeitreihe um gemessene Größen, so wird dies als Messreihe bezeichnet. ANMERKUNG 4 Eine Zeitreihe stellt eine diskrete Realisierung eines stochastischen Prozesses $X(t)$ dar. Sie wird in der Regel mit $x(k)$ bezeichnet; mit k als diskreten Zeitpunkt der Zeitreihe. BEISPIEL Temperaturmessungen an einer festgelegten Stelle eines Bauwerks zu bestimmten Zeitpunkten bilden eine Zeit- bzw. Messreihe.

Ab-schnitt	Zeichen	Benennung	Definition
3.1.3	$\mu_X(t)$	Erwartungswert-funktion Mittelwertfunktion <i>en: expectation value function, mean value function</i>	$\mu_X(t) = E(X(t))$ ANMERKUNG 1 Existiert für jedes $t \in T$ (siehe 3.1.1, Anmerkung 4) der Erwartungswert (siehe DIN 18709-4) der Zufallsvariablen $X(t)$ (siehe DIN 18709-4), so ist die Erwartungswertfunktion $\mu_X(t)$ des stochastischen Prozesses bekannt. ANMERKUNG 2 Bei Mittelwertstationarität des stochastischen Prozesses (siehe 3.1.14) gilt im diskreten Fall $\mu_X = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} x_i f(x_i)$ und im kontinuierlichen Fall $\mu_X = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx ,$ wobei $f(x_i)$ beziehungsweise $f(x)$ die entsprechenden Wahrscheinlichkeitsdichten bezeichnen.
3.1.4	$\bar{x}$	empirischer Mittelwert <i>en: experimental mean value</i>	$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} x_j , \text{ mit } n = \text{Anzahl der Werte der Zeitreihe}$ Im kontinuierlichen Fall gilt: $\bar{x} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) dt$ mit T: Messungszeitraum, $T = n \cdot \Delta t$ und Δt: Abtastrate (siehe 3.1.21) ANMERKUNG Der empirische Mittelwert ist dann ein erwartungstreuer Schätzwert für den Erwartungswert (siehe DIN 18709-4), wenn (Mittelwert-)Stationarität (siehe 3.1.14) des stochastischen Prozesses (siehe 3.1.1) vorliegt.
3.1.5	—	Trend <i>en: trend</i>	deterministische Variation eines stochastischen Prozesses ANMERKUNG 1 Der Trend kann mit Hilfe glatter mathematischer Funktionen modelliert werden. ANMERKUNG 2 Prozesse, die keinen Trend enthalten oder deren Trend abgespalten wurde, sind mittelwertstationär (siehe 3.1.14).

Ab-schnitt	Zeichen	Benennung	Definition
			BEISPIEL Ein periodischer Trend kann häufig durch eine geeignete Sinusfunktion modelliert und abgespaltet werden.  Legende 1 Trend 2 Zeitreihe Bild 1 — Trend
3.1.6	$C_{XX}(\tau)$	Autokovarianz-funktion <i>en: auto-covariance function</i>	Funktion eines stochastischen Prozesses $X(t)$ (siehe 3.1.1): $C_{XX}(\tau) = E((X(t) - \mu_X)(X(t + \tau) - \mu_X))$ mit $\mu_X(t) = \mu_X = \text{const}; \quad t \in T$ ANMERKUNG 1 $\tau = t_2 - t_1$ ANMERKUNG 2 Bei den angegebenen Gleichungen zur Berechnung der Autokovarianzfunktion wird Stationarität (siehe 3.1.14) des Prozesses vorausgesetzt. ANMERKUNG 3 $C_{XX}(0) = \sigma^2(t)$, die Varianz (siehe DIN 18709-4) ist in der Autokovarianzfunktion enthalten. ANMERKUNG 4 Die Autokovarianzfunktion ist eine gerade Funktion.
3.1.7	$\hat{C}_{XX}(\tau)$	empirische Autokovarianz-funktion <i>en: experimental autocovariance function</i>	aus Zeitreihen (siehe 3.1.2) geschätzte Autokovarianzfunktion, die sich bei diskreter Realisierung (siehe 3.1.2) und bei Stationarität (siehe 3.1.14) der Zeitreihe ergibt zu $\hat{C}_{XX}(m) = \frac{1}{n-m} \sum_{i=0}^{n-m-1} (x_i - \bar{x})(x_{i+m} - \bar{x})$ ANMERKUNG 1 Im Falle kontinuierlicher Realisierungen gilt: $\hat{C}_{XX}(\tau) = \frac{1}{T-\tau} \int_0^{T-\tau} (x(t) - \bar{x})(x(t+\tau) - \bar{x}) dt$ Dabei ist m die Anzahl der Werte, die zur Berechnung der empirischen Autokovarianzfunktion herangezogen werden, in der Regel $m \leq \frac{n}{10};$ n die Anzahl der Werte der Zeitreihe. ANMERKUNG 2 $\hat{C}_{XX}(0) = s^2$, die empirische Varianz (siehe DIN 18709-4) ist in der empirischen Autokovarianzfunktion enthalten.

Ab-schnitt	Zeichen	Benennung	Definition
3.1.8	$R_{XX}(\tau)$	Autokorrelationsfunktion <i>en: auto-correlation function</i>	normierte Autokovarianzfunktion (siehe 3.1.6) $R_{XX}(\tau) = \frac{C_{XX}(\tau)}{C_{XX}(0)}$ ANMERKUNG 1 Bei der angegebenen Gleichung zur Berechnung der Autokorrelationsfunktion wird Stationarität (siehe 3.1.14) des Prozesses vorausgesetzt. ANMERKUNG 2 Es gilt $R_{XX}(0) = 1$.
3.1.9	$\rho_{ij,k}$	partieller Korrelationskoeffizient <i>en: partial correlation coefficient</i>	$\rho_{ij,k} = \frac{\rho_{ij} - \rho_{ik}\rho_{jk}}{\sqrt{(1-\rho_{jk}^2)(1-\rho_{ik}^2)}}$ mit ρ_{ij} , ρ_{ik} , ρ_{jk} als Korrelationskoeffizienten (siehe DIN 18709-4) zwischen den entsprechenden Zufallsvariablen (siehe DIN 18709-4) ANMERKUNG Der partielle Korrelationskoeffizient der Zufallsvariablen $X(t_i)$ und $X(t_j)$ zu den Zeitpunkten t_i und t_j bezüglich der Zufallsvariablen $X(t_k)$ zum Zeitpunkt t_k ist ein Maß für die Korrelation (siehe DIN 18709-4) zwischen den Größen $X(t_i)$ und $X(t_j)$ ohne Berücksichtigung des Einflusses von $X(t_k)$.
3.1.10	$\hat{R}_{XX}(\tau)$	empirische Autokorrelationsfunktion <i>en: experimental autocorrelation function</i>	aus einer beobachteten Zeitreihe geschätzte Autokorrelationsfunktion (analog zu 3.1.7) $\hat{R}_{XX}(\tau) = \frac{\hat{C}_{XX}(\tau)}{\hat{C}_{XX}(0)}$
3.1.11	τ_0	Korrelationslänge Halbwertsbreite <i>en: correlation length</i>	$C_{XX}(\tau_0) = \frac{\sigma^2}{2}$ Parameterwert, für den die Autokovarianzfunktion gleich der halben Varianz (siehe DIN 18709-4) ist ANMERKUNG 1 Die Korrelationslänge gibt die Abklingeigenschaft der Autokovarianzfunktion (siehe 3.1.6) an. ANMERKUNG 2 Die Korrelationslänge wird, wenn der stochastische Prozess (siehe 3.1.1) in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt wird, auch als Korrelationszeit bezeichnet. ANMERKUNG 3 Die Korrelationslänge ist nur bei stationären Prozessen eine konstante Größe. ANMERKUNG 4 In der Regel wird für die Erhaltensneigung an Stelle der Korrelationslänge ein Formparameter a verwendet. BEISPIEL Falls $C_{XX}(\tau) = \frac{\sigma^2}{1 + \frac{\tau^2}{a^2}}$, dann ist $a = \tau_0$.

Ab-schnitt	Zeichen	Benennung	Definition
3.1.12	b	Korrelationsperiode <i>en: correlation period</i>	Periode, mit der ein bestimmter Wert eines Korrelationskoeffizienten (siehe DIN 18709-4) wiederholt auftritt ANMERKUNG Die Korrelationsperiode ist der Parameter, der die Wiederholungsneigung beschreibt. Wiederholungsneigung bedeutet, dass in einem Prozess dominierende Periodizitäten auftreten. BEISPIEL $\cos(b \cdot \tau)$ mit b als Korrelationsperiode (siehe 3.2.10).
3.1.13	$F(x_1, x_2, \dots, x_n)$	Verteilungsfunktion eines stochastischen Prozesses <i>en: distribution function of a stochastic process</i>	gemeinsame Verteilungsfunktion von $X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n)$, wenn $F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n)$ gilt Dabei ist P die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses (siehe DIN 18709-4) $X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2, \dots, X(t_n) \leq x_n$ für beliebige $x_1, x_2, \dots, x_n$ ANMERKUNG Ein stochastischer Prozess $X(t)$ (siehe 3.1.1) ist eindeutig definiert, wenn seine Verteilungsfunktion zu jedem Zeitpunkt bekannt ist.
3.1.14	–	Stationarität <i>en: stationarity</i>	Eigenschaft eines Prozesses, wenn gilt: $E(X(t)) = \text{const und } C_{XX}(t_2 - t_1) = C_{XX}(t_1 - t_2) = C_{XX}(\tau)$ Dabei ist $C_{XX}(\tau)$ die Autokovarianzfunktion (siehe 3.1.6). ANMERKUNG 1 Starke Stationarität (d. h. Stationarität im engeren Sinne) liegt vor, wenn die Verteilungsfunktion (siehe DIN 18709-4) eines stochastischen Prozesses unabhängig vom Parameter t ist. ANMERKUNG 2 Schwache Stationarität (d. h. Stationarität im weiteren Sinne) liegt vor, wenn der Erwartungswert und die Autokovarianzfunktion (siehe 3.1.6) eines stochastischen Prozesses unabhängig vom Parameter t sind. ANMERKUNG 3 Jeder stark stationäre Prozess ist auch schwach stationär. ANMERKUNG 4 Mittelwertstationarität liegt vor, wenn die Erwartungswerte aller Zufallsvariablen (siehe DIN 18709-4) identisch sind: $\mu_X(t) = \mu_X \text{ für alle } t \in T$ ANMERKUNG 5 Varianzstationarität liegt vor, wenn die Varianzen (siehe DIN 18709-4, dort σ_X^2) der Zufallsvariablen identisch sind: $\sigma^2(t) = \sigma^2 \text{ für alle } t \in T$ ANMERKUNG 6 Kovarianzstationarität liegt vor, wenn die Kovarianzen zwischen den einzelnen Zufallsvariablen nur von dem Abstand τ abhängen. Varianzstationarität liegt dann in jedem Fall vor: $C_{XX}(t_2 - t_1) = C_{XX}(\tau) \text{ mit } t_2 - t_1 = \tau \text{ für alle } \tau, t_1, t_2 \in T$

Ab-schnitt	Zeichen	Benennung	Definition
3.1.15	–	Ergodizität <i>en: ergodicity</i>	Eigenschaft eines stochastischen Prozesses $X(t)$ (siehe 3.1.2), bei der eine Realisierung $X(t)$ alle Informationen über den Gesamtprozess enthält ANMERKUNG Im Allgemeinen wird Ergodizität vorausgesetzt, obwohl diese mathematisch nicht beweisbar ist, sondern nur aufgrund der äußeren Umstände vermutet werden kann.
3.1.16	$F(f(x))$	Fourier-Transformation <i>en: Fourier transformation</i>	Darstellung einer Funktion $f'(y)$ als Summe unendlich vieler harmonischer Schwingungen mit monoton variierender Frequenz $f(y)$ ANMERKUNG 1 Das Fourier-Integral ist die Entwicklung einer Funktion in ein kontinuierliches Spektrum: $F(f(x)) = f'(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx} f(x) dx \quad \text{mit } i = \sqrt{-1}$ ANMERKUNG 2 Eine Fourier-Transformation ist immer dann durchführbar, wenn (die Dirichlet'schen Bedingungen gelten und) die Funktion $f'(y)$ absolut integrierbar ist. ANMERKUNG 3 Die Fourier-Transformation ist umkehrbar, d. h. es existiert eine inverse Fourier-Transformation: $F^{-1}(f'(y)) = f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iyx} f(y) dy$ ANMERKUNG 4 Für diskrete stochastische Prozesse (siehe 3.1.1) geht die Fourier-Transformation von der Integraldarstellung in eine Summendarstellung über; die Transformation wird als diskrete Fourier-Transformation bezeichnet (siehe 3.1.20, Beispiel 1 für die diskrete Fourier-Transformation einer Kovarianzfunktion). ANMERKUNG 5 Für gerade Funktionen kann die reelle Fourier-Kosinus-Transformation $F_K(f(x))$ eingesetzt werden (siehe 3.1.17 und 3.1.18). Es gilt für den kontinuierlichen Fall: $F(f(x)) = 2F_K(f(x))$ mit $F_K = \int_0^{\infty} f(x) \cos(xy) dx$ ANMERKUNG 6 Die Fourier-Transformationen nach den Anmerkungen 4 und 5 sind gleichfalls umkehrbar. ANMERKUNG 7 Nach dieser Norm werden die Parameter x und y als Zeitdifferenz τ und Kreisfrequenz $\omega = 2\pi\nu$, mit ν als Frequenz, verstanden (siehe 3.1.17, 3.1.18 und 3.1.19).
3.1.17	$P_{XX}(\nu)$	Leistungsspektrum Powerspektrum, Energiespektrum <i>en: power spectrum</i>	$P_{XX}(\nu) = 2 \int_{\tau=0}^{\infty} C_{XX}(\tau) \cos(2\pi\nu\tau) d\tau$ ANMERKUNG Mit Hilfe der reellen Fourier-Kosinus-Transformation (siehe 3.1.16) einer Autokovarianzfunktion $C_{XX}(\tau)$ (siehe 3.1.6) wird das Leistungsspektrum $P(\nu)$ über den Frequenzen ν des stochastischen Prozesses (siehe 3.1.1) berechnet, welcher $C_{XX}(\tau)$ zugrunde liegt.

Ab-schnitt	Zeichen	Benennung	Definition
3.1.18	–	Wiener-Chintchin-Theorem <i>en: Wiener-Khintchine theorem</i>	Beschreibung des Zusammenhanges zwischen dem Zeit- und dem Frequenzbereich mittels einer Fourier-Kosinus-Transformation: $C_{XX}(\tau) = 2 \int_{\nu=0}^{\infty} P_{XX}(\nu) \cos(2\pi\nu\tau) d\nu$ Dabei ist $P_{XX}(\nu) \quad \text{das Leistungsspektrum (siehe 3.1.17).}$ ANMERKUNG 1 Der Sonderfall $\tau = 0$ gibt die Gesamtenergie des stochastischen Prozesses (siehe 3.1.1) wieder: $C_{XX}(0) = \sigma^2 = 2 \int_{\nu=0}^{\infty} P_{XX}(\nu) d\nu$ ANMERKUNG 2 Bei einseitigen Leistungsspektren (siehe 3.1.17) (z. B. nur positive Frequenzen für praktisch alle geodätischen Anwendungen) stellen sich obige Gleichungen wie folgt dar: $C_{XX}(\tau) = \int_{\nu=0}^{\infty} P_{XX}(\nu) \cos(2\pi\nu\tau) d\nu$ $P_{XX}(\nu) = 4 \int_{\tau=0}^{\infty} C_{XX}(\tau) \cos(2\pi\nu\tau) d\tau$
3.1.19	–	Fensterfunktion <i>en: window</i>	Gewichtsfunktion, die im Zeitbereich, im Frequenzbereich oder direkt an den Daten angebracht werden kann ANMERKUNG Eine Fensterfunktion reduziert die Energieübertragung aus Seitenbändern bei der Bestimmung des empirischen Leistungsspektrums (siehe 3.1.20). BEISPIEL 1 Das gestutzte Periodogramm $\lambda(n) = \begin{cases} 1, & n \leq M \\ 0, & n > M \end{cases}$ wirkt im Zeitbereich (Rechteckfenster) und verkürzt diesen auf das Intervall $[-M, M]$. Die entsprechende Fensterfunktion im Frequenzbereich ist der Dirichlet-Kern $W(\nu) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-M}^M \cos(2\pi n\nu)$ BEISPIEL 2 Ein im Zeitbereich wirkendes Fenster ist das Hamming-Fenster $\lambda(n) = 0,54 + 0,46 \cos\left(\frac{n\pi}{M}\right)$ BEISPIEL 3 Das Kosinus-Datenfenster (Kosinus-Taper) $h(n) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos\frac{n\pi}{M}\right), \quad n = 1, 2, \dots, M$ wird vor der Schätzung direkt auf die Daten X angewendet $Y(n) = h(n)X(n).$

Ab-schnitt	Zeichen	Benennung	Definition
3.1.20	$\hat{P}_{XX}(\nu)$	empirisches Leistungsspektrum <i>en: experimental power spectrum</i>	Schätzer für das Leistungsspektrum (siehe 3.1.17) ANMERKUNG 1 Für das empirische Leistungsspektrum gibt es unterschiedliche Schätzer. BEISPIEL 1 Das Periodogramm $\hat{P}_{XX}(\nu) = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \hat{C}_{XX}(n) \cos(2n\pi\nu)$ beruht unmittelbar auf der empirischen Autokovarianzfunktion (siehe 3.1.7). Es ist kein konsistenter Schätzer des Leistungsspektrums (siehe 3.1.17). BEISPIEL 2 Durch Einführen einer geeigneten Fensterfunktion (siehe 3.1.19) ergeben sich geglättete Schätzungen, z. B. im Zeitbereich: $\hat{P}_{XX}(\nu) = \sum_{n=-(N-1)}^{N-1} \lambda(n) \hat{C}_{XX}(n) \cos(2n\pi\nu)$ ANMERKUNG 2 Beim Prewhitening wird das empirische Leistungsspektrum durch eine geeignete Filterung (siehe Abschnitt 6) so abgeflacht, dass nahezu ein weißes Rauschen (siehe 3.2.7) erzeugt wird. ANMERKUNG 3 Wird die Fensterfunktion direkt auf die Daten angewendet (siehe 3.1.19, Beispiel 3), so wird dies als Tapering bezeichnet. Sowohl die empirische Autokovarianzfunktion (siehe 3.1.7) als auch das Periodogramm werden dann durch Schätzer ersetzt, die vom Taper abhängen.
3.1.21	Δt	Abtastrate <i>en: sampling rate</i>	Abstand zweier diskreter Messungen eines kontinuierlichen stochastischen Prozesses (siehe 3.1.1) ANMERKUNG 1 In der Regel werden konstante Abtastraten gewählt (Äquidistanz). ANMERKUNG 2 Liegt keine Äquidistanz vor, so kann sie mit Hilfe von Interpolations- und Prädiktionsverfahren erreicht werden.
3.1.22	ν_A	Abtastfrequenz <i>en: sampling frequency</i>	reziproker Wert der Abtastrate (siehe 3.1.21) $\nu_A = \frac{1}{\Delta t}$
3.1.23	ν_{Nyq}	Nyquist-Frequenz <i>en: Nyquist frequency</i>	höchste Frequenz eines stochastischen Prozesses, die bei gegebener Abtastfrequenz (siehe 3.1.22) erfasst werden kann $\nu_{Nyq} = \frac{\nu_A}{2}$ ANMERKUNG 1 Ist eine Frequenz eines stochastischen Prozesses größer als die Nyquist-Frequenz, so erscheint jene in Abhängigkeit von der Abtastfrequenz als scheinbar niederfrequente Schwingung. Dieser Effekt wird als Alias-Effekt bezeichnet. ANMERKUNG 2 Bei Vorliegen der Nyquist-Frequenz sind Phasenlage und Amplitude des Prozesses unbestimmt. ANMERKUNG 3 Die vollständige Rekonstruktion eines kontinuierlichen stochastischen Prozesses (siehe 3.1.1) aus der Gesamtheit seiner diskreten Messwerte ist dann möglich, wenn keine höheren Frequenzen als die Nyquist-Frequenz (siehe 3.1.23) enthalten sind und dieser Prozess unendlich lange beobachtet worden ist.

Ab-schnitt	Zeichen	Benennung	Definition
3.2 Spezielle stochastische Prozesse (en: <i>special stochastic processes</i>)			
3.2.1	–	Markov-Prozess Markov'scher Prozess <i>en: Markov Process, Markovian process</i>	stochastischer Prozess (siehe 3.1.1), bei dem die Zufallsvariablen (siehe DIN 18709-4) zu jedem Zeitpunkt t_i nur von dem Wert stochastisch abhängig sind, der zu dem unmittelbar vorhergehenden Zeitpunkt t_{i-1} ermittelt wurde. ANMERKUNG Liegt ein linearer stationärer Prozess (siehe 3.1.14) vor, so gilt für die partiellen Korrelationskoeffizienten (siehe 3.1.9) zwischen Zufallsvariablen zweier Zeitpunkte t_i und t_j: $\rho_{ij,k} = 0, i = 1, 2, \dots, n; j = i + l; 2 < l < n; i < k < j$
3.2.2	–	Gauß-Prozess Gauß'scher Prozess <i>en: Gauss process, Gaussian process</i>	stochastischer Prozess (siehe 3.1.1), bei dem für alle Zeitpunkte eine gemeinsame multivariate Normalverteilung (siehe DIN 18709-4) für die Zufallsvariablen (siehe DIN 18709-4) gilt ANMERKUNG 1 Da die multivariate Normalverteilung durch die ersten beiden Momente (siehe DIN 18709-4) festgelegt ist, liegt bei schwacher Stationarität (siehe 3.1.14) zugleich starke Stationarität vor (siehe 3.1.14). ANMERKUNG 2 Stochastische Prozesse, die die Eigenschaften von Markov- (siehe 3.2.1) und Gauß-Prozessen in sich vereinigen, werden Gauß-Markov-Prozesse genannt.
3.2.3	$AR(p)$	AR-Prozess autoregressiver Prozess <i>en: autoregressive process</i>	autoregressiver Prozess der Ordnung p, abgekürzt $AR(p)$, in der Form $x(t_i) = \alpha_1 x(t_{i-1}) + \alpha_2 x(t_{i-2}) + \dots + \alpha_p x(t_{i-p}) + \varepsilon(t_i)$ Dabei ist $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ die (zu schätzenden) p Koeffizienten; $\varepsilon(t_i)$ das weiße Rauschen (siehe 3.2.7). ANMERKUNG 1 Für weißes Rauschen (siehe 3.2.7) ist $p = 0$. ANMERKUNG 2 Schätzung der Koeffizienten (siehe A.2). BEISPIEL Das stochastische Verhalten von GPS-Beobachtungen nach Abspaltung eines Trends kann durch einen autoregressiven Prozess 1. oder 2. Ordnung beschrieben werden. Die Zufallsvariablen zu bestimmten Zeitpunkten hängen dann von den Zufallsvariablen ein oder zwei früherer Zeitpunkte ab und werden von einem weißen Rauschen (siehe 3.2.7) überlagert.