

Leittechnik

## Regelungstechnik und Steuerungstechnik

Begriffe zum Verhalten dynamischer Systeme

DIN  
19 226

Teil 2

Control technology; terms and definitions of dynamic systems behaviour

Mit DIN 19 226 T1/02.94,  
T3/02.94 bis T5/02.94,  
Ersatz für  
DIN 19 226/05.68 und  
Ersatz für  
DIN 19 229/10.75

Zusammenhang mit von der International Electrotechnical Commission (IEC) herausgegebenen Veröffentlichungen siehe Erläuterungen.

Die Begriffe sind dort, wo ihre Benennungen halbfett gedruckt sind, definiert. Für die mit einem \* versehenen Begriffe ist an anderer Stelle dieser Norm oder in anderen Normen dieser Reihe eine Begriffsbestimmung angegeben. Das Stichwortverzeichnis im Beiblatt 1 zu DIN 19 226 verweist auf diese Stellen.

Die Normen der Reihe DIN 19 226 sind:

DIN 19 226 Teil 1 Leittechnik; Regelungstechnik und Steuerungstechnik; Allgemeine Grundbegriffe

DIN 19 226 Teil 2 Leittechnik; Regelungstechnik und Steuerungstechnik; Begriffe zum Verhalten dynamischer Systeme

DIN 19 226 Teil 3 Leittechnik; Regelungstechnik und Steuerungstechnik; Begriffe zum Verhalten von Schaltsystemen

DIN 19 226 Teil 4 Leittechnik; Regelungstechnik und Steuerungstechnik; Begriffe für Regelungs- und Steuerungssysteme

DIN 19 226 Teil 5 Leittechnik; Regelungstechnik und Steuerungstechnik; Funktionelle Begriffe

DIN 19 226 Teil 6 (z. Z. Entwurf) Leittechnik; Regelungstechnik und Steuerungstechnik; Begriffe zu Funktions- und Baueinheiten

Besteht bei einem dynamischen System ein eindeutiger Wirkungszusammenhang zwischen Eingangs- und Ausgangsgrößen, so kennzeichnet dieser das dem System eigentümliche Verhalten. Dieser Zusammenhang wird allgemein durch Funktionalgleichungen, vorwiegend durch Differential- oder Differenzengleichungen, sowie gewöhnliche Gleichungen beschrieben. Das **Übertragungsverhalten** ordnet die Systemgrößen als Funktionen der Zeit einander zu und ist bei **dynamischen Systemen** wesentlich durch Lade- und Entladevorgänge bei Speichern von Masse oder auch Energie bedingt. Die vorliegende Norm behandelt das Übertragungsverhalten dynamischer Systeme unabhängig von der Art ihres Einsatzes bei Steuerungen und Regelungen. Es bleibt also offen, ob es sich um das Übertragungsverhalten von Strecken oder von Einrichtungen handelt, oder ob das dynamische System eine vollständige Regelung oder Steuerung ist.

Das Übertragungsverhalten ist systembedingt und geht bereits weitgehend aus der Systembeschreibung hervor. Die Begriffe befassen sich sowohl mit den einschlägigen Eigenschaften des Systems selbst als auch mit den verschiedenen Verfahren zur Darstellung seines Übertragungsverhaltens, die durch die Form der Systemgrößen bedingt sind. Sie betrifft die wertmäßige und zeitliche Darstellung der Systemgrößen. Wertmäßig ist zu unterscheiden zwischen wertkontinuierlich und wertdiskret, je nachdem, ob eine Größe entweder jeden beliebigen Wert innerhalb eines gegebenen Bereiches oder nur einzelne diskrete Werte annehmen kann. Zeitlich ist zu unterscheiden zwischen zeitkontinuierlich und zeitdiskret, je nachdem, ob eine Größe entweder in jedem beliebigen Zeitpunkt innerhalb eines gegebenen Intervalls oder nur zu einzelnen diskreten Zeitpunkten quantitativ bestimmbar ist (siehe DIN 19 225 und Normen der Reihe DIN 40 146). Behandelt werden hier die Verfahren sowohl für wert- und zeitkontinuierliche als auch für wertkontinuierliche und zeitdiskrete Systemgrößen.

Während in den Normen dieser Reihe sonst einheitlich die im deutschen Sprachraum gebräuchlichen Formelzeichen der Ausweichzeichenreihe nach DIN 19 221 verwendet werden, wird – insbesondere in der vorliegenden Norm – für die Übertragungsfunktion das Formelzeichen  $G$  der im übrigen Europa gebräuchlichen Hauptzeichenreihe benutzt. Da es sich grundsätzlich um dieselbe Funktion handelt, muß für die Übertragungsfunktion und den Frequenzgang einheitlich das gleiche Formelzeichen, also entweder  $F$  oder  $G$ , verwendet werden.

Fortsetzung Seite 2 bis 18

Deutsche Elektrotechnische Kommission im DIN und VDE (DKE)

## Inhalt

|                                                                            | Seite |                                                                                                | Seite |
|----------------------------------------------------------------------------|-------|------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| <b>1 Übertragungsverhalten</b>                                             | 3     | <b>9 Kennfunktionen linearer zeitinvarianter Übertragungsglieder</b>                           | 7     |
| <b>2 Übertragungsglied</b>                                                 | 3     | 9.1 Übergangsfunktion                                                                          | 7     |
| <b>3 Klassifikationsprinzipien für die Übertragungsglieder</b>             | 3     | 9.2 Gewichtsfunktion                                                                           | 8     |
| 3.1 Linearitätsprinzip                                                     | 4     | 9.3 Bezogene Anstiegsantwort                                                                   | 8     |
| 3.1.1 Überlagerungsprinzip                                                 | 4     | 9.4 Übertragungsfunktion                                                                       | 8     |
| 3.1.2 Verstärkungsprinzip                                                  | 4     | 9.5 Frequenzgang                                                                               | 8     |
| 3.2 Verschiebungsprinzip                                                   | 4     | 9.5.1 Ortskurve des Frequenzgangs                                                              | 8     |
| <b>4 Klassen von Übertragungsgliedern</b>                                  | 4     | 9.5.2 Amplitudengang                                                                           | 8     |
| 4.1 Lineare und nichtlineare Übertragungsglieder                           | 4     | 9.5.3 Phasengang                                                                               | 9     |
| 4.2 Zeitvariante und zeitinvariante Übertragungsglieder                    | 4     | 9.5.4 Frequenzkennlinien (Bodediagramm)                                                        | 9     |
| 4.3 Beschreibung linearer und zeitinvarianter Übertragungsglieder          | 4     | <b>10 Ausgewählte lineare zeitinvariante Übertragungsglieder</b>                               | 9     |
| 4.3.1 Differentialgleichung                                                | 4     | 10.1 Elementare Glieder                                                                        | 9     |
| 4.3.2 Differenzengleichung                                                 | 4     | 10.1.1 P-Glied, Proportionalbeiwert                                                            | 9     |
| <b>5 Zustandsbeschreibung von Übertragungsgliedern</b>                     | 4     | 10.1.2 I-Glied, Integrierbeiwert                                                               | 9     |
| 5.1 Zustandsgleichungen                                                    | 4     | 10.1.3 D-Glied, Differenzierbeiwert                                                            | 9     |
| 5.1.1 Wert- und zeitkontinuierliche Systemgrößen                           | 4     | 10.1.4 T <sub>1</sub> -Glied, Totzeit                                                          | 9     |
| 5.1.2 Wertkontinuierliche und zeitdiskrete Systemgrößen, Transitionsmatrix | 5     | 10.2 Rückwirkungsfreie Parallel- und Reihenschaltung elementarer Glieder                       | 9     |
| 5.2 Zustandsraum                                                           | 5     | 10.2.1 PI-Glied, Nachstellzeit                                                                 | 9     |
| 5.3 Zustandskurve, Trajektorie                                             | 5     | 10.2.2 PD-Glied, Vorhaltzeit                                                                   | 11    |
| 5.4 Ruhelage                                                               | 5     | 10.2.3 PID-Glied                                                                               | 11    |
| 5.5 Steuerbarkeit                                                          | 5     | 10.3 Glieder mit Verzögerungen                                                                 | 11    |
| 5.6 Beobachtbarkeit                                                        | 5     | 10.3.1 P-T <sub>1</sub> -Glied, Verzögerungsglied 1. Ordnung                                   | 11    |
| <b>6 Stabilität</b>                                                        | 5     | 10.3.2 P-T <sub>2</sub> -Glied, Verzögerungsglied 2. Ordnung, Kennkreisfrequenz, Dämpfungsgrad | 11    |
| 6.1 Ljapunowstabilität                                                     | 5     | 10.3.3 PD-T <sub>1</sub> -Glied und PP-T <sub>1</sub> -Glied                                   | 12    |
| 6.1.1 Stabilität der Ruhelage                                              | 5     | 10.3.4 Ersatztotzeit                                                                           | 12    |
| 6.1.2 Asymptotische Stabilität der Ruhelage, Beharrungszustand             | 5     | 10.4 Rationale Übertragungsglieder                                                             | 12    |
| 6.1.3 Einzugsbereich                                                       | 5     | 10.4.1 Stabiles rationales Übertragungsglied                                                   | 12    |
| 6.1.4 Globale asymptotische Stabilität der Ruhelage                        | 6     | 10.4.2 Minimalphasenglied                                                                      | 12    |
| 6.2 Übertragungsstabilität                                                 | 6     | 10.4.3 Allpaßglied                                                                             | 12    |
| 6.3 Sprungantwortstabilität für lineare zeitinvariante Übertragungsglieder | 6     | 10.5 Abtastende Übertragungsglieder                                                            | 13    |
| 6.4 Periodisch-stationäres Verhalten                                       | 6     | 10.5.1 Abtast-Halteglied                                                                       | 13    |
| <b>7 Kennlinie, Kennlinienfeld</b>                                         | 6     | 10.5.2 Impulsfolgefunktion                                                                     | 13    |
| 7.1 Kennlinie                                                              | 6     | 10.5.3 Z-Übertragungsfunktion                                                                  | 13    |
| 7.2 Kennlinienfeld                                                         | 6     | <b>11 Nichtlineare zeitinvariante Übertragungsglieder</b>                                      | 13    |
| 7.3 Arbeitspunkt                                                           | 6     | 11.1 Ausgewählte Glieder                                                                       | 13    |
| <b>8 Antworten auf spezielle Eingangsgrößen</b>                            | 6     | 11.1.1 Zweipunktglied                                                                          | 13    |
| 8.1 Sprungantwort, Beharrungswert                                          | 7     | 11.1.2 Zweipunktglied mit Schaltdifferenz                                                      | 14    |
| 8.1.1 Verzugszeit                                                          | 7     | 11.1.3 Dreipunktglied, Totzone                                                                 | 14    |
| 8.1.2 Ausgleichszeit                                                       | 7     | 11.1.4 Begrenzungskennlinienglied, Begrenzung                                                  | 14    |
| 8.1.3 Einschwingtoleranz                                                   | 7     | 11.1.5 Glied mit Umkehrspanne                                                                  | 14    |
| 8.1.4 Anschwingzeit                                                        | 7     | 11.1.6 Glied mit Kippverhalten                                                                 | 14    |
| 8.1.5 Einschwingzeit                                                       | 7     | 11.2 Beschreibungsfunktion                                                                     | 15    |
| 8.1.6 Überschwingweite                                                     | 7     | 11.3 Linearisierung                                                                            | 15    |
| 8.2 Impulsantwort                                                          | 7     | 11.3.1 Linearisierung von Funktionen                                                           | 15    |
| 8.3 Anstiegsantwort                                                        | 7     | 11.3.2 Linearisierung von Übertragungsgliedern                                                 | 15    |
| 8.4 Sinusantwort                                                           | 7     | <b>Verwendete Formelzeichen</b>                                                                | 15    |
|                                                                            |       | <b>Zitierte Normen</b>                                                                         | 15    |
|                                                                            |       | <b>Frühere Ausgaben</b>                                                                        | 16    |
|                                                                            |       | <b>Änderungen</b>                                                                              | 16    |
|                                                                            |       | <b>Erläuterungen</b>                                                                           | 16    |
|                                                                            |       | <b>Stichwortverzeichnis Deutsch-Englisch</b>                                                   | 16    |

## 1 Übertragungsverhalten

Gegeben sei ein System\* mit den Eingangsgrößen\*  $u_1(t), \dots, u_p(t)$  und den Ausgangsgrößen\*  $v_1(t), \dots, v_q(t)$ . Gelten für alle Eingangsgrößen  $u_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , und für alle Ausgangsgrößen  $v_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, q$ , die Voraussetzungen, daß

$$u_i(t) = 0 \text{ für } t < t_0, \quad (1)$$

$$u_i(t) \text{ Laplacetransformierbar ist } ^1), \quad (2)$$

$$v_k(t) = \text{konst. wenn } u_i(t) = 0, \quad (3)$$

und existiert für alle Eingangsgrößen  $u_i(t)$  eine eindeutige Zuordnung zu den Ausgangsgrößen  $v_k(t)$  in der Form

$$v_1(t) = \varphi_1 \{ u_1(t), \dots, u_p(t) \},$$

$$\vdots$$

$$v_q(t) = \varphi_q \{ u_1(t), \dots, u_p(t) \},$$

so heißt diese eindeutige Zuordnung das **Übertragungsverhalten** des Systems.

Eingangsgrößen, die den Voraussetzungen (1) und (2) genügen, werden auch zulässige Eingangsgrößen genannt.

ANMERKUNG: Im einfachsten Fall ist bei einem System eine Ausgangsgröße  $v$  durch eine Eingangsgröße  $u$  eindeutig bestimmt; dieser Zusammenhang wird durch eine Beziehung

$$v = \varphi \{ u \}$$

dargestellt, die das Übertragungsverhalten des Systems heißt.

Darüber hinaus gibt es Systeme, bei denen die Ausgangsgröße  $v$  von mehreren Eingangsgrößen abhängt, die dann mit  $u_1, \dots, u_p$  bezeichnet werden. Ferner gibt es Systeme, bei denen die Eingangsgrößen  $u_1, \dots, u_p$  in mehrere Ausgangsgrößen des Systems, entsprechend mit  $v_1, \dots, v_q$ , bezeichnet, übertragen werden.

Eingangs- und Ausgangsgrößen gelten wie alle Größen\* in dieser Norm als normierte Größen. Normiert heißt eine Größe, wenn sie auf eine gleichartige Festgröße bezogen dargestellt wird<sup>2)</sup>. Für physikalische Systeme allgemein gültig ergibt sich dann eine dimensionslose Schreibweise sowohl der Größen als auch des Übertragungsverhaltens, wobei der aus den Festgrößen gebildete Faktor zu berücksichtigen ist. Die Dimension Zeit bleibt dabei erhalten, z. B.  $\frac{du}{dt} = \dot{u}$  hat die Dimension  $\frac{1}{\text{Zeit}}$ .

Diese abstrakte Darstellung erweist sich als zweckmäßig, um die in dieser Norm behandelten allgemeinen wirkungsmäßigen Zusammenhänge von Übertragungsgliedern exakt beschreiben zu können.

$$\mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) \\ \vdots \\ u_p(t) \end{bmatrix}$$

auffassen; entsprechend bilden die Ausgangsgrößen  $v_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, q$ , die Komponenten des Ausgangsvektors\*

$$\mathbf{v}(t) = \begin{bmatrix} v_1(t) \\ \vdots \\ v_q(t) \end{bmatrix}$$

Mit dieser zweckmäßigen Schreibweise vereinfacht sich die Darstellung des Übertragungsverhaltens\* zu

$$\mathbf{v}(t) = \varphi \{ \mathbf{u}(t) \}.$$

Gleichbedeutend damit ist die Schreibweise

$$v_1(t) = \varphi_1 \{ \mathbf{u}(t) \},$$

$$\vdots$$

$$v_q(t) = \varphi_q \{ \mathbf{u}(t) \}.$$

Das Übertragungsglied hat die Eigenschaft, daß die Eingangsgrößen unabhängige Variable und die Ausgangsgrößen abhängige Variable der Beziehung sind. Letztere hängen von den Eingangsgrößen ab. Die eindeutige Zuordnung  $\varphi$  im konkreten Fall zu finden, ist eine der Darstellung des Übertragungsverhaltens\* vorangehende Ingenieuraufgabe. Sie ist im allgemeinen implizit durch einen Satz von Beziehungen (z. B. Differentialgleichungen) gegeben und kann beispielsweise aus Messungen, Systemanalysen, Naturgesetzen ermittelt werden. Dabei ist die notwendige Festlegung der Eingangs- und Ausgangsgrößen durch die betrachtete Wirkungsrichtung\* gegeben. Eingangsgrößen sind nach Wert und Zeitverlauf vom betrachteten System\* unabhängig. Bei bestimmten physikalischen Systemen spricht man auch von **eingepprägten Größen**, z. B. eingepprägte Kraft, eingepprägte Spannung.

Von Ausgangsgrößen ist vorausgesetzt, daß sie allein vom betrachteten System und dessen Eingangsgrößen beeinflusst werden. Dies bedeutet, daß Ausgangsbelastungen, die außerhalb des betrachteten Systems anliegen, die Ausgangsgrößen nicht beeinflussen dürfen; nur dann ist das Übertragungsverhalten eindeutig. Dies muß gegebenenfalls durch Verstärker sichergestellt werden.

## 2 Übertragungsglied

Ein System\* mit den Eingangsgrößen\*  $u_1(t), \dots, u_p(t)$ , den Ausgangsgrößen\*  $v_1(t), \dots, v_q(t)$  und dem Übertragungsverhalten\*  $\varphi_1, \dots, \varphi_q$  heißt **Übertragungsglied** (siehe Bild 1).

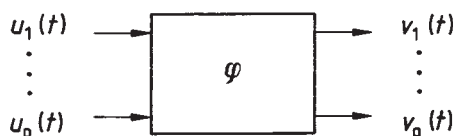


Bild 1: Übertragungsglied

ANMERKUNG: Die Eingangsgrößen  $u_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , lassen sich als Komponenten eines  $p$ -dimensionalen Vektors, des Eingangsvektors\*

## 3 Klassifikationsprinzipien für die Übertragungsglieder

Besondere Gesetzmäßigkeiten, denen das Übertragungsverhalten\* genügt, definieren einzelne Klassen von Übertragungsgliedern\*. Solche besonderen Gesetzmäßigkeiten sind das Überlagerungs- und Verstärkungsprinzip\* (Linearitätsprinzip\*) sowie das Verschiebungsprinzip\*.

<sup>1)</sup> Unter der Laplacetransformierten  $F(s)$  einer Funktion  $f(t)$  wird die aus der Integraltransformation

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt = \mathcal{L} \{ f(t) \}$$

hervorgegangene Funktion der komplexen Veränderlichen  $s = \sigma + j\omega$  verstanden, siehe DIN 5487.

<sup>2)</sup> Siehe DIN 5485

### 3.1 Linearitätsprinzip

#### 3.1.1 Überlagerungsprinzip

Ein Übertragungsglied \* ordne dem Eingangsvektor \*  $u(t)$  den Ausgangsvektor \*  $v(t)$  und dem Eingangsvektor \*  $\tilde{u}(t)$  den Ausgangsvektor \*  $\tilde{v}(t)$  nach

$$\varphi\{u(t)\} = v(t) \quad \text{und} \quad \varphi\{\tilde{u}(t)\} = \tilde{v}(t)$$

zu. Wenn es dann der Summe der Eingangsvektoren  $u(t) + \tilde{u}(t)$  die Summe der Ausgangsvektoren  $v(t) + \tilde{v}(t)$  zuordnet, wenn also die Beziehung

$$\varphi\{u(t) + \tilde{u}(t)\} = \varphi\{u(t)\} + \varphi\{\tilde{u}(t)\}$$

für beliebige  $u(t)$  und  $\tilde{u}(t)$  gilt, so genügt es dem **Überlagerungsprinzip**.

#### 3.1.2 Verstärkungsprinzip

Ein Übertragungsglied \* ordne dem Eingangsvektor \*  $u(t)$  den Ausgangsvektor \*  $v(t)$  nach

$$\varphi\{u(t)\} = v(t)$$

zu. Wenn es dann für eine beliebige reelle Konstante  $c$  und beliebiges  $u(t)$  dem Eingangsvektor  $c u(t)$  den Ausgangsvektor  $c v(t)$  zuordnet, wenn also die Beziehung

$$\varphi\{c u(t)\} = c \varphi\{u(t)\}$$

gilt, so genügt es dem **Verstärkungsprinzip**. Überlagerungs- und Verstärkungsprinzip zusammengefaßt ergeben das **Linearitätsprinzip** \*, das durch die Beziehung

$$\varphi\{c u(t) + \tilde{c} \tilde{u}(t)\} = c \varphi\{u(t)\} + \tilde{c} \varphi\{\tilde{u}(t)\}$$

gekennzeichnet ist.

### 3.2 Verschiebungsprinzip

Ein Übertragungsglied \* ordne dem Eingangsvektor \*  $u(t)$  den Ausgangsvektor \*  $v(t)$  nach

$$\varphi\{u(t)\} = v(t)$$

zu. Wenn es dann dem in Richtung wachsender Zeit verschobenen Eingangsvektor  $u(t - t_1)$  den ebenfalls in Richtung wachsender Zeit verschobenen Ausgangsvektor  $v(t - t_1)$  zuordnet, wenn also

$$\varphi\{u(t - t_1)\} = v(t - t_1) \quad \text{mit beliebigem } t_1 \geq 0$$

für beliebiges  $u(t)$  gilt, so genügt es dem **Verschiebungsprinzip**.

## 4 Klassen von Übertragungsgliedern

(siehe Tabelle 1)

### 4.1 Lineare und nichtlineare Übertragungsglieder

Ein **Übertragungsglied** \*, das dem Überlagerungsprinzip \* und dem Verstärkungsprinzip \* genügt, heißt **linear**; sonst heißt es **nichtlinear**.

### 4.2 Zeitvariante und zeitinvariante Übertragungsglieder

Ein **Übertragungsglied** \*, das dem Verschiebungsprinzip \* genügt, heißt **zeitinvariant**; sonst heißt es **zeitvariant**.

Tabelle 1: Klassen von Übertragungsgliedern

|                               |                             |
|-------------------------------|-----------------------------|
| linear und zeitinvariant      | linear und zeitvariant      |
| nichtlinear und zeitinvariant | nichtlinear und zeitvariant |

ANMERKUNG: Die vier (einander ausschließenden) Klassen von Übertragungsgliedern nach Tabelle 1 entstehen durch die zweistufige Aufspaltung nach den Eigenschaften Linearität bzw. Nichtlinearität und Zeitinvarianz bzw. Zeitvarianz des Übertragungsverhaltens \*. Dabei ist die Klasse der linearen zeitinvarianten Übertragungsglieder durch die weitestgehenden Voraussetzungen bestimmt und daher einer allgemeinen theoretischen Behandlung am ehesten zugänglich.

## 4.3 Beschreibung linearer und zeitinvarianter Übertragungsglieder

### 4.3.1 Differentialgleichung

Bei zeit- und wertkontinuierlicher Eingangsgröße \*  $u(t)$  und Ausgangsgröße \*  $v(t)$  gilt für rationale Übertragungsglieder \* die Beschreibung durch eine lineare **Differentialgleichung** mit konstanten Koeffizienten:

$$\begin{aligned} a_n v^{(n)}(t) + a_{n-1} v^{(n-1)}(t) + \dots + a_1 \dot{v}(t) + a_0 v(t) \\ = b_m u^{(m)}(t) + b_{m-1} u^{(m-1)}(t) + \dots + b_1 \dot{u}(t) + b_0 u(t), \end{aligned}$$

mit  $m \leq n$ .

### 4.3.2 Differenzengleichung

Betrachtet man die Eingangsgröße \*  $u(t)$  und die Ausgangsgröße \*  $v(t)$  nur an diskreten aequidistanten Stellen der Zeitachse  $t = t_0 + kT, k = 0, 1, 2, \dots$ , so läßt sich das Übertragungsverhalten \* durch eine **Differenzengleichung** darstellen:

$$\begin{aligned} a_n v(t-nT) + a_{n-1} v[t-(n-1)T] + \dots + a_1 v(t-T) + a_0 v(t) \\ = b_m u(t-mT) + b_{m-1} u[t-(m-1)T] + \dots + b_1 u(t-T) + b_0 u(t) \end{aligned}$$

ANMERKUNG: Der Aufbau ist dem der linearen Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten formal ähnlich; anstatt der im gleichen Zeitpunkt gültigen Differentialquotienten treten die an diskreten Stellen der Zeitachse vorhandenen Werte der Eingangs- und Ausgangsgrößen auf. Die Koeffizienten haben somit andere Werte.

## 5 Zustandsbeschreibung von Übertragungsgliedern

### 5.1 Zustandsgleichungen

Wird bei einem Übertragungsglied \* die Zuordnung der Ausgangsgrößen \* zu den Eingangsgrößen \* durch ein System von Differentialgleichungen oder Differenzengleichungen und gewöhnlichen Gleichungen beschrieben, so läßt sich dieses durch Einführung von Zustandsgrößen \*  $x_1(t), \dots, x_n(t)$ , als Zwischengrößen in **Zustandsgleichungen** umformen, die ein System von Differentialgleichungen oder von Differenzengleichungen jeweils 1. Ordnung und ein System gewöhnlicher Gleichungen sind.

#### 5.1.1 Wert- und zeitkontinuierliche Systemgrößen

Die sich mit Einführung von Zustandsgrößen \* ergebenden Gleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_j &= f_j[(x_1, \dots, x_n); (u_1, \dots, u_p), t]; j = 1, \dots, n \\ v_k &= g_k[(x_1, \dots, x_n); (u_1, \dots, u_p), t]; k = 1, \dots, q \end{aligned}$$

sind die Zustandsgleichungen des Übertragungsglieds \*; sie vermitteln die Zuordnung seiner Ausgangsgrößen \*  $v_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, q$  zu seinen Eingangsgrößen \*  $u_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$  mit Einbeziehung seiner Zustandsgrößen  $x_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

Sie lauten in vektorieller Schreibweise:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$$

Da Zustandsgrößen in verschiedener Weise definierbar sind, ergeben sich bei ihrer Einführung mehrere ineinander überführbare Möglichkeiten der Zustandsbeschreibung durch Zustandsgleichungen.

Lineare Übertragungsglieder lassen sich in der übersichtlicheren Matrizen-schreibweise in ihren Zustandsgleichungen wie folgt darstellen:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u}$$

$$\mathbf{v} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u}$$

mit: **A** Systemmatrix, **B** Eingangsmatrix  
**C** Ausgangsmatrix, **D** Durchgangsmatrix

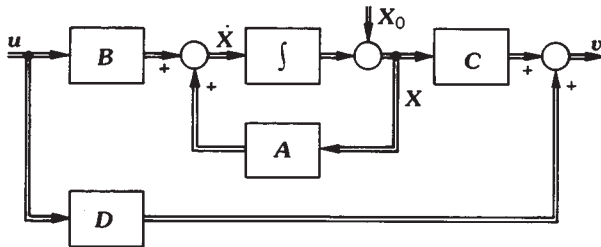


**Bild 2: Zustandsdarstellung eines linearen Übertragungsglieds**

ANMERKUNG 1: Ausgeschrieben lauten die Zustandsgleichungen linearer Übertragungsglieder mit den Eingangsgrößen  $u_i(t)$ ,  $i = 1, \dots, p$ , den Zustandsgrößen  $x_j(t)$ ,  $j = 1, \dots, n$  und den Ausgangsgrößen  $v_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, q$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n + b_{11} u_1 + \dots + b_{1p} u_p \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n + b_{n1} u_1 + \dots + b_{np} u_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_1 &= c_{11} x_1 + \dots + c_{1n} x_n + d_{11} u_1 + \dots + d_{1p} u_p \\ &\vdots \\ v_q &= c_{q1} x_1 + \dots + c_{qn} x_n + d_{q1} u_1 + \dots + d_{qp} u_p \end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  Elemente der Matrizen **A**, **B**, **C**, **D** sind.

Bei zeitinvarianten Systemen \* sind die Matrizen **A**, **B**, **C**, **D** von der Zeit unabhängig.

ANMERKUNG 2: Unabhängig von der Wahl der Zustandsgrößen erweisen sich die aus der Systemmatrix mit:

$$\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A}) = 0$$

berechenbaren **Eigenwerte**  $\lambda_{1,2,\dots}$  als dem System eigentümliche Kenngrößen.

Darin bedeutet die **Einheitsmatrix**  $\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$

### 5.1.2 Wertkontinuierliche und zeitdiskrete Systemgrößen, Transitionsmatrix

Stehen bei einem linearen System \* die Werte von Eingangs-, Zustands- und Ausgangsgrößen \* nur in diskreten, äquidistanten Zeitpunkten  $t_k = k T$ ;  $k = 0, 1, 2, \dots$  mit dem **Abtastintervall**  $T$  in Form linearer Differenzengleichungen zur Verfügung, so lauten die Zustandsgleichungen

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(T, t) \mathbf{x}_k + \mathbf{H}(T, t) \mathbf{u}_k$$

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}_k$$

Für die **Transitionsmatrix**  $\Phi(T, t)$  gilt die Funktionalgleichung:

$$\dot{\Phi}(T, t) = \mathbf{A}(t) \Phi(T, t).$$

Bei zeitinvarianten Übertragungsgliedern \* ist:

$$\Phi(T) = e^{\mathbf{A}T}$$

und 
$$\mathbf{H}(T) = \int_0^T e^{\mathbf{A}T} \mathbf{B} dt.$$

Ist **A** regulär, dann gilt:  $\mathbf{H}(T) = \mathbf{A}^{-1} [\Phi(T) - \mathbf{I}] \mathbf{B}$ .

## 5.2 Zustandsraum

Der **Zustandsraum** wird in seinen Koordinaten durch die Zustandsgrößen \* aufgespannt. Die Zustandsgrößen  $x_1(t), \dots, x_n(t)$  bilden im  $n$ -dimensionalen Zustandsraum die Komponenten des Zustandsvektors \*  $\mathbf{x}(t)$ , der zu jedem Zeitpunkt den Systemzustand festlegt.

## 5.3 Zustandskurve, Trajektorie

Die Lösung  $\mathbf{x}(t)$  des Zustandsgleichungssystems wird im Zustandsraum durch die **Zustandskurve** oder **Trajektorie** als die Verbindungslinie der Endpunkte des Zustandsvektors \*  $\mathbf{x}(t)$  dargestellt; sie zeigt den Übergang von einem Zustand in einen anderen in Abhängigkeit von der Zeit.

## 5.4 Ruhelage

Wenn bei den Zustandsgleichungen des Übertragungsglieds \* die Bedingungen  $\dot{x}_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, n$  für  $t > t_0$  bei festen Werten der Eingangsgrößen \*  $u_i = u_{iR}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , erfüllbar sind, dann heißt jede Lösung  $\mathbf{x}_R = (x_{1R}, \dots, x_{nR})$  des Gleichungssystems

$$\mathbf{f}_j(x_1, \dots, x_n; u_{1R}, \dots, u_{pR}) = 0, j = 1, \dots, n$$

eine **Ruhelage** des Systems \*. Auch der Fall, daß keine Ruhelage existiert, ist möglich.

## 5.5 Steuerbarkeit

Ein Übertragungsglied \* heißt **steuerbar** zum Zeitpunkt  $t_0$ , wenn es mittels eines zulässigen Eingangsvektors \* gelingt, ausgehend von einem beliebigen Anfangszustand  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$  einen beliebigen Zustand im Zustandsraum während eines endlichen Zeitintervalls zu erreichen.

## 5.6 Beobachtbarkeit

Ein Übertragungsglied \* heißt **beobachtbar** zum Zeitpunkt  $t_0$ , wenn der beliebige Anfangszustand  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0)$  aus dem Verlauf des Ausgangsvektors \* während eines endlichen Zeitintervalls bei bekanntem Eingangsvektor \* bestimmt werden kann.

ANMERKUNG: Die Steuerbarkeit und die Beobachtbarkeit können anhand der Zustandsgleichungen überprüft werden.

## 6 Stabilität

### 6.1 Ljapunowstabilität

#### 6.1.1 Stabilität der Ruhelage

Eine **Ruhelage** \*  $\mathbf{x}_R$  eines Übertragungsglieds \* heißt **stabil**, wenn der Zustand  $\mathbf{x}(t)$  des Systems \* für alle  $t \geq t_0$  und  $u_i(t) = u_{iR}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , in einer beliebig engen Umgebung von  $\mathbf{x}_R$  bleibt, sofern er zum Zeitpunkt  $t = t_0$  in einer hinreichend engen Umgebung von  $\mathbf{x}_R$  war.

#### 6.1.2 Asymptotische Stabilität der Ruhelage, Beharrungszustand

Eine Ruhelage \*  $\mathbf{x}_R$  eines Übertragungsglieds \* heißt **asymptotisch stabil** \* oder ein **Beharrungszustand** \*, wenn sie stabil ist und darüber hinaus der Zustandspunkt  $\mathbf{x}(t)$  aus einer gewissen Umgebung von  $\mathbf{x}_R$  mit wachsendem  $t$  für  $u_i(t) = u_{iR}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , gegen  $\mathbf{x}_R$  strebt.

#### 6.1.3 Einzugsbereich

Die Gesamtheit aller Punkte des Zustandsraums, von denen aus der Zustand  $\mathbf{x}(t)$  des Systems \* mit wachsendem  $t$  für  $u_i(t) = u_{iR}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , gegen die asymptotisch stabile Ruhelage \*  $\mathbf{x}_R$  strebt, heißt der **Einzugsbereich** von  $\mathbf{x}_R$ .

### 6.1.4 Globale asymptotische Stabilität der Ruhelage

Die Ruhelage \*  $x_R$  eines Übertragungsglieds \* heißt **global asymptotisch stabil** (asymptotisch stabil im ganzen), wenn sie asymptotisch stabil \* ist und der Einzugsbereich \* den gesamten Zustandsraum umfaßt.

## 6.2 Übertragungsstabilität

Ein Übertragungsglied \* mit einer Eingangs- und einer Ausgangsgröße \* wird **übertragungsstabil** genannt, wenn zu jeder für alle  $t \geq t_0$  beschränkten Eingangsgröße die zugehörige Ausgangsgröße ebenfalls beschränkt ist.

## 6.3 Sprungantwortstabilität für lineare zeitinvariante Übertragungsglieder

Ein lineares zeitinvariantes Übertragungsglied \* mit einer Eingangs- und einer Ausgangsgröße \* wird **sprungantwortstabil** genannt, wenn zu der Eingangsgröße

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq t_0 \\ U & \text{für } t > t_0, U \text{ beschränkt} \end{cases}$$

die Ausgangsgröße  $v(t)$  mit wachsendem  $t$  gegen einen endlichen Grenzwert strebt.

## 6.4 Periodisch-stationäres Verhalten

Wenn die Bedingungen  $|x_i| < K, i = 1, \dots, n, K$  beschränkt, für feste Werte der Eingangsgrößen \*

$$u_i(t) = u_{iR}, i = 1, \dots, p$$

erfüllbar sind, so bestimmt jede hiermit verträgliche Zustandskurve \* ein **periodisch-stationäres** Verhalten des Systems \*.

## 7 Kennlinie, Kennlinienfeld

### 7.1 Kennlinie

Hat ein Übertragungsglied \* mit einer Eingangs- und einer Ausgangsgröße \* mehrere Beharrungszustände \*, so gehört in der jeweiligen Ruhelage \* zu dem festen Wert  $u_R$  ein fester Wert  $v_R$ . Die Darstellung der Abhängigkeit des Wertes  $v_R$  von  $u_R$  heißt **Kennlinie**.

ANMERKUNG: Auch bei Übertragungsgliedern \*, bei denen sich bei unveränderter Eingangsgröße keine konstante Ausgangsgröße einstellt (z. B. I-Glieder \*), können Kennlinien angegeben werden, wenn in Abhängigkeit von der betrachteten Eingangsgröße geeignete zeitliche Ableitungen 1., 2., ...,  $n$ -ter Ordnung der Ausgangsgröße, z. B. deren Änderungsgeschwindigkeit (Kennlinie 1. Ordnung), aufgetragen werden.

### 7.2 Kennlinienfeld

Im **Kennlinienfeld** wird für Übertragungsglieder \* mit mehreren Beharrungszuständen \* und mehreren Eingangsgrößen \* die Kennlinie hinsichtlich einer Eingangsgröße für verschiedene Werte  $u_R$  der übrigen Eingangsgrößen für diese Beharrungszustände \* dargestellt (siehe Bild 3).

ANMERKUNG: Als Beispiel für ein Übertragungsglied \* diene ein Gleichstrom-Nebenschlußgenerator mit der Ausgangsgröße \*:

$v$  Klemmenspannung

und den Eingangsgrößen:

$u_1$  Einstellung des Vorwiderstands im Feldkreis

$u_2$  Eingepreßte Spannung am Feldkreis

$u_3$  Eingepreßter Belastungsstrom.

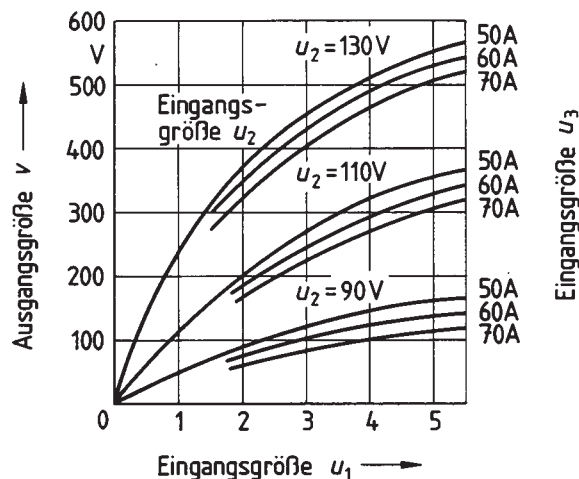


Bild 3: Kennlinienfeld eines Übertragungsglieds mit mehreren Eingangsgrößen (Gleichstrom-Nebenschlußgenerator)

## 7.3 Arbeitspunkt

Der **Arbeitspunkt** ist der Punkt einer Kennlinie \* oder eines Kennlinienfeldes \*, bei dem das Übertragungsglied \* betrieben wird.

ANMERKUNG: Bei der Linearisierung \* des Übertragungsverhaltens \* von Übertragungsgliedern \*, insbesondere mit nichtlinearen Kennlinien \*, sind die Koeffizienten der linearen Ersatzfunktionen von dem Arbeitspunkt \* abhängig, für dessen Umgebung die Linearisierung erfolgt. Bei Angabe der Zahlenwerte dieser Größen \* ist daher auch die Angabe des zugehörigen Arbeitspunktes erforderlich.

## 8 Antworten auf spezielle Eingangsgrößen

ANMERKUNG: Ein beliebiges Übertragungsglied \* ist mit der Kenntnis von endlich vielen dieser Antworten (siehe Abschnitte 8.1 bis 8.4) nicht vollständig beschreibbar. Die Angabe dieser Antworten kann jedoch nützlich sein, wenn die jeweiligen Eingangsgrößen \* den charakteristischen Betriebsverhältnissen entsprechen.

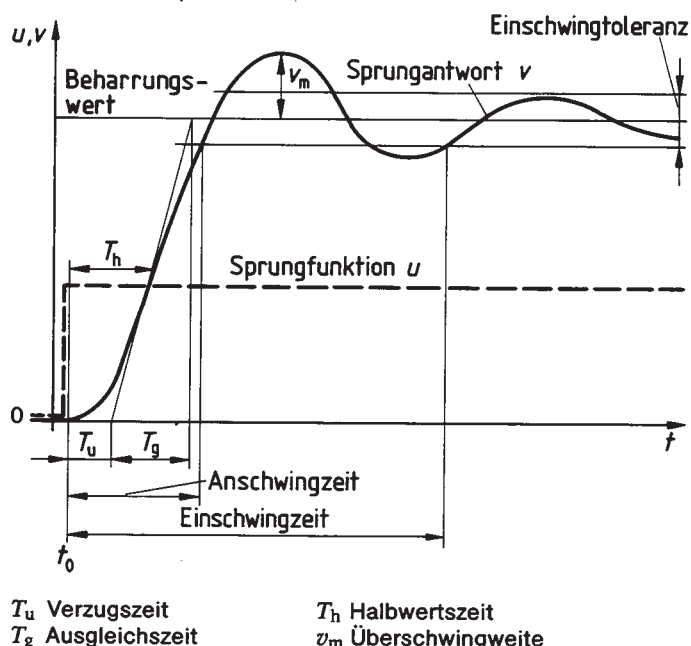


Bild 4: Sprungantwort eines Übertragungsglieds