

Begriffe der Längenprüftechnik

Fehler und Unsicherheiten beim Messen

DIN
2257
Blatt 2

Definitions in the technic of length verification; measurement errors and uncertainties

Die in dieser Norm enthaltenen Begriffe sind den für die allgemeine Meßtechnik geltenden Begriffen nach DIN 1319 Blatt 3, Ausgabe Januar 1972, entnommen und für die industrielle Prüfpraxis erläutert und ergänzt.

1. Geltungsbereich

Diese Norm gilt nur für die industrielle Längenprüftechnik. Sie behandelt die Grundlagen zur Erfassung der Fehler von Meßergebnissen.

2. Fehlerquellen

2.1. Jedes Meßergebnis wird verfälscht durch Unvollkommenheit des Meßgegenstandes, der Meßgeräte (einschließlich Maßverkörperungen) und der Meßverfahren, außerdem durch Einflüsse der Umwelt und der Beobachter, sowie durch zeitliche Veränderungen bei allen diesen Fehlerquellen.

2.1.1. Die Meßergebnisse verfälschende Umwelteinflüsse sind zu beachten. Die wichtigsten Einflußgrößen sind: Temperatur, Luftdruck, Feuchte, Verformungskräfte, Lage, Beschleunigungen (Erschütterungen, Stöße), Rauschen, Störfelder, Hilfsenergie (Netzspannung, Netzfrequenz), Störspannungen, Bürde, Fremddicht.

2.1.2. Verfälschende persönliche Einflüsse sind abhängig von den Eigenschaften und Fähigkeiten der Beobachter (z. B. Aufmerksamkeit, Übung, Sehschärfe, Schätzungsvermögen).

2.2. Außerdem kann ein Meßergebnis verfälscht werden durch Irrtümer der Beobachter, durch Wahl eines ungeeigneten Meß- oder Auswertungsverfahrens, ferner durch Nichtbeachten einer Fehlerquelle.

3. Fehlerarten

Die Fehlerquellen können Fehler systematischer oder zufälliger Art verursachen.

3.1. Systematische Fehler

Systematische Fehler nennt man solche Fehler, die unter gleichen Meßbedingungen (z. B. dasselbe Meßgerät, dieselbe Meßstelle, dieselben Umweltbedingungen) stets den gleichen Betrag und das gleiche Vorzeichen haben. Sie werden hauptsächlich hervorgerufen durch Unvollkommenheit der Meßgeräte, der Meßverfahren und des Meßgegenstandes und durch Umwelteinflüsse.

Beispiele: Anlagefehler, Einwirkungen der Meßkraft (Abplattung, Durchbiegung des Meßgerätes, des Prüf-

gegenstandes oder der Maßverkörperung), Teilungsfehler eines Maßstabes, durch Abweichung der Meßtemperatur verursachte Längenänderungsdifferenz zwischen Prüfgegenstand und Maßträger.

3.1.1. Erfasbare systematische Fehler

Erfasbare systematische Fehler sind nach Betrag und Vorzeichen bekannt und können zur Berichtigung des Meßwertes benutzt werden. Das Meßergebnis ist unrichtig, wenn die erfassbaren systematischen Fehler nicht berücksichtigt werden.

Erfasbar sind die systematischen Fehler von Meßgeräten durch Vergleich mit Maßverkörperungen oder Meßgeräten, deren Fehler bekannt sind (Anschluß- bzw. Kontrollmessung).

Eine Anschlußmessung ist der Vergleich eines Meßgerätes mit einer Maßverkörperung unter definierten Bedingungen.

Eine Kontrollmessung ist eine zweite Messung am unveränderten Prüfgegenstand mit einem anderen Meßgerät, dessen Fehler bekannt und möglichst klein sind.

Die erfassbaren systematischen Fehler sind ihrerseits als Meßergebnisse mit Unsicherheiten behaftet, die zu berücksichtigen sind.

3.1.1.1. Vorzeichen erfassbarer systematischer Fehler
Der erfassbare systematische Fehler ergibt sich vorzeichenrichtig aus:

Fehler = Istanzeige (ausgegebener Wert) minus Sollanzeige

$$F = I - S$$

Die Sollanzeige S ist identisch mit dem richtigen Wert x_r , und die Istanzeige I ist identisch mit x_a nach DIN 1319 Blatt 3, Abschnitt 3.1.1.

Der Fehler hat das Vorzeichen + oder - (siehe Beispiel).

3.1.1.2. Berichtigung des Meßwertes

Die Berichtigung (Korrektion) hat den gleichen absoluten Zahlenwert wie der Fehler, aber das entgegengesetzte Vorzeichen, also $B = -F$ (siehe Beispiel).

Wird die Berichtigung nicht durchgeführt, so werden die nicht berichtigten systematischen Fehler wie nicht erfaßte systematische Fehler entsprechend Abschnitt 3.1.2 behandelt.

Fortsetzung Seite 2 bis 7
Erläuterungen Seite 7

3.1.2. Nicht erfaßbare systematische Fehler

Nicht alle vorhandenen systematischen Fehler lassen sich erfassen oder sind bekannt. Von nicht erfaßbaren und nicht erfassen systematischen Fehlern sind häufig nur die Grenzen (z. B. Fehler von Endmaßen) bekannt.

Diese nicht erfassen Fehler haben immer ein bestimmtes Vorzeichen + oder -, es ist jedoch nicht bekannt. Deshalb werden die zwar abschätzbaren aber nicht erfassen systematischen Fehler wie zufällige Fehler behandelt; sie gehen dann mit dem Vorzeichen $\pm$ in die Berechnung der Meßunsicherheit ein.

3.2. Zufällige Fehler

Zufällige Fehler werden von nicht erfaßbaren Änderungen der Maßverkörperungen, des Meßgerätes, des Prüfgegenstandes, der Umwelt und des Beobachters hervorgerufen. Es sind Meßfehler, die unter gleichen Bedingungen nicht immer die gleiche Größe haben. Sie schwanken nach Vorzeichen und Größe. Sie sind einzeln nicht erfaßbar, machen das Meßergebnis unsicher, bilden die Grundlage für die Gütebeurteilung des Meßverfahrens und sind ein Bestandteil der Meßunsicherheit.

3.2.1. Auswirkung zufälliger Fehler

Wiederholt derselbe Prüfer an demselben Prüfgegenstand eine Messung derselben Länge mit demselben Meßgerät unter gleichen Bedingungen oder vergleicht ein Prüfer mehrmals dasselbe Meßgerät mit demselben Normal unter den gleichen Bedingungen (Wiederholmeßreihe, siehe Abschnitt 4.1), so werden die einzelnen Meßwerte infolge zufälliger Fehler voneinander abweichen (streuen).

4. Fehlerrechnung

Die im folgenden angegebenen Rechnungsgrundlagen beziehen sich ausschließlich auf zufällige und nicht erfaßbare oder nicht erfaßte systematische Fehler.

4.1. Wiederholmeßreihe

Bei einer Wiederholmeßreihe werden eine Anzahl Einzelmessungen unmittelbar nacheinander unter denselben Bedingungen, d. h. dieselbe Lage des Werkstücks, dieselbe Position des Meßgerätes, dieselben Umweltbedingungen, durchgeführt. Die Wiederholmeßreihe ist die Grundlage für die Fehlerrechnung. In vielen Fällen wird die Anzahl n der Einzelmesswerte einer Wiederholmeßreihe zwischen 8 und 25 gewählt werden können.

4.1.1. Ausschneiden grober Ausreißer (Dixon-Test)

Unter Ausreißern versteht man Meßwerte, die z. B. durch Unaufmerksamkeit entstehen und deshalb nicht zu einer Normalverteilung gehören. Sie sind an den der Größe nach geordneten Meßwerten zu erkennen, wenn die Prüfgröße z_B berechnet und mit dem Schwellenwert z_T verglichen wird.

Ein größter Meßwert $x_{(n)}$ oder ein kleinster Meßwert $x_{(1)}$ der geordneten Meßreihe ist fortzulassen, wenn die Prüfgröße $z_{B(n)}$ oder $z_{B(1)}$ den Schwellenwert z_T überschreitet. In diesem Falle ist z_B erneut ohne den festgestellten Ausreißer zu bilden und mit dem z_T der um den Ausreißer verminderten Meßreihe zu vergleichen. Das Verfahren ist so oft zu wiederholen, bis kein Ausreißer mehr festgestellt wird. (siehe Beispiele)

4.1.2. Mittelwert (arithmetisches Mittel)

Sind bei einer von Ausreißern bereinigten Wiederholmeßreihe n voneinander unabhängige Einzelwerte $x_1 \dots x_i \dots x_n$ unter den Voraussetzungen im Abschnitt 3.2.1 gemessen worden, so benutzt man üblicherweise das arithmetische

Tabelle 1.

n	Schwellenwert z_T für $P=95\%$	Prüfgröße	
		$z_{B(n)}$ (für den Größtwert)	$z_{B(1)}$ (für den Kleinstwert)
5	0,642	$\frac{x_{(n)} - x_{(n-1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}}$	$\frac{x_{(2)} - x_{(1)}}{x_{(n)} - x_{(1)}}$
6	0,560		
7	0,507		
8	0,554	$\frac{x_{(n)} - x_{(n-1)}}{x_{(n)} - x_{(2)}}$	$\frac{x_{(2)} - x_{(1)}}{x_{(n-1)} - x_{(1)}}$
9	0,512		
10	0,477		
11	0,576	$\frac{x_{(n)} - x_{(n-2)}}{x_{(n)} - x_{(2)}}$	$\frac{x_{(3)} - x_{(1)}}{x_{(n-1)} - x_{(1)}}$
12	0,546		
13	0,521		
14	0,546		
15	0,525		
16	0,507		
17	0,490		
18	0,475		
19	0,462	$\frac{x_{(n)} - x_{(n-2)}}{x_{(n)} - x_{(3)}}$	$\frac{x_{(3)} - x_{(1)}}{x_{(n-1)} - x_{(1)}}$
20	0,450		
21	0,440		
22	0,430		
23	0,421		
24	0,413		
25	0,406		

Mittel aus diesen n Einzelwerten, kurz Mittelwert $\bar{x}$ genannt (gesprochen x -quer).

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{siehe Beispiel})$$

4.1.3. Standardabweichung s_n

Die wichtigste Rechengröße für die zufälligen Abweichungen der Einzelwerte x_i von ihrem Mittelwert $\bar{x}$ ist die Standardabweichung s_n . Sie ist definiert durch

$$s_n = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

Die Anzahl n der Messungen bestimmt die Zuverlässigkeit des Zahlenwertes s ; sie ist als Index zu s anzugeben (siehe Beispiel). Die Standardabweichung kann auch aus der Spannweite geschätzt werden (siehe Abschnitt 4.1.4). s_n wird vereinbarungsgemäß nur positiv angegeben, um Fehldeutungen zu vermeiden. Die Standardabweichung hat dieselbe Einheit wie die Meßgröße. Leicht handhabbare Rechenmethoden zur Ermittlung von s_n siehe DIN 55 302.

4.1.4. Spannweite R , Standardabweichung s_R

Die Spannweite R ist die Differenz zwischen größtem Wert $x_{\max}$ und kleinstem Wert $x_{\min}$ der von Ausreißern bereinigten Wiederholmeßreihe mit den voneinander unabhängigen Einzelwerten $x_1 \dots x_i \dots x_n$

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$

Aus der Spannweite R kann ein der Standardabweichung s_n entsprechender Zahlenwert s_R berechnet werden, wenn die Wiederholmeßreihe einer Normalverteilung entspricht (siehe Abschnitt 4.1.5).

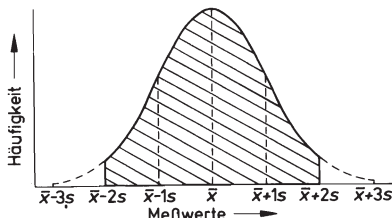
$$s_R = \frac{R}{d_n}$$

Zahlenwerte für d_n siehe Tabelle 1.  Documents

Dieses Rechenverfahren sollte nur bei $n = 25$ angewendet werden. Bei größeren Meßreihen sollte nach Abschnitt 4.1.3 verfahren werden.

4.1.5. Normalverteilung (Gauss-Verteilung)

Bei einer genügend großen Anzahl n von Meßwerten ergibt sich meist die im Bild dargestellte Normalverteilung. Auch bei kleineren Meßreihen, z. B. $n = 5$ bis $n = 25$ darf man diese Verteilung näherungsweise zugrundelegen. Die stets symmetrische Normalverteilung ergibt sich als Auswirkung der zufälligen Fehler.



Die Verteilungsbreite ist als Mehrfaches der Standardabweichung ein wichtiges Maß für die zufälligen Fehler. In einen Bereich $\bar{x} - 2s$ bis $\bar{x} + 2s$ fallen 95,4% aller Meßwerte. Ein beliebiger Meßwert befindet sich also mit 95,4%iger statistischer Sicherheit (Aussagewahrscheinlichkeit) in diesem Bereich.

Anmerkung: Diese „Aussage“ ist nur für große Werte n gültig, weil für kleine Werte n die Ermittlung der Standardabweichung ihrerseits unsicher ist (siehe Abschnitt 4.1.6).

Bei Normalverteilung gilt Tabelle 2.

Tabelle 2.

für den Bereich von	$\bar{X} - 1s$ bis $\bar{X} + 1s$	$\bar{X} - 2s$ bis $\bar{X} + 2s$	$\bar{X} - 3s$ bis $\bar{X} + 3s$
eine statistische Sicherheit P von	68,3 %	95,4 %	99,7 %

In der internationalen Meßtechnik wird die statistische Sicherheit $P = 95\%$ (entsprechend $1,96s \approx 2s$) bevorzugt angewendet. In der ISO-Empfehlung R 1938/1971 „ISO-System für Toleranzen und Passungen; Prüfung der Werkstücke“ wird empfohlen, die Unsicherheit von neu zu entwickelnden Meßgeräten mit $P = 95\%$ anzugeben. In besonderen Fällen wird die höhere statistische Sicherheit $P = 99,7\%$ entsprechend dem Bereich der Meßgröße $\bar{x} - 3s$ bis $\bar{x} + 3s$ angewendet. Im Zweifelsfalle ist zu überprüfen, ob eine Normalverteilung zugrundegelegt werden darf.

4.1.6. Vertrauensbereich des Einzelwertes

Der Vertrauensbereich des Einzelwertes VB_{x_i} gibt aufgrund der aus einer früheren Wiederholmeßreihe ermittelten Standardabweichung s_x die Grenzen $x_i - VB_{x_i}$ bis $x_i + VB_{x_i}$ an, in denen mit der vorgegebenen statistischen Sicherheit P der Einzelmeßwert x_i unsicher ist. Bei einer statistischen Sicherheit von $P = 95\%$ ist:

$$VB_{x_i} = \pm 2 \cdot k \cdot s_n$$

Da die Standardabweichung ihrerseits unsicher ist, wird der Faktor k eingeführt, der sich einseitig auf die obere Grenze des Unsicherheitsbereiches der Standardabweichung bezieht. Wird gemäß Abschnitt 4.1.4 s_R benutzt, so gilt:

$$VB_{x_i} = \pm 2 \cdot k_R \cdot s_R$$

4.1.7. Vertrauensbereich des Mittelwertes $VB_{\bar{x}}$

Der Vertrauensbereich des Mittelwertes gibt die Grenzen $\bar{x}_n - VB_{\bar{x}}$ bis $\bar{x}_n + VB_{\bar{x}}$ an, in denen mit der vorgegebenen statistischen Sicherheit P der Mittelwert $\bar{x}_n$ unsicher ist. Bei einer statistischen Sicherheit von $P = 95\%$ ist

$$VB_{\bar{x}} = \pm \frac{t_n \cdot s_n}{\sqrt{n}}$$

Wird gemäß Abschnitt 4.1.4 s_R benutzt, so gilt:

$$VB_{\bar{x}} = \pm \frac{t_n \cdot s_R}{\sqrt{n}}$$

Anmerkung: Bezogen auf s_R müßte theoretisch anstelle t_n ein anderer Faktor gewählt werden, der sich aber für $n = 5$ um weniger als 5% von t_n unterscheidet und ab $n = 10$ praktisch gleich t_n ist.

Tabelle 3.

n	d_n	k	k_R	$\frac{t_n}{\sqrt{n}}$
				$P = 95\%$
5	2,33	2,35	2,6	1,24
6	2,53	2,08	2,2	1,05
7	2,70	1,92	2,05	0,92
8	2,85	1,80	1,90	0,84
9	2,97	1,71	1,80	0,77
10	3,08	1,64	1,72	0,72
11	3,17	1,59	1,67	0,67
12	3,26	1,55	1,62	0,64
13	3,34	1,51	1,58	0,60
14	3,41	1,49	1,54	0,58
15	3,47	1,46	1,51	0,55
16	3,53	1,44	1,48	0,53
17	3,59	1,42	1,46	0,51
18	3,64	1,40	1,44	0,50
19	3,69	1,38	1,42	0,48
20	3,74	1,37	1,40	0,47
21	3,78	1,35	1,38	0,46
22	3,82	1,34	1,37	0,44
23	3,86	1,34	1,36	0,43
24	3,90	1,33	1,35	0,42
25	3,93	1,32	1,34	0,41

4.2. Meßunsicherheit

Die Meßunsicherheit U_y eines Ergebnisses y ergibt sich immer aus den zufälligen Fehlern, sowie aus nicht erfaßten systematischen Fehlern aller Einzelgrößen, die aufgrund funktioneller Zusammenhänge am Ergebnis beteiligt sind. Die Meßunsicherheit gibt bezogen auf das ermittelte Meßergebnis den Bereich an, innerhalb dessen das unbekannte fehlerfreie Ergebnis mit der statistischen Sicherheit $P = 95\%$ liegen wird.

4.2.1. Fehlerwerte zur Berechnung der Meßunsicherheit

Fehlerwerte werden die Werte genannt, durch die die zufälligen Fehler und die nicht erfaßten systematischen Fehler in der Meßunsicherheit berücksichtigt werden. Sie haben in jedem Fall das $\pm$ -Vorzeichen.

4.2.1.1. Zufällige Fehler

Die zufälligen Fehler werden erfaßt durch die Vertrauensbereiche VB_{x_i} nach Abschnitt 4.1.6, wenn das Meßergebnis y aus Einzelmeßwerten besteht und durch $VB_{\bar{x}}$ nach Abschnitt 4.1.7, wenn das Meßergebnis y aus Mittelwerten von Wiederholmeßreihen bestimmt wird.