

Tragfähigkeitsberechnung von Stirnrädern

Berechnung der Zahnfußtragfähigkeit

DIN
3990
Teil 3

Calculation of load capacity of cylindrical gears; calculation of tooth strength

Mit DIN 3990 T 1/12.87,
DIN 3990 T 2/12.87 und
DIN 3990 T 4/12.87
Ersatz für Ausgabe 12.70
und
DIN 3990 T 1/12.70,
DIN 3990 T 2/12.70,
DIN 3990 T 5/12.70,
DIN 3990 T 6/12.70,
DIN 3990 T 7/12.70,
DIN 3990 T 8/12.70 und
DIN 3990 T 10/01.73

Zusammenhang mit den vom ISO/TC 60, Verzahnungen, verabschiedeten Fassungen für ISO/DIS 6336/1 bis ISO/DIS 6336/5 siehe Erläuterungen in DIN 3990 Teil 1.

Kursivgedruckte Textteile sind Angaben, die zur unmittelbaren Berechnung nicht erforderlich sind, wohl aber zur Kenntnis des Anwendungsbereiches dieser Norm sowie der Diagramme, Formeln und Konstanten. Außerdem erleichtern sie das Verständnis der einzelnen Berechnungsschritte.

Zeichen, Benennungen und Einheiten siehe DIN 3990 Teil 1.

Zeichen, die ausschließlich in Verbindung mit der Berechnung einzelner Faktoren verwendet werden, sind in den entsprechenden Abschnitten dieser Norm angegeben.

Zur Beurteilung der Zahnfußtragfähigkeit benutzt man die maximale Zugspannung (Tangentialspannung in Zahnhöhenrichtung) am Zahnfuß. Diese Spannung tritt am Fuß derjenigen Zahnflanken auf, an denen die Kraft angreift. Die ersten Anrisse treten häufig am Fuß der Zahnflanken auf, die auf Druck beansprucht werden. Diese Anrisse führen bei konstanter Richtung der Umfangskraft, das heißt bei Schwellbeanspruchung der Zähne und normalen Zahnformen, im allgemeinen nicht zum Dauerbruch. Der Dauerbruch geht vielmehr meist von der zugbeanspruchten Fußrundung aus. – Bei wechselbeanspruchten Zähnen (zum Beispiel Zwischenrädern) wird die Dauerfestigkeit durch die Anrisse auf der Druckseite gemindert. Dies wird beim Ansatz der zulässigen Spannung berücksichtigt, siehe DIN 3990 Teil 5.

Bei Zahnformen mit sehr enger Lücke im Zahngrund und dünnen Zahnkränzen, die bei Innenverzahnungen vorkommen können, geht der Dauerbruch von den Anrissen auf der druckbeanspruchten Seite aus. Die in dieser Norm angegebene Berechnung gilt daher nur für Verzahnungen mit ausreichend dicken Zahnkränzen und Innenverzahnungen, deren Zahnform der des Bezugsprofils ähnlich ist, wobei ein Zahnbruch zwischen beiden Fußrundungen eines Zahnes verläuft. Bei dünnen Zahnkränzen kann der Zahnkranz selber brechen. In diesen Fällen sind gesonderte Untersuchungen anzustellen. Siehe Abschnitte 1.1, 3.2.2 und 3.3.2.

Für die Berechnung der maßgebenden Zahnfußspannung und die Bestimmung einiger Faktoren sind mehrere Methoden zugelassen, siehe DIN 3990 Teil 1.

Fortsetzung Seite 2 bis 52

Normenausschuß Antriebstechnik (NAN) im DIN Deutsches Institut für Normung e. V.

Inhalt

	Seite		Seite
1 Anwendungsbereich und Zweck	2	9 Stützziffern Y_{δ} , $Y_{\delta T}$, $Y_{\delta k}$	
1.1 Allgemeines	2	relative Stützziffern $Y_{\delta \text{ rel } T}$, $Y_{\delta \text{ rel } k}$	41
1.2 Zahnbruch und Sicherheitsfaktor	2	9.1 Zeichen, Benennungen und Einheiten	
2 Grundgleichungen	3	9.2 Methoden zur Bestimmung der Stützziffern bzw. relativen Stützziffern	41
2.1 Auftretende Zahnfußspannung σ_F	3	9.3 Bestimmung der relativen Stützziffer $Y_{\delta \text{ rel } T}$, Methode B	41
2.2 Zulässige Zahnfußspannung σ_{FP}	4	9.4 Bestimmung der relativen Stützziffer $Y_{\delta \text{ rel } T}$, Methoden C, (D)	42
2.3 Rechnerischer Sicherheitsfaktor für die Zahnfußbeanspruchung (Zahnbruchsicherheit) S_F ..	6	9.5 Bestimmung der relativen Stützziffer $Y_{\delta \text{ rel } k}$, Methode B _k	43
3 Formfaktoren Y_F , Y_{Fa} ; Kopffaktor Y_{FS}	6	9.6 Bestimmung der relativen Stützziffer $Y_{\delta \text{ rel } k}$, Methode C _k	43
3.1 Zeichen, Benennungen und Einheiten	7	9.7 Bestimmung der Stützziffer Y_{δ} , Methode B _p	43
3.2 Berechnung des Formfaktors für Methode B: Y_F	8	9.8 Bestimmung der Stützziffer Y_{δ} , Methode C _p	43
3.3 Bestimmung des Formfaktors für Methode C: Y_{Fa}	9	10 Oberflächenfaktoren Y_R , Y_{RT} , Y_{Rk}	
3.4 Grafische Bestimmung des Kopffaktors Y_{FS} (Methode C)	11	relative Oberflächenfaktoren $Y_{R \text{ rel } T}$, $Y_{R \text{ rel } k}$	48
3.5 Ableitungen der maßgebenden Zahnnormalkraft (für Geradverzahnung)	11	10.1 Zeichen, Benennungen und Einheiten	48
3.6 Formfaktor Y_F und Spannungskorrekturfaktor Y_S nach Methode B für Hochverzahnungen	11	10.2 Methoden zur Bestimmung der Oberflächenfaktoren bzw. relativen Oberflächenfaktoren	48
4 Spannungskorrekturfaktoren Y_S , Y_{Sa}	29	10.3 Bestimmung des relativen Oberflächenfaktors $Y_{R \text{ rel } T}$, Methode B	48
4.1 Zeichen, Benennungen und Einheiten	29	10.4 Bestimmung des relativen Oberflächenfaktors $Y_{R \text{ rel } T}$, Methode C	49
4.2 Berechnung des Spannungskorrekturfaktors für Methode B: Y_S	29	10.5 Bestimmung des relativen Oberflächenfaktors $Y_{R \text{ rel } T}$, Methode D	49
4.3 Bestimmung des Spannungskorrekturfaktors für Methode C: Y_{Sa}	29	10.6 Bestimmung des relativen Oberflächenfaktors $Y_{R \text{ rel } k}$, Methode B _k	49
4.4 Berechnung der Spannungskorrekturfaktoren bei Kerben im Zahnfuß	38	10.7 Bestimmung des relativen Oberflächenfaktors $Y_{R \text{ rel } k}$, Methode C _k	49
4.5 Spannungskorrekturfaktor für die Abmessungen der Standard-Referenz-Prüfräder Y_{ST}	38	10.8 Bestimmung des Oberflächenfaktors Y_R , Methode B _p	49
5 Überdeckungsfaktor (Zahnfuß) Y_{ε}	38	10.9 Bestimmung des Oberflächenfaktors Y_R , Methode C _p	49
6 Schrägenfaktor (Zahnfuß) Y_{β}	38	11 Größenfaktor (Zahnfuß) Y_X	50
7 Dauerfestigkeit der Zahnfußspannung	39	11.1 Größeneinfluß (Zahnfuß), Methode A	51
7.1 Dauerfestigkeitswerte $\sigma_{F \text{ lim}}$, σ_{FE} für die Methoden B, C, (D)	39	11.2 Größeneinfluß (Zahnfuß), Methode B	51
7.2 Dauerfestigkeitswerte $\sigma_{k \text{ lim}}$, $\sigma_{p \text{ lim}}$ für die Methoden B _k , C _k , (D _k) sowie B _p , C _p , (D _p)	39	11.3 Größeneinfluß (Zahnfuß), Methode C	51
8 Lebensdauerfaktor (Zahnfuß) Y_{NT}	39		
8.1 Lebensdauerfaktor Y_{NT} , Methode A	39		
8.2 Lebensdauerfaktor Y_{NT} , Methode B	40		

1 Anwendungsbereich und Zweck**1.1 Allgemeines**

Diese Norm enthält die Grundgleichungen für die Berechnung der Zahnfußtragfähigkeit von Evolventen-Stirnrädern mit Außen- und Innenverzahnung und einer Mindest-Zahnkranzdicke unter dem Zahnfuß von $3,5 \cdot m_n$. Sie erfaßt alle Einflüsse auf die Zahnfußtragfähigkeit, sofern sie aus den von der Verzahnung übertragenen Kräften ¹⁾ resultieren und soweit sie quantitativ beurteilt werden können.

Die Gleichungen gelten für Stirnräder mit einem Bezugsprofil nach DIN 867 oder ISO 53 – 1974 (siehe auch Vorbemerkung). Sie können auch angewendet werden auf Stirnräder mit einem anderen Bezugsprofil bis zu einer Profilüberdeckung von $\varepsilon_{an} = 2,5$. (Einschränkung bei Methode C siehe Unterabschnitt 2.1.1c) und Abschnitt 3.3.)

Die durch die zulässige Zahnfußbeanspruchung bestimmte Tragfähigkeit wird „Zahnfußtragfähigkeit“ genannt.

¹⁾ Siehe Seite 3

1.2 Zahnbruch und Sicherheitsfaktor

Der Bruch eines Zahnes bedeutet im allgemeinen das Ende der Lebensdauer des Getriebes. Vielfach wird als Folge eines Zahnbruches die gesamte Verzahnung des Getriebes zerstört. Unter Umständen wird dadurch die Verbindung zwischen An- und Abtriebswelle unterbrochen.

Deshalb ist S_F , der Sicherheitsfaktor gegen Zahnbruch, im allgemeinen größer zu wählen als der Sicherheitsfaktor gegen Schäden durch Grübchenbildung.

Nach einem Zahnbruch ist ein Betrieb mit verringerter Belastung möglich, wenn nur ein kleiner Teil eines oder mehrerer Zähne ausgebrochen ist und die übrigen Teile der Verzahnung unbeschädigt sind.

Allgemeine Gesichtspunkte, die bei der Wahl des Mindest-Sicherheitsfaktors zu beachten sind, siehe DIN 3990 Teil 1, Ausgabe 12.87, Abschnitt 1.2. In den Anwendungsnormen der Reihe DIN 3990 sind hierfür Zahlenwerte angegeben. Es wird empfohlen, den Mindest-Sicherheitsfaktor zwischen Hersteller und Anwender zu vereinbaren.

2 Grundgleichungen

Die auftretende Zahnfußspannung σ_F und die zulässige Zahnfußspannung σ_{FP} werden getrennt für Ritzel und Rad berechnet. σ_F muß kleiner sein als σ_{FP} .

2.1 Auftretende Zahnfußspannung σ_F

2.1.1 Methoden zur Bestimmung der Zahnfußspannung σ_F : Grundlagen, Annahmen, Anwendung

a) Methode A

Die maximale Zugspannung kann prinzipiell mit jedem geeigneten Berechnungsverfahren bestimmt werden (zum Beispiel nach der Methode der finiten Elemente, mit Integralgleichungen, mit konformen Abbildungen, oder ebenso durch spannungsoptische Untersuchungen, Messung der Dehnungen usw.). Dabei ist derjenige Kraftangriff zugrunde zu legen, der unter Berücksichtigung der Kraftaufteilung auf mehrere gleichzeitig im Eingriff befindliche Zahnpaare die höchste Zahnfußspannung ergibt.

Man muß beachten, daß die Tangentialspannung für den ebenen Formänderungszustand maßgebend ist. Dies ist wesentlich für den Vergleich mit den Ergebnissen aus spannungsoptischen Messungen, Methoden B und C, sowie den zulässigen Spannungen.

Methode A wird wegen des großen Aufwandes nur in Sonderfällen angewendet und ist nur dann gerechtfertigt.

Nach dieser Norm wird die örtliche Zahnfußspannung als Produkt aus Biege-Nennspannung und Spannungskorrekturfaktor ermittelt (Methoden B und C)¹⁾.

b) Methode B

Man geht hierbei von der Annahme aus, daß die größte Zahnfußspannung bei Kraftangriff im äußeren Einzeleingriffspunkt auftritt (bei Schrägstirnrädern für die Ersatzverzahnung im Normalschnitt mit Ansatz der Zahnnormalkraft im Stirnschnitt und bezogen auf die Zahnbreite des aktuellen Stirnrades), bei Verzahnungen mit Profilüberdeckungen $2 \leq \varepsilon_{\alpha n} < 3$ im inneren Doppelengriffspunkt. – Hierfür werden Gleichungen zur Berechnung der entsprechenden Formfaktoren Y_F (für die Nennspannung) und Spannungskorrekturfaktoren Y_S angegeben. Bei Schrägverzahnung berücksichtigt der Faktor Y_β die Abweichungen von diesen Annahmen.

Methode B eignet sich für genauere Berechnungen und ist zweckmäßig für EDV-Programme sowie für die Auswertung von Pulserversuchen (gegebener Kraftangriffspunkt).

c) Methode C

Diese vereinfachte Berechnungsmethode ist von Methode B abgeleitet. Man berechnet hierbei zunächst (mit den Faktoren Y_{Fa} und Y_{Sa}) die örtliche Zahnfußspannung für Kraftangriff am Zahnkopf und rechnet dann mit dem Faktor Y_ϵ näherungsweise auf den äußeren Einzeleingriffspunkt um.

Der Formfaktor Y_{Fa} (für die Nennspannung) und der Spannungskorrekturfaktor Y_{Sa} werden für eine Reihe von Bezugsprofilen in Diagrammen angegeben.

Methode C ist nur zulässig für Verzahnungen mit $\varepsilon_{\alpha n} < 2$; sie ist zweckmäßig, wenn kein EDV-Programm zur Verfügung steht. Sie ist für die meisten Fälle ausreichend genau und führt im allgemeinen zu geringfügig höheren Spannungen als Methode B.

2.1.2 Bestimmung der Zahnfußspannung σ_F nach Methoden B, C

$$\sigma_F = \sigma_{F0} \cdot K_A \cdot K_v \cdot K_{F\beta} \cdot K_{F\alpha} \leq \sigma_{FP} \quad (2.01)^2)$$

Hierin ist

σ_{F0} **Zahnfuß-Nennspannung**, das ist die bei Belastung einer fehlerfreien Verzahnung durch das statische Nennmoment am Zahnfuß auftretende maximale örtliche Zugspannung.

K_A **Anwendungsfaktor** (siehe DIN 3990 Teil 1) (berücksichtigt die Krafterhöhung durch äußere Einwirkungen von der Ein- oder Ausgangsseite)

K_v **Dynamikfaktor** (siehe DIN 3990 Teil 1) (berücksichtigt die Krafterhöhung durch innere dynamische Einwirkungen)

$K_{F\beta}$ **Breitenfaktor für Zahnfußbeanspruchung** (siehe DIN 3990 Teil 1) (berücksichtigt ungleichmäßige Kraftverteilung über die Breite, zum Beispiel infolge von Herstellabweichungen und elastischen Verformungen)

$K_{F\alpha}$ **Stirnfaktor für Zahnfußbeanspruchung** (siehe DIN 3990 Teil 1) (berücksichtigt ungleichmäßige Kraftaufteilung in Umfangsrichtung, zum Beispiel durch Teilungsabweichungen)

Reihenfolge der Faktoren K_A , K_v , $K_{F\beta}$, $K_{F\alpha}$ im Verlauf der Berechnung siehe DIN 3990 Teil 1, Ausgabe 12.87, Abschnitt 1.5.

σ_{FP} **Zulässige Zahnfußspannung** (siehe Abschnitt 2.2).

2.1.3 Bestimmung der Zahnfuß-Nennspannung nach Methode B: σ_{F0-B}

$$\sigma_{F0-B} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_F \cdot Y_S \cdot Y_\beta \quad (2.02)$$

Hierin ist

F_t **Nenn-Umfangskraft** am Teilzylinder im Stirnschnitt³⁾ (siehe DIN 3990 Teil 1)

b **Zahnbreite** (bei Doppel-Schrägverzahnung $= 2 \cdot b_B$): Breite im Fußkreis ohne Berücksichtigung sinnvoll ausgeführter Stirnkantenbrüche oder Stirnkantenabrundungen. Sind die Zahnbreiten von Ritzel und Rad ungleich, so ist je Zahnende höchstens ein Überstand von ein mal Modul als mittragend anzunehmen. Bei rand-schichtgehärteten Zahnrädern sind ungehärtete Bereiche der Zahnbreite einschließlich der Übergangszone nur zu 50% als mittragend anzusehen. Wenn jedoch durch Breitenballigkeit oder Endrücknahme der Kontakt nicht bis zur Stirnseite reicht, ist für Ritzel und Rad die Breite des schmaleren von beiden einzusetzen.

m_n **Modul** im Normalschnitt

Y_F **Formfaktor** (siehe Abschnitt 3) (berücksichtigt den Einfluß der Zahnform auf die Biege-Nennspannung für Kraftangriff im äußeren Einzeleingriffspunkt)

Y_S **Spannungskorrekturfaktor** (siehe Abschnitt 4) (berücksichtigt die Umrechnung der Biege-Nennspannung bei Kraftangriff im äußeren Einzeleingriffspunkt auf die örtliche Zahnfußspannung. Y_S erfaßt damit die spannungserhöhende Wirkung der Kerbe (= Fußrundung) und die Tatsache, daß im kritischen Fußquerschnitt ein komplexerer Spannungszustand herrscht)

Y_β **Schrägenfaktor** (siehe Abschnitt 6) (berücksichtigt, daß die Verhältnisse für die Fußbeanspruchung bei Schrägverzahnung infolge der schrägen Berührlinien günstiger werden, als sie bei der zugrunde gelegten virtuellen Verzahnung sind).

¹⁾ Spannungen, die sich den durch die Zahnkräfte verursachten Spannungen überlagern – wie z.B. bei geschrumpften Bandagen – sind gegebenenfalls im Ansatz der Zahnfußspannung σ_F oder der zulässigen Zahnfußspannung σ_{FP} zu berücksichtigen.

²⁾ Bei Getrieben mit Leistungsverzweigung (Mehrweggetriebe, Planetengetriebe, Verzweigungsgetriebe) verteilt sich die Gesamt-Umfangskraft nicht ganz gleichmäßig auf die einzelnen Zahneingriffe (abhängig von Konstruktion, Umfangsgeschwindigkeit und Fertigungsgenauigkeit). Dies muß beim Ansatz der je Eingriff zu übertragenden Umfangskraft, z. B. durch einen zusätzlichen Aufteilungsfaktor K_v , berücksichtigt werden, der hinter K_A einzufügen ist. Siehe auch DIN 3990 Teil 2, Ausgabe 12.87, Schrifttumsangaben [4], [5].

³⁾ Siehe Seite 4

2.1.4 Bestimmung der Zahnfuß-Nennspannung nach Methode C: σ_{F0-C}

$$\sigma_{F0-C} = \frac{F_t}{b \cdot m_n} \cdot Y_{Fa} \cdot Y_{Sa} \cdot Y_\epsilon \cdot Y_\beta$$

$$= \frac{F_t}{b \cdot m_n} Y_{FS} \cdot Y_\epsilon \cdot Y_\beta \quad (2.03)$$

Hierin ist

Y_{Fa} **Formfaktor** (siehe Abschnitt 3) (berücksichtigt den Einfluß der Zahnform auf die Biege-Nennspannung für Kraftangriff am Zahnkopf)

Y_{Sa} **Spannungskorrekturfaktor** (siehe Abschnitt 4) (berücksichtigt die Umrechnung der Biege-Nennspannung bei Kraftangriff am Zahnkopf auf die entsprechende örtliche Zahnfußspannung. Y_{Sa} erfaßt damit die spannungserhöhende Wirkung der Kerbe (= Fußrundung) und die Tatsache, daß im kritischen Fußquerschnitt ein komplexerer Spannungszustand herrscht, berücksichtigt jedoch nicht den Einfluß des Biegehebelarmes)

Y_ϵ **Überdeckungsfaktor** (siehe Abschnitt 5) (berücksichtigt die Umrechnung der für Kraftangriff am Zahnkopf ermittelten örtlichen Spannung auf die Verhältnisse bei Kraftangriff im äußeren Einzeleingriffspunkt und erfaßt damit die Lastaufteilung auf mehrere Zahnpaare und den Einfluß des Biegehebelarmes auf den Spannungskorrekturfaktor)

Y_{FS} **Kopffaktor** = $Y_{Fa} Y_{Sa}$ (siehe Abschnitt 3) (berücksichtigt die bei Y_{Fa} und Y_{Sa} beschriebenen Einflüsse; Y_{FS} läßt sich für jedes Bezugsprofil in einem Diagramm darstellen).

Die übrigen Einflußfaktoren sind bei Gleichung (2.02) erklärt.

2.2 Zulässige Zahnfußspannung σ_{FP}

Die Grenzwerte der Zahnfußspannung (siehe Abschnitt 7) sollen vorzugsweise unmittelbar an Zahnrädern ermittelt werden, denn damit liegt der Bezugspunkt der Berechnung im Bereich des Anwendungsgebietes (und berücksichtigt beispielsweise hierfür die Kerbwirkung mit). Der Berechnungsansatz wird als Modellgesetz benutzt, mit dem man Versuchsdaten oder Erfahrungswerte auf Zahnräder verschiedener Abmessungen übertragen kann. Ungenauigkeiten des Berechnungsansatzes wirken sich um so geringer aus, je ähnlicher die für die Versuche benutzte Referenz-Verzahnung der aktuellen Verzahnung ist und je ähnlicher die Versuchsbedingungen den Betriebsbedingungen sind.

2.2.1 Methoden zur Bestimmung der zulässigen Zahnfußspannung σ_{FP} : Grundlagen, Annahmen, Anwendung

Zur Bestimmung der zulässigen Zahnfußspannung können verschiedene Methoden zugelassen werden. Dabei muß durch sorgfältige Vergleichsuntersuchungen mit Zahnrädern sichergestellt werden, daß die Kennwerte auf Zahnräder übertragbar sind.

a) Methode A

Die zulässige Zahnfußspannung σ_{FP} (oder die Zahnfuß-Grenzfestigkeit σ_{FG}) wird hierbei aus der Wöhlerlinie oder Schadenslinie des aktuellen Zahnrades für die betreffenden Betriebsbedingungen mit Gleichung (2.01) oder (2.02) berechnet. – Die Laufversuche werden also unmittelbar mit den aktuellen Radpaaren bei wirklichkeitsgetreuen Betriebsbedingungen durchgeführt.

Der hierfür erforderliche Aufwand ist im allgemeinen nur gerechtfertigt bei Neuentwicklungen mit einem Schadensrisiko großer Tragweite (zum Beispiel für die bemannte Raumfahrt).

Sinngemäß kann man nach dieser Methode die zulässige Spannung aus den Maßen und Betriebsbedingungen eines – dem aktuellen Radpaar ähnlichen – bewährten Referenz-Getriebes ermitteln.

b) Methode B

Aus Lauf- oder Pulserversuchen mit Standard-Referenz-Prüfrädern ermittelt man für eine Reihe von üblichen Werkstoffen und Wärmebehandlungsverfahren Schadenslinien, gekennzeichnet durch den Dauerfestigkeitswert $\sigma_{F\lim}$ und den Lebensdauerfaktor Y_{NT} . Diese Prüfradwerte werden mit den (relativen) Einflußfaktoren für Kerbempfindlichkeit des Werkstoffes ($Y_{\delta\text{ rel T}}$), Oberflächenbeschaffenheit ($Y_{R\text{ rel T}}$) und Baugröße (Y_X) auf die Maße des aktuellen Zahnrades umgerechnet.

Methode B ist für genauere Berechnungen zu bevorzugen, wenn Festigkeitswerte von Standard-Referenz-Prüfrädern aus speziellen Untersuchungen oder nach DIN 3990 Teil 5 zur Verfügung stehen.

c) Methoden C, (D)

Diese Methoden sind von Methode B abgeleitet. Die Einflußfaktoren $Y_{\delta\text{ rel T}}$, $Y_{R\text{ rel T}}$ und Y_X werden dabei nach vereinfachten Ansätzen, das heißt nach Methode C, evtl. D, bestimmt.

Die Methoden sind einfacher und schneller zu handhaben als Methode B. Die Ergebnisse liegen meist auf der sicheren Seite. Bestimmung der Festigkeitswerte wie bei Methode B.

d) Methoden B_k , C_k , (D_k)

Die zulässige Zahnfußspannung wird aus den Biegeschwell-Festigkeitswerten von gekerbten Flachproben (Wöhlerlinien, Schadenslinien) ermittelt: Dauerfestigkeit $\sigma_{k\lim}$ und Lebensdauerfaktor Y_{Nk} . Diese Probenwerte werden – ähnlich wie bei Methode B – mit den relativen (das heißt auf die Maße der gekerbten Probe bezogenen) Einflußfaktoren für Kerbempfindlichkeit $Y_{\delta\text{ rel k}}$, Oberflächenbeschaffenheit $Y_{R\text{ rel k}}$ (und dem Einflußfaktor für die Baugröße nach Methode B) auf die Maße des aktuellen Zahnrades umgerechnet.

Bei Methode C_k , evtl. D_k , werden die Einflußfaktoren – gegenüber Methode B_k – nach vereinfachten Ansätzen bestimmt.

Diese Methoden kann man anwenden, wenn keine Festigkeitswerte aus Zahnradversuchen zur Verfügung stehen. Sie eignen sich am ehesten für die Ermittlung der Zahnfußtragfähigkeit unterschiedlicher Werkstoffe relativ zueinander.

e) Methoden B_p , C_p , (D_p)

Die zulässige Zahnfußspannung wird aus den Biegeschwell-Festigkeitswerten von ungekerbten, polierten Proben (Wöhlerlinien, Schadenslinien) ermittelt: Dauerfestigkeit $\sigma_{p\lim}$ und Lebensdauerfaktor Y_{Np} . Diese Probenwerte werden mit den (absoluten) Einflußfaktoren für Kerbempfindlichkeit Y_δ , Oberflächenbeschaffenheit Y_R (und dem Einflußfaktor für die Baugröße nach Methode B) auf die Maße des aktuellen Zahnrades umgerechnet.

Für die Methoden C_p , evtl. D_p , gelten die Bemerkungen in Aufzählung d) sinngemäß.

Die Methoden kann man hilfsweise anwenden, wenn weder Festigkeitswerte aus Zahnradversuchen noch von gekerbten Proben zur Verfügung stehen. Im übrigen siehe Aufzählung d).

³⁾ Hierfür gilt die Voraussetzung, daß der Zahnkranz unter dem Zahnfuß ausreichend dick ist, Zahnkranzdicke $s_R \geq 3,5 \cdot m_n$ (siehe Vorbemerkung).

Für F_t muß in jedem Fall (auch bei $\epsilon_{\alpha n} > 2$) die **Gesamt-Umfangskraft** eingeführt werden.

Begründung für die Einführung der Umfangskraft am **Teilzylinder** siehe Abschnitt 3.5.

Definition von F_t und Besonderheiten der Doppel-Schrägverzahnung siehe DIN 3990 Teil 1, Ausgabe 12.87, Abschnitt 3.

2.2.2 Bestimmung der zulässigen Zahnfußspannung σ_{FP} für die Dauerfestigkeit und die statische Festigkeit nach Methoden B, C, (D)

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{F \lim} \cdot Y_{ST} \cdot Y_{NT}}{S_{F \min}} \cdot Y_{\delta \text{ rel T}} \cdot Y_{R \text{ rel T}} \cdot Y_X$$

$$= \frac{\sigma_{FE} \cdot Y_{NT}}{S_{F \min}} \cdot Y_{\delta \text{ rel T}} \cdot Y_{R \text{ rel T}} \cdot Y_X = \frac{\sigma_{FG}}{S_{F \min}} \quad (2.04)$$

Hierin ist

- $\sigma_{F \lim}$ **Dauerfestigkeitswert für Zahnfuß-Biegenennspannung** der Standard-Referenz-Prüfräder (siehe DIN 3990 Teil 5) (berücksichtigt den Einfluß von Werkstoff, Wärmebehandlung und Oberflächenbeschaffenheit bei Prüfradabmessungen)
- σ_{FE} **Dauerfestigkeit** der ungekerbten Probe unter der Annahme, daß der Werkstoff – einschließlich Wärmebehandlung – voll elastisch ist (Zahnfuß-Grundfestigkeit); $\sigma_{FE} = \sigma_{F \lim} \cdot Y_{ST}$
- Y_{ST} **Spannungskorrekturfaktor** für die Abmessungen der Standard-Referenz-Prüfräder (siehe Abschnitt 4.6)
- Y_{NT} **Lebensdauerfaktor für Zahnfußbeanspruchung** für die Abmessungen des Standard-Referenz-Prüfrades (siehe Abschnitt 8) (berücksichtigt die höhere Tragfähigkeit für eine begrenzte Anzahl von Lastwechseln)
- σ_{FG} **Zahnfuß-Grenzfestigkeit** $= \sigma_{FP} \cdot S_{F \min}$
- $S_{F \min}$ **Geforderter Mindest-Sicherheitsfaktor für Zahnfußbeanspruchung** (siehe Abschnitte 1 und 2.3)
- $Y_{\delta \text{ rel T}}$ **Relative Stützziffer** des aktuellen Zahnrades, bezogen auf die Verhältnisse am Standard-Referenz-Prüfrad: $Y_{\delta \text{ rel T}} = Y_{\delta} / Y_{\delta T}$ (siehe Abschnitt 9) (berücksichtigt den Einfluß der Kerbempfindlichkeit des Werkstoffes)
- $Y_{R \text{ rel T}}$ **Relativer Oberflächenfaktor** des aktuellen Zahnrades, bezogen auf die Verhältnisse am Standard-Referenz-Prüfrad: $Y_{R \text{ rel T}} = Y_R / Y_{RT}$ (siehe Abschnitt 10) (berücksichtigt den Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit in der Fußrundung).
- Y_X **Größenfaktor für Zahnfußfestigkeit** (siehe Abschnitt 11) (berücksichtigt den Einfluß der Zahnabmessungen)

a) σ_{FP} für die Dauerfestigkeit

Hierfür gilt Gleichung (2.04) mit $Y_{NT} = 1$ sowie $S_{F \min}$, $Y_{\delta \text{ rel T}}$, $Y_{R \text{ rel T}}$ und Y_X für die Dauerfestigkeit nach Methoden B, C (oder D).

b) σ_{FP} für die statische Festigkeit

Hierfür gilt Gleichung (2.04) mit Y_{NT} , $S_{F \min}$, $Y_{\delta \text{ rel T}}$, $Y_{R \text{ rel T}}$ und Y_X für die statische Festigkeit nach Methoden B, C (oder D).

2.2.3 Bestimmung der zulässigen Zahnfußspannung σ_{FP} für die Zeitfestigkeit nach Methoden B, C, (D)

Man bestimmt σ_{FP} durch grafische oder rechnerische Interpolation zwischen dem Wert für die Dauerfestigkeit nach Unterabschnitt 2.2.2.a) und dem Wert für die statische Festigkeit nach Unterabschnitt 2.2.2.b) für die betreffende Lastwechselzahl N_L aus dem Verlauf der Wöhlerlinie. Siehe hierzu Lebensdauerfaktor, Abschnitt 8.

a) Grafische Bestimmung

Man berechnet σ_{FP} für die Dauerfestigkeit und die statische Festigkeit nach Abschnitt 2.2.2 und zeichnet die Wöhlerlinie entsprechend dem Lebensdauerfaktor Y_{NT} . Prinzip siehe Bild 2.1. Hieraus kann man σ_{FP} für die betreffende Anzahl der Lastwechsel ablesen.

b) Rechnerische Bestimmung

Man berechnet $\sigma_{FP \text{ dauer}}$ für die Dauerfestigkeit und $\sigma_{FP \text{ statisch}}$ für die statische Festigkeit nach Abschnitt 2.2.2 und bestimmt damit σ_{FP} – nach Methode B – für die Lastwechselzahl N_L im Zeitfestigkeitsbereich wie folgt:

$$\sigma_{FP} = \sigma_{FP \text{ dauer}} \cdot Y_N = \sigma_{FP \text{ dauer}} \cdot \left(\frac{3 \cdot 10^6}{N_L} \right)^{\exp} \quad (2.05)$$

- Bau- und Vergütungsstahl, perlitisches oder bainitisches Gußeisen mit Kugelgraphit, perlitischer Temperguß:
Zeitfestigkeitsbereich nach Bild 8.1: $10^4 < N_L \leq 3 \cdot 10^6$

$$\exp = 0,4037 \cdot \log \frac{\sigma_{FP \text{ statisch}}}{\sigma_{FP \text{ dauer}}} \quad (2.06)$$

- Einsatz- oder randschichtgehärteter Stahl; Vergütungsstahl oder Nitrierstahl, gasnitriert; Vergütungs- und Einsatzstahl, nitrokarburiert; ferritisches Gußeisen mit Kugelgraphit; Grauguß:
Zeitfestigkeitsbereich nach Bild 8.1: $10^3 < N_L \leq 3 \cdot 10^6$

$$\exp = 0,2876 \cdot \log \frac{\sigma_{FP \text{ statisch}}}{\sigma_{FP \text{ dauer}}} \quad (2.07)$$

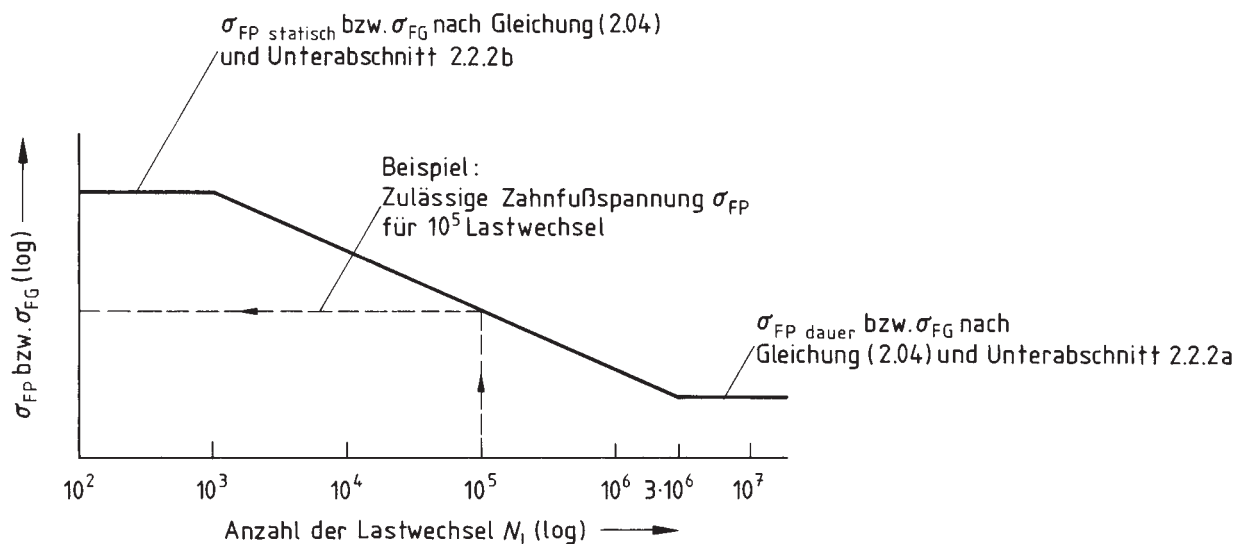


Bild 2.1. Grafische Bestimmung der zulässigen Zahnfußspannung für die Zeitfestigkeit (Prinzip) nach Methoden B, C, (D)

2.2.4 Bestimmung der zulässigen Zahnfußspannung σ_{FP} nach Methoden B_k, C_k, (D_k)

a) σ_{FP} für die statische und die Dauerfestigkeit

Zulässige Zahnfußspannung auf der Basis der an einer **gekerbten** Probe ermittelten Festigkeit

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{k \lim} \cdot Y_{Sk} \cdot Y_{Nk}}{S_{F \min}} \cdot Y_{\delta \text{ rel } k} \cdot Y_{R \text{ rel } k} \cdot Y_X = \frac{\sigma_{FG}}{S_{F \min}} \quad (2.08)$$

Hierin ist

$\sigma_{k \lim}$ **Nenn-Biegeschwell-Dauerfestigkeit** der gekerbten Probe (berücksichtigt den Einfluß von Werkstoff, Wärmebehandlung und Oberflächenbeschaffenheit bei Probenabmessungen). Abweichungen gegenüber den Verhältnissen am Zahnrad bezüglich Spannungsart, Querschnitt, Kraftangriff, Herstellung (zum Beispiel Walzrichtung) sind zu berücksichtigen.

Y_{Sk} **Spannungskorrekturfaktor** für die Probenabmessungen

Y_{Nk} **Lebensdauerfaktor für Zahnfußbeanspruchung**, bezogen auf die Abmessungen der gekerbten Probe (berücksichtigt die höhere Tragfähigkeit für eine begrenzte Anzahl von Lastwechseln)

$Y_{\delta \text{ rel } k}$ **Relative Stützziffer** des aktuellen Zahnrades, bezogen auf die Verhältnisse an der gekerbten Probe: $Y_{\delta \text{ rel } k} = Y_{\delta}/Y_{\delta k}$ (siehe Abschnitt 9) (berücksichtigt den Einfluß der Kerbempfindlichkeit des Werkstoffes)

$Y_{R \text{ rel } k}$ **Relativer Oberflächenfaktor** des aktuellen Zahnrades, bezogen auf die Verhältnisse an der gekerbten Probe: $Y_{R \text{ rel } k} = Y_R/Y_{Rk}$ (siehe Abschnitt 10) (berücksichtigt den Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit in der Fußrundung)

Die übrigen Einflußfaktoren sind bei Gleichung (2.04) erklärt. Die Kennwerte $\sigma_{k \lim}$, Y_{Sk} und Y_{Nk} für gekerbte Proben sind in Versuchen zu ermitteln oder dem Schrifttum zu entnehmen. (Vergleiche Abschnitt 7.2.)

Für $\sigma_{k \lim}$ und sämtliche Einflußfaktoren sind jeweils die Werte für die statische und die Dauerfestigkeit einzusetzen.

Entsprechend den Abschnitten 2.2.2 und 2.2.3 werden die Einflußfaktoren nach der genaueren Methode B_k oder der vereinfachten Methode C_k, (evtl. D_k), bestimmt.

b) σ_{FP} für die Zeitfestigkeit

σ_{FP} wird entsprechend der in Abschnitt 2.2.3 beschriebenen Vorgehensweise ermittelt.

2.2.5 Bestimmung der zulässigen Zahnfußspannung σ_{FP} nach Methode B_p, C_p, (D_p)

a) σ_{FP} für die statische und die Dauerfestigkeit

Zulässige Zahnfußspannung auf der Basis der an einer **ungekerbten, polierten** Probe ermittelten Festigkeit

$$\sigma_{FP} = \frac{\sigma_{p \lim} \cdot Y_{Np}}{S_{F \min}} \cdot Y_{\delta} \cdot Y_R \cdot Y_X = \frac{\sigma_{FG}}{S_{F \min}} \quad (2.09)$$

Hierin ist

$\sigma_{p \lim}$ **Nenn-Biegeschwell-Dauerfestigkeit** der ungekerbten, polierten Probe (berücksichtigt den Einfluß von Werkstoff und Wärmebehandlung bei Probenabmessungen). Abweichungen gegenüber den Verhältnissen am Zahnrad sind entsprechend $\sigma_{k \lim}$ in Abschnitt 2.2.4 zu berücksichtigen.

Y_{Np} **Lebensdauerfaktor für Zahnfußbeanspruchung**, bezogen auf die Abmessungen der ungekerbten, polierten Probe (berücksichtigt die höhere Tragfähigkeit für eine begrenzte Anzahl von Lastwechseln)

Y_{δ} **Stützziffer** des aktuellen Zahnrades, bezogen auf die Verhältnisse an der ungekerbten, polierten Probe (siehe Abschnitt 9) (berücksichtigt den Einfluß der Kerbempfindlichkeit des Werkstoffes)

Y_R **Oberflächenfaktor** des aktuellen Zahnrades, bezogen auf die Verhältnisse an der ungekerbten, polierten Probe (siehe Abschnitt 10) (berücksichtigt den Einfluß der Oberflächenbeschaffenheit in der Fußrundung).

Die übrigen Einflußfaktoren sind bei Gleichung (2.04) und (2.08) erklärt.

Die Kennwerte $\sigma_{p \lim}$ und Y_{Np} für ungekerbte Proben sind in Versuchen zu ermitteln oder dem Schrifttum zu entnehmen. (Vergleiche Abschnitt 7.2.)

Für $\sigma_{p \lim}$ und sämtliche Einflußfaktoren sind jeweils die Werte für die statische und die Dauerfestigkeit einzusetzen.

Entsprechend den Abschnitten 2.2.2 und 2.2.3 werden die Einflußfaktoren nach der genaueren Methode B_p oder der vereinfachten Methode C_p, (eventuell D_p), bestimmt.

b) σ_{FP} für die Zeitfestigkeit

σ_{FP} wird entsprechend der in den Abschnitten 2.2.3 und 2.2.4 beschriebenen Vorgehensweise ermittelt.

2.3 Rechnerischer Sicherheitsfaktor für die Zahnfußbeanspruchung (Zahnbruchsicherheit) S_F

S_F wird **getrennt** für Ritzel und Rad berechnet.

$$S_F = \frac{\sigma_{FG}}{\sigma_F} \geq S_{F \min} \quad (2.10)$$

a) Methode B: Für Dauerfestigkeit und statische Festigkeit σ_{FG} nach Gleichung (2.04) sowie Unterabschnitte 2.2.2. a) und b). Für Zeitfestigkeit σ_{FG} nach Abschnitt 2.2.3, σ_F nach den Gleichungen (2.01) und (2.02).

b) Methoden C, (D): Für Dauerfestigkeit und statische Festigkeit σ_{FG} nach Gleichung (2.04) sowie Unterabschnitte 2.2.2 a) und b). Für Zeitfestigkeit σ_{FG} nach Abschnitt 2.2.3, σ_F nach den Gleichungen (2.01) und (2.03).

c) Methoden B_k, C_k, (D_k): σ_{FG} nach Abschnitt 2.2.4, σ_F siehe Unterabschnitt 2.3 a) oder b).

d) Methoden B_p, C_p, (D_p): σ_{FG} nach Abschnitt 2.2.5, σ_F siehe Unterabschnitt 2.3 a) oder b).

Es ist zulässig, die Zahnfuß-Grenzfestigkeit σ_{FG} (bzw. die zulässige Zahnfußspannung σ_{FP}) und die auftretende Zahnfußspannung σ_F nach unterschiedlichen Methoden zu bestimmen. Dies ist jeweils anzugeben.

Anmerkung: Dies ist die rechnerische Sicherheit hinsichtlich des übertragbaren Momentes.

Hinweise auf Zahlenwerte für den Mindest-Sicherheitsfaktor oder das Schadensrisiko (Schadenswahrscheinlichkeit) siehe DIN 3990 Teil 1, Ausgabe 12.87, Abschnitt 1.2.

3 Formfaktoren Y_F , Y_{Fa} ; Kopffaktor Y_{FS}

Die Formfaktoren Y_F und Y_{Fa} berücksichtigen den Einfluß der Zahnform auf die Biege-Nennspannung. Grundlagen, Annahmen, Anwendung siehe Abschnitt 2.1.1. Y_F gilt für Kraftangriff im äußeren Einzeleingriffspunkt (Methode B), Y_{Fa} für Kraftangriff am Zahnkopf (Methode C).

Als Berechnungsquerschnitt wird für beide Methoden der Abstand zwischen den Berührungspunkten der 30°-Tangenten an die Fußrundungen des Zahnprofils zugrunde gelegt (siehe Bilder 3.2 bis 3.5).

Zur Bestimmung von Y_F und Y_S sowie Y_{FS} , Y_{Fa} und Y_{Sa} geht man von der Nenn-Zahnform mit dem Profilverschiebungsfaktor x aus. Hierfür gelten auch die Bilder 3.8 bis 3.23 sowie 4.1 bis 4.8. Bei fertiggeschnittenen Stirnrädern ist die Schwächung des Zahnes durch die Zahndickenabmaße im allgemeinen vernachlässigbar (siehe DIN 3967). Der Zahnfuß wird auch bei geschliffenen oder geschabten Zahnrädern meist vom Schneidwerkzeug (zum Beispiel Wälzfräser) erzeugt; er entspricht in Form und Maßen dem Erzeugungs-Profilverschiebungsfaktor x_E . Wegen der Schleifzugabe ist in der Regel $x_E > x$. Man rechnet daher bezüglich der Zahnfußbeanspruchung meist auf der „sicheren Seite“.

Wenn das untere Zahndickenabmaß im Zahnfußbereich den Wert $0,05 \cdot m_n$ überschreitet, ist bei der Festigkeitsberechnung statt von der Nenn-Profilverschiebung von der Erzeugungs-Profilverschiebung $x_E \cdot m_n$ nach DIN 3960 auszugehen.

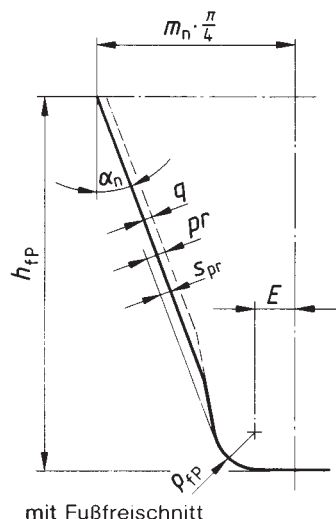
Die hier angegebenen Beziehungen gelten für alle Bezugsprofile (siehe Bild 3.1) mit und ohne Fußfreischnitt, allerdings mit folgenden Einschränkungen:

- Der Berührungspunkt der 30°-Tangenten liegt auf der Zahnfußkurve, die von der Fußrundung des Bezugsprofils erzeugt wird.
- Das Bezugsprofil der Verzahnung besitzt eine endliche Fußrundung ($Q_{fP} > 0$).
- Die Verzahnung wird mit zahnstangenartigem Werkzeug erzeugt.
- Praktisch kann $h_{fP} = h_{aP0}$ und $Q_{fP} = Q_{aP0}$ angenommen werden. h_{aP0} und Q_{aP0} sind Größen des Werkzeug-Bezugsprofils. Einflüsse von Flankenspiel und Schleifzugabe werden nicht berücksichtigt.

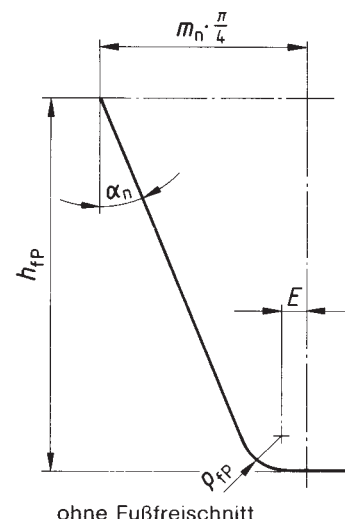
Die Angaben gelten für Gerad- und Schrägverzahnung. Bei Schrägverzahnung werden Y_F , Y_{Fa} und Y_{FS} der Ersatz-Geradverzahnung bestimmt, das heißt für die Ersatzzähnezahl z_n (im Normalschnitt). z_n kann mit Gleichung (3.09) bzw. (3.10) oder (für eine überschlägige Abschätzung) mit dem Diagramm in Bild 3.7 ermittelt werden. Y_F , Y_{Fa} und Y_{FS} sind getrennt für Ritzel und Rad zu bestimmen.

3.1 Zeichen, Benennungen und Einheiten

c_P	Kopfspiegel zwischen Bezugsprofil und Gegenprofil	mm
d_e	Durchmesser für Kraftangriff im äußeren Eingriffspunkt	mm
d_{f2}	Fußkreisdurchmesser des Innenstirnrades	mm
d_{Nf2}	Fuß-Nutkreisdurchmesser des Innenstirnrades	mm
h_{aP}	Kopfhöhe des Bezugsprofils der Verzahnung	mm
h_{aP0}	Kopfhöhe des Werkzeug-Bezugsprofils	mm
h_{fP}	Fußhöhe des Bezugsprofils der Verzahnung	mm
h_{f2}	Zahnfußhöhe des Innenstirnrades	mm



mit Fußfreischnitt



ohne Fußfreischnitt

Bild 3.1. Maße am Bezugsprofil der Verzahnung (im Fertigzustand)

h_{Fa}	Biegehebelarm für Zahnfußbeanspruchung bei Kraftangriff am Zahnkopf ⁴⁾	mm
h_{Fe}	Biegehebelarm für Zahnfußbeanspruchung bei Kraftangriff im äußeren Eingriffspunkt ⁴⁾	mm
h_{Nf2}	Zahnfuß-Nutzhöhe des Innenstirnrades	mm
k	Kopfhöhenänderungsfaktor	–
pr	Protuberanz am Werkzeug	mm
q	Fertigbearbeitungszugabe	mm
s_{pr}	Fußfreischnitt am Bezugsprofil ($s_{pr} = pr - q$)	mm
S_{Fn}	Zahnfußdickensehne im Berechnungsquerschnitt ⁴⁾	mm
z_n	Ersatzzähnezahl	–
F_{bn}	(Nenn-)Zahnnormalkraft normal zur Berührlinie	N
F_{bt}	(Nenn-)Zahnnormalkraft im Stirnschnitt	N
Y_F	Formfaktor für Kraftangriff im äußeren Eingriffspunkt	–
Y_{Fa}	Formfaktor für Kraftangriff am Zahnkopf	–
Y_{FS}	Kopffaktor	–
α_{an}	Profilwinkel am Kopfzylinder der Ersatz-Geradverzahnung	°
α_{en}	Profilwinkel im äußeren Eingriffspunkt der Ersatz-Geradverzahnung	°
α_n	Normaleingriffswinkel	°
α_{Fan}	Kraftangriffswinkel am Kopfzylinder der Ersatz-Geradverzahnung	°
α_{Fen}	Kraftangriffswinkel im äußeren Eingriffspunkt der Ersatz-Geradverzahnung	°
β_a	Schrägungswinkel am Kopfzylinder	°
β_e	Schrägungswinkel im Durchmesser des äußeren Eingriffspunktes	°
ε_{an}	Profilüberdeckung der Ersatz-Geradverzahnung	–
Q_{aP0}	Kopfkanten-Rundungsradius am Werkzeug-Bezugsprofil	mm
Q_{fP}	Fußrundungsradius am Bezugsprofil der Verzahnung	mm
Q_F	Fußrundungsradius am Berührungspunkt der 30°-Tangente	mm

Anmerkung: Index P entspricht dem Bezugsprofil der Verzahnung, Index P0 entspricht dem Bezugsprofil des Werkzeuges.

Anmerkung: Es ist zu beachten, daß elektronische Rechenanlagen bei Winkeln und Winkelfunktionen in der Regel nur mit der Einheit „Radiant-rad“ arbeiten.

⁴⁾ Definiert durch den Berührungspunkt der 30°-Tangenten

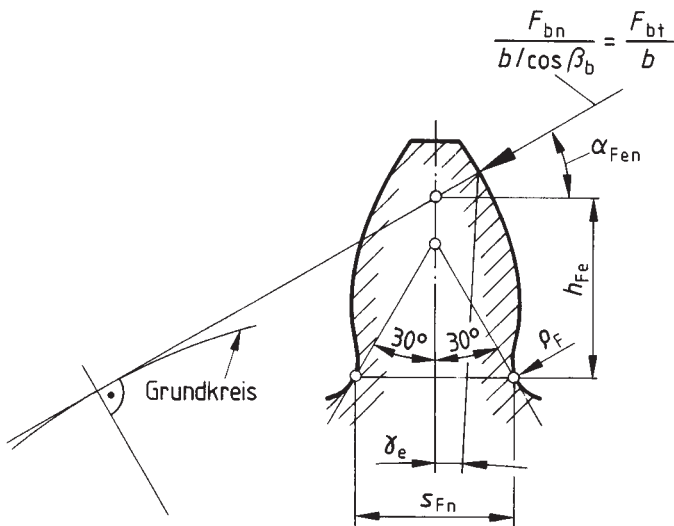
3.2 Berechnung des Formfaktors für Methode B: Y_F 

Bild 3.2. Festlegung des Berechnungsquerschnitts mit der Zahnfußdickensehne s_{Fn} und des Biegehebelarmes h_{Fe} für Kraftangriff im äußeren Einzeleingriffspunkt (Methode B) bei Außenverzahnung.

Mit den Festlegungen nach Bild 3.2 gilt

$$Y_F = \frac{6 \cdot \frac{h_{Fe}}{m_n} \cdot \cos \alpha_{Fen}}{\left(\frac{s_{Fn}}{m_n}\right)^2 \cdot \cos \alpha_n} \quad (3.01)$$

Die für die Berechnung von Y_F benötigten Größen – h_{Fe} , s_{Fn} und α_{Fen} – kann man exakt nur durch iterative Verfahren ermitteln. Das nachstehend beschriebene Gleichungssystem konvergiert nach wenigen Schritten. Es ist nicht sinnvoll, Y_F durch grafische Verfahren zu bestimmen.

3.2.1 Außenverzahnung ⁵⁾

Man ermittelt zunächst die Hilfsgrößen für Gleichung (3.01):

$$d_{en} = 2 \cdot \frac{z}{|z|} \cdot \sqrt{\left[\left(\frac{d_{an}}{2}\right)^2 - \left(\frac{d_{bn}}{2}\right)^2 - \frac{\pi \cdot d \cdot \cos \beta \cdot \cos \alpha_n}{|z|} \cdot (\varepsilon_{an} - 1)\right]^2 + \left(\frac{d_{bn}}{2}\right)^2} \quad (3.16)$$

Bei Außenverzahnungen ist z positiv, bei Innenverzahnungen negativ einzusetzen.

$$\alpha_{en} = \arccos \left(\frac{d_{bn}}{d_{en}} \right) \quad (3.17)$$

$$y_e = \frac{0,5 \cdot \pi + 2 \cdot x \cdot \tan \alpha_n}{z_n} + \text{inv } \alpha_n - \text{inv } \alpha_{en} \quad (3.18)$$

$$\alpha_{Fen} = \alpha_{en} - y_e = \tan \alpha_{en} - \text{inv } \alpha_n - \frac{0,5 \cdot \pi + 2 \cdot x \cdot \tan \alpha_n}{z_n} \quad (3.19)$$

$$\frac{h_{Fe}}{m_n} = \frac{1}{2} \cdot \left[(\cos y_e - \sin y_e \cdot \tan \alpha_{Fen}) \cdot \frac{d_{en}}{m_n} - z_n \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} - \vartheta \right) - \frac{G}{\cos \vartheta} + \frac{Q_{fP}}{m_n} \right] \quad (3.20)$$

$$E = \frac{\pi}{4} \cdot m_n - h_{fP} \cdot \tan \alpha_n + \frac{s_{pr}}{\cos \alpha_n} - (1 - \sin \alpha_n) \cdot \frac{Q_{fP}}{\cos \alpha_n} \quad (3.02)$$

mit s_{pr} nach Bild 3.1.

Für Bezugsprofile ohne Fußfreischnitt ist $s_{pr} = 0$ zu setzen.

$$G = \frac{Q_{fP}}{m_n} - \frac{h_{fP}}{m_n} + x \quad (3.03)$$

$$H = \frac{2}{z_n} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \frac{E}{m_n} \right) - \frac{\pi}{3} \quad (3.04)$$

$$\vartheta = \frac{2G}{z_n} \cdot \tan \vartheta - H \quad (3.05)$$

Für die Lösung der transzendenten Gleichung (3.05) kann als Anfangswert $\vartheta = \pi/6$ eingesetzt werden. Die Gleichung konvergiert meist bereits nach zwei Iterationsschritten.

Zahnfußsehne s_{Fn} :

$$\frac{s_{Fn}}{m_n} = z_n \cdot \sin \left(\frac{\pi}{3} - \vartheta \right) + \sqrt{3} \cdot \left(\frac{G}{\cos \vartheta} - \frac{Q_{fP}}{m_n} \right) \quad (3.06)$$

Fußrundungsradius Q_F (Bild 3.2):

$$\frac{Q_F}{m_n} = \frac{Q_{fP}}{m_n} + \frac{2G^2}{\cos \vartheta \cdot (z_n \cdot \cos^2 \vartheta - 2G)} \quad (3.07)$$

Biegehebelarm h_{Fe} :

$$\beta_b = \arccos \sqrt{1 - (\sin \beta \cdot \cos \alpha_n)^2} \quad (3.08)$$

$$z_n = \frac{z}{\cos^2 \beta_b \cdot \cos \beta} \quad (3.09)$$

$$\text{Näherung: } z_n \approx \frac{z}{\cos^3 \beta} \quad (3.10)$$

$$\varepsilon_{an} = \frac{\varepsilon_a}{\cos^2 \beta_b} \quad (3.11)$$

$$d_n = \frac{d}{\cos^2 \beta_b} = m_n \cdot z_n \quad (3.12)$$

$$p_{bn} = \pi \cdot m_n \cdot \cos \alpha_n \quad (3.13)$$

$$d_{bn} = d_n \cdot \cos \alpha_n \quad (3.14)$$

$$d_{an} = d_n + d_a - d \quad (3.15)$$

⁵⁾ Bei wesentlicher Abrundung bzw. wesentlichem Kopfkantenbruch ist in der Berechnung anstelle vom Kopfkreisdurchmesser d_a vom Kopf-Nutzkreisdurchmesser d_{Na} auszugehen.

3.2.2 Innenverzahnung ⁵⁾

Bei Innenverzahnung wird der Formfaktor Y_F – als Näherung – für eine **Ersatzzahnstange**_p berechnet (siehe Vorbemerkung). Diese Ersatzzahnstange hat die Form des Bezugsprofils im Normalschnitt, dessen Zahnprofil sich aus der Zahnhöhe des Hohlrades ergibt. Der Kraftangriffswinkel $\alpha_{Fe n}$ wird gleich α_n gesetzt (siehe Bild 3.3).

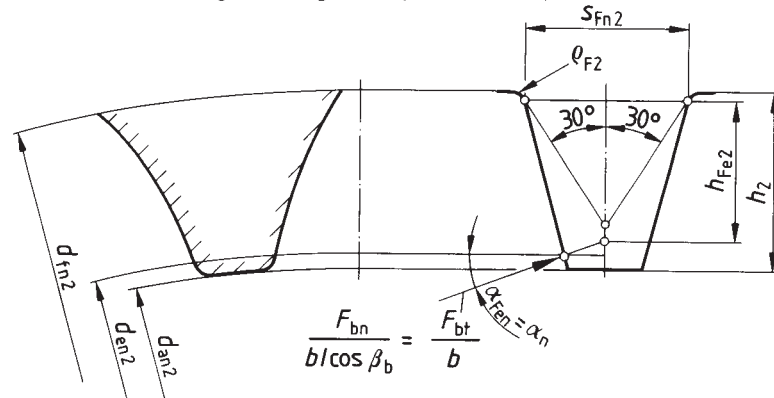


Bild 3.3. Bestimmungsgrößen für den Formfaktor Y_F bei Innenverzahnung (Methode B)

Ermittlung der Größen in Gleichung (3.01):

Zahnfußsehne s_{Fn2} :

$$\frac{s_{Fn2}}{m_n} = 2 \cdot \left[\frac{\pi}{4} + \tan \alpha_n \cdot \frac{h_{fP2} - \varrho_{fP2}}{m_n} + \frac{\varrho_{fP2} - s_{pr}}{m_n \cdot \cos \alpha_n} - \frac{\varrho_{fP2}}{m_n} \cdot \cos \frac{\pi}{6} \right] \quad (3.21)$$

Biegehebelarm h_{Fe2} :

$$\frac{h_{Fe2}}{m_n} = \frac{d_{en2} - d_{fn2}}{2 \cdot m_n} - \left[\frac{\pi}{4} + \left(\frac{h_{fP2}}{m_n} - \frac{d_{en2} - d_{fn2}}{2 \cdot m_n} \right) \cdot \tan \alpha_n \right] \cdot \tan \alpha_n - \frac{\varrho_{fP2}}{m_n} \cdot \left(1 - \sin \frac{\pi}{6} \right) \quad (3.22)$$

d_{en} siehe Gleichung (3.16) mit Index 2, d_{fn} analog d_{an} siehe Gleichung (3.15) mit Index 2,

h_{fP2} = Zahnfußhöhe der Ersatzzahnstange, deren Zahnhöhe gleich der des Innenstirnrades ist, gemessen von der Profilbezugslinie aus (hier Zahndicke gleich Zahnücke). (3.23)

Fußrundungsradius ϱ_{F2} (Bild 3.3):

$$\varrho_{F2} = \frac{\varrho_{fP2}}{2} \quad (3.24)$$

$$\varrho_{fP2} = \frac{c_p}{1 - \sin \alpha_n} \quad (3.25)$$

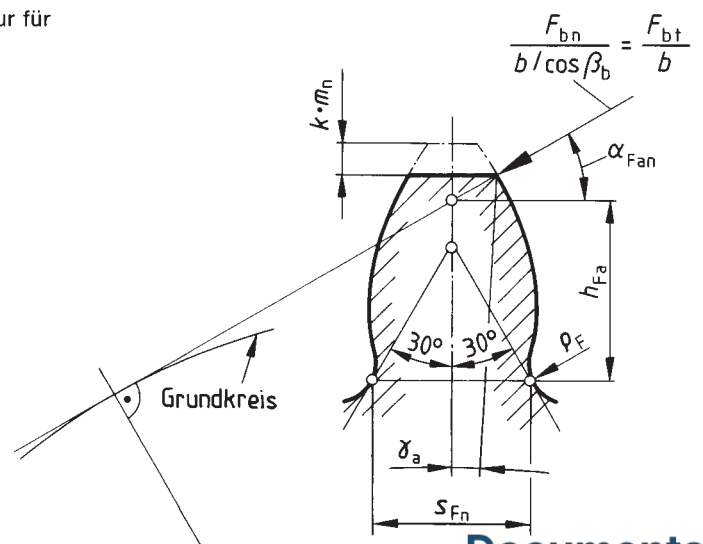
Zur Bestimmung von ϱ_{F2} kann man als Näherung $\varrho_{fP2}/2$ des Bezugsprofils der Verzahnung einsetzen, weil sich bei Herstellung mit dem Schneidrad unter Umständen eine schärfere Fußrundung ergibt. Im Falle einer vollen Fußrundung kann man $\varrho_{F2} = \varrho_{fP2}$ setzen. d_{fn2} ist der erzeugte Fuß-Nutkreisdurchmesser des Hohlrades nach DIN 3993 Teil 1. (Exakte Bestimmung von ϱ_{F2} bei Innenverzahnung siehe DIN 867.)

Vorzeichen beachten, siehe DIN 3990 Teil 1, Ausgabe 12.87, Abschnitt 2.1, Fußnote 3.

3.3 Bestimmung des Formfaktors für Methode C: Y_{Fa}

Y_{Fa} wird nur im Zusammenhang mit Y_e benutzt, gilt also nur für Verzahnungen mit $\varepsilon_{\alpha n} < 2$.

Bild 3.4. Festlegung des Berechnungsquerschnittes mit der Zahnfußdickensehne s_{Fn} und des Biegehebelarmes h_{Fa} für Kraftangriff am Zahnkopf (Methode C) bei Außenverzahnung.



⁵⁾ Siehe Seite 8

Mit der Festlegung nach Bild 3.4 gilt

$$Y_{Fa} = \frac{6 \cdot \frac{h_{Fa}}{m_n} \cdot \cos \alpha_{Fan}}{\left(\frac{s_{Fn}}{m_n} \right)^2 \cdot \cos \alpha_n} \quad (3.26)$$

Die für die Berechnung von Y_{Fa} benötigten Größen kann man mit Hilfe des unter Abschnitt 3.2 erläuterten iterativen Verfahrens ermitteln.

3.3.1 Außenverzahnung

a) Grafische Bestimmung

Der Faktor Y_{Fa} kann für eine Reihe von üblichen Bezugsprofilen abhängig von der Ersatzzähnezahl z_n und dem Profilverschiebungsfaktor x den Bildern 3.8 bis 3.15 entnommen werden. Die Diagramme wurden mit den Gleichungen in Aufzählung b) berechnet. Die Bilder 3.8 bis 3.15 gelten für Zahnräder **ohne Kopfkürzung und ohne Kopfkantenbruch**. Bei Zahnrädern mit Kopfkürzung oder Kopfkantenbruch ist der tatsächliche Biegehebelarm h_{Fa} geringfügig kleiner. Die Berechnung liegt also auf der sicheren Seite, siehe Bild 3.4.

Grafische Ermittlung von z_n siehe Bild 3.7.

b) Rechnerische Bestimmung

Ermittlung der Größen in Gleichung (3.26):

Zahnfußsehne s_{Fn} nach Gleichung (3.06) mit (3.02) bis (3.05)

Fußrundungsradius ϱ_F nach Gleichung (3.07) mit (3.02) bis (3.05).

Biegehebelarm h_{Fa} :

$$\alpha_{an} = \arccos \left(\frac{d_{bn}}{d_{an}} \right) = \arccos \left[\frac{\cos \alpha_n}{1 + \frac{(d_a - d)}{m_n \cdot z_n}} \right] \quad (3.27)$$

$$y_a = \frac{0,5 \cdot \pi + 2 \cdot x \cdot \tan \alpha_n}{z_n} + \operatorname{inv} \alpha_n - \operatorname{inv} \alpha_{an} \quad (3.28)$$

$$\alpha_{Fan} = \alpha_{an} - y_a = \tan \alpha_{an} - \operatorname{inv} \alpha_n - \frac{0,5 \pi + 2 x \tan \alpha_n}{z_n} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} \frac{h_{Fa}}{m_n} &= \frac{1}{2} \cdot \left[(\cos y_a - \sin y_a \cdot \tan \alpha_{Fan}) \cdot \frac{d_{an}}{m_n} - z_n \cdot \cos \left(\frac{\pi}{3} - \vartheta \right) - \frac{G}{\cos \vartheta} + \frac{\varrho_{fp}}{m_n} \right] \\ &= 0,5 \cdot z_n \left[\frac{\cos \alpha_n}{\cos \alpha_{Fan}} - \cos \left(\frac{\pi}{3} - \vartheta \right) \right] + 0,5 \left(\frac{\varrho_{fp}}{m_n} - \frac{G}{\cos \vartheta} \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

z_n Ersatzzähnezahl siehe Gleichungen (3.09) und (3.10)

G siehe Gleichung (3.03)

ϑ siehe Gleichung (3.05)

d_{an} siehe Gleichung (3.15)

d_{bn} siehe Gleichung (3.14)

d_n siehe Gleichung (3.12)

3.3.2 Innenverzahnung

Bei Innenverzahnung wird der Formfaktor Y_{Fa} – als Näherung – für eine **Ersatzzahnstange** berechnet. Diese Ersatzzahnstange hat die Form des Bezugsprofils im Normalschnitt, dessen Zahnprofil sich aus der Zahnhöhe und der Profilverschiebung des Hohlrades ergibt. Der Kraftangriffswinkel am Zahnkopf α_{Fan} wird gleich α_n gesetzt, siehe Bild 3.5.

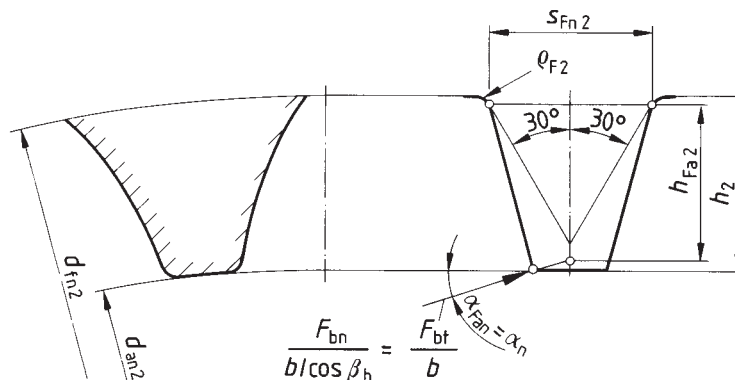


Bild 3.5. Bestimmungsgrößen für den Formfaktor Y_{Fa} bei Innenverzahnung (Methode C)

a) Grafische Bestimmung

Der Faktor Y_{Fa} kann für eine Reihe von üblichen Bezugsprofilen den Bildern 3.8 bis 3.15 entnommen werden. Entsprechend den Angaben zu Gleichung (3.25) gilt der für $z_n = \infty$ angegebene Wert für Innenverzahnungen mit voller Fußrundung. Der für die schärfere Fußrundung gültige Wert für Y_{Fa} ist unter den Bildern angegeben. Die Zahlenwerte wurden mit den Gleichungen in Aufzählung b) für (ungekürzte) Zähne mit der Höhe des Bezugsprofils berechnet. Siehe Hinweis in Unterabschnitt 3.3.1a).

b) Rechnerische Bestimmung

Ermittlung der Größen in Gleichung (3.26):

Zahnfußsehne s_{Fn2} nach Gleichung (3.21).

Biegehebelarm h_{Fa2} :

$$\frac{h_{Fa2}}{m_n} = \frac{d_{an2} - d_{fn2}}{2 \cdot m_n} - \left[\frac{\pi}{4} + \left(\frac{h_{fP2}}{m_n} - \frac{d_{an2} - d_{fn2}}{2 \cdot m_n} \right) \cdot \tan \alpha_n \right] \cdot \tan \alpha_n - \frac{q_{fP2}}{m_n} \cdot \left(1 - \sin \frac{\pi}{6} \right) \quad (3.31)$$

q_{fP2} siehe Gleichung (3.25) und Angaben hierzu.

Fußbrunradius q_{F2} nach Gleichung (3.24).

Vorzeichen beachten, siehe DIN 3990 Teil 1, Ausgabe 12.87, Abschnitt 2.1, Fußnote 3.

3.4 Grafische Bestimmung des Kopffaktors Y_{FS} (Methode C)

Der Kopffaktor ist das Produkt aus Formfaktor Y_{Fa} und Spannungskorrekturfaktor für Kraftangriff am Zahnkopf Y_{Sa} .

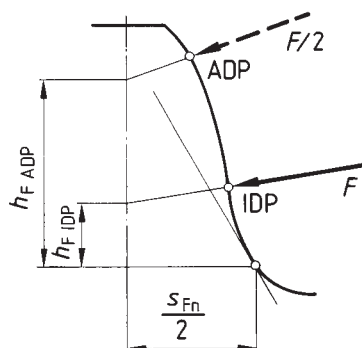
$$Y_{FS} = Y_{Fa} \cdot Y_{Sa} \quad (3.32)$$

Da Y_{Fa} nach Gleichung (3.26) und Y_{Sa} nach Gleichung (4.04) außer von z_n und x nur von den Bestimmungsgrößen eines Bezugsprofils abhängen, kann Y_{FS} für jedes Bezugsprofil in Abhängigkeit von der Zähnezahl im Normalschnitt und der Profilverhiebung bestimmt werden. Für eine Reihe von üblichen Bezugsprofilen kann Y_{FS} abhängig von der Ersatzzähnezahl z_n und dem Profilverhiebungsfaktor x den Bildern 3.16 bis 3.23 entnommen werden. – Für Innenverzahnungen gelten die Hinweise in Unterabschnitt 3.3.2a).

Die Bilder gelten – ebenso wie Bilder 3.8 bis 3.15 und Bilder 4.1 bis 4.8 – für Zahnräder ohne Kopfkürzung und ohne Kopfkantenbruch. Erläuterung hierzu siehe Unterabschnitt 3.3.1a).

Wie aus Gleichung (2.03) hervorgeht, ist Y_{FS} die örtliche Spannung für $F_t = 1 \text{ N}$, $b = 1 \text{ mm}$ und $m_n = 1 \text{ mm}$ bei Kraftangriff am Zahnkopf.

Derartige Diagramme eignen sich für eine schnelle Spannungsberechnung. In dieser Norm wird zusätzlich die getrennte Darstellung von Y_{Fa} und Y_{Sa} beibehalten, da der



Spannungskorrekturfaktor Y_{Sa} auch benötigt wird, um die Stützziffer Y_δ (siehe Abschnitt 9) zu ermitteln.

3.5 Ableitungen der maßgebenden Zahnnormalkraft (für Geradverzahnung)

$$\text{Biege-Nennspannung} = \frac{\text{Biegemoment}}{\text{Biege widerstandsmoment}}$$

Mit den Festlegungen analog Bild 3.4 ist

$$\sigma = \frac{F_b \cdot \cos \alpha_{Fa}}{\frac{1}{6} \cdot (b \cdot s_F^2)} \cdot h_{Fa}$$

$$F_b \cdot d_b/2 = F_t \cdot d/2 = F_w \cdot d_w/2$$

mit

d_b Grundkreisdurchmesser

d Teilkreisdurchmesser

d_w Wälzkreisdurchmesser

F_t Nenn-Umfangskraft am Teilkreis

F_w Nenn-Umfangskraft am Wälzkreis

$$F_b = F_t / \cos \alpha = F_w / \cos \alpha_w$$

$$\sigma = \frac{h_{Fa}/m \cdot \cos \alpha_{Fa}}{\frac{1}{6} \cdot (s_F/m)^2 \cdot \cos \alpha} \cdot \frac{F_t}{b \cdot m} = \frac{F_t}{b \cdot m} \cdot Y_{Fa}$$

mit

α Eingriffswinkel am Teilkreis (= Flankenwinkel des Bezugsprofils)

α_w Eingriffswinkel am Wälzkreis (Betriebsingriffswinkel)

Wenn σ als Funktion von F_t ausgedrückt wird, ergibt sich ein Formfaktor Y_{Fa} , der vom Gegenrad unabhängig ist und für jedes Bezugsprofil tabelliert werden kann. (Bei Schrägverzahnung wird mit der Ersatz-Geradverzahnung im Normalschnitt – bei gleicher Breite und Umfangskraft – gerechnet.)

Eine andere Darstellung wäre:

$$\sigma = \frac{h_{Fa}/m \cdot \cos \alpha_{Fa}}{\frac{1}{6} \cdot (s_F/m)^2 \cdot \cos \alpha_w} \cdot \frac{F_w}{b \cdot m} = \frac{F_w}{b \cdot m} \cdot Y_{Fw}$$

Diese letztere Darstellung wurde nicht gewählt, weil hier entweder Y_{Fw} oder bei Verwendung von Y_{Fa} die Biege-Nennspannung vom Betriebsingriffswinkel α_w und damit vom Gegenrad abhängig ist.

3.6 Formfaktor Y_F und Spannungskorrekturfaktor Y_S nach Methode B für Hochverzahnungen

Bei genauen Verzahnungen mit $2 \leq \varepsilon_{\alpha n} < 3$ wird die Gesamt-Zahnkraft durch Doppel- oder Dreifacheingriff übertragen. Der Berechnung wird dann (statt des äußeren Einzeleingriffspunktes AEP für $\varepsilon_{\alpha n} < 2$ bzw. des äußeren Doppeleingriffspunktes ADP für $2 \leq \varepsilon_{\alpha n} < 3$) ein innerer Doppeleingriffspunkt IDP (siehe Bild 3.6) zugrundegelegt. Hierfür gelten die Gleichungen nach den Abschnitten 3.2, 3.3, 4.2 und 4.3 unverändert. Dabei rechnet man jedoch mit der Gesamt-Umfangskraft F_t , was zu etwas größeren Spannungswerten führt, die somit auf der sicheren Seite liegen.

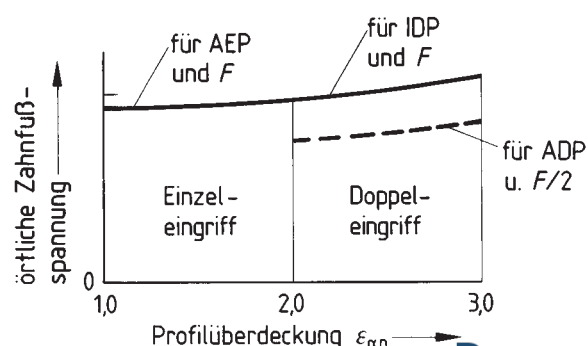


Bild 3.6. Maßgeblicher Kraftangriffspunkt für die Berechnung des Formfaktors Y_F und des Spannungskorrekturfaktors Y_S in Abhängigkeit von $\varepsilon_{\alpha n}$

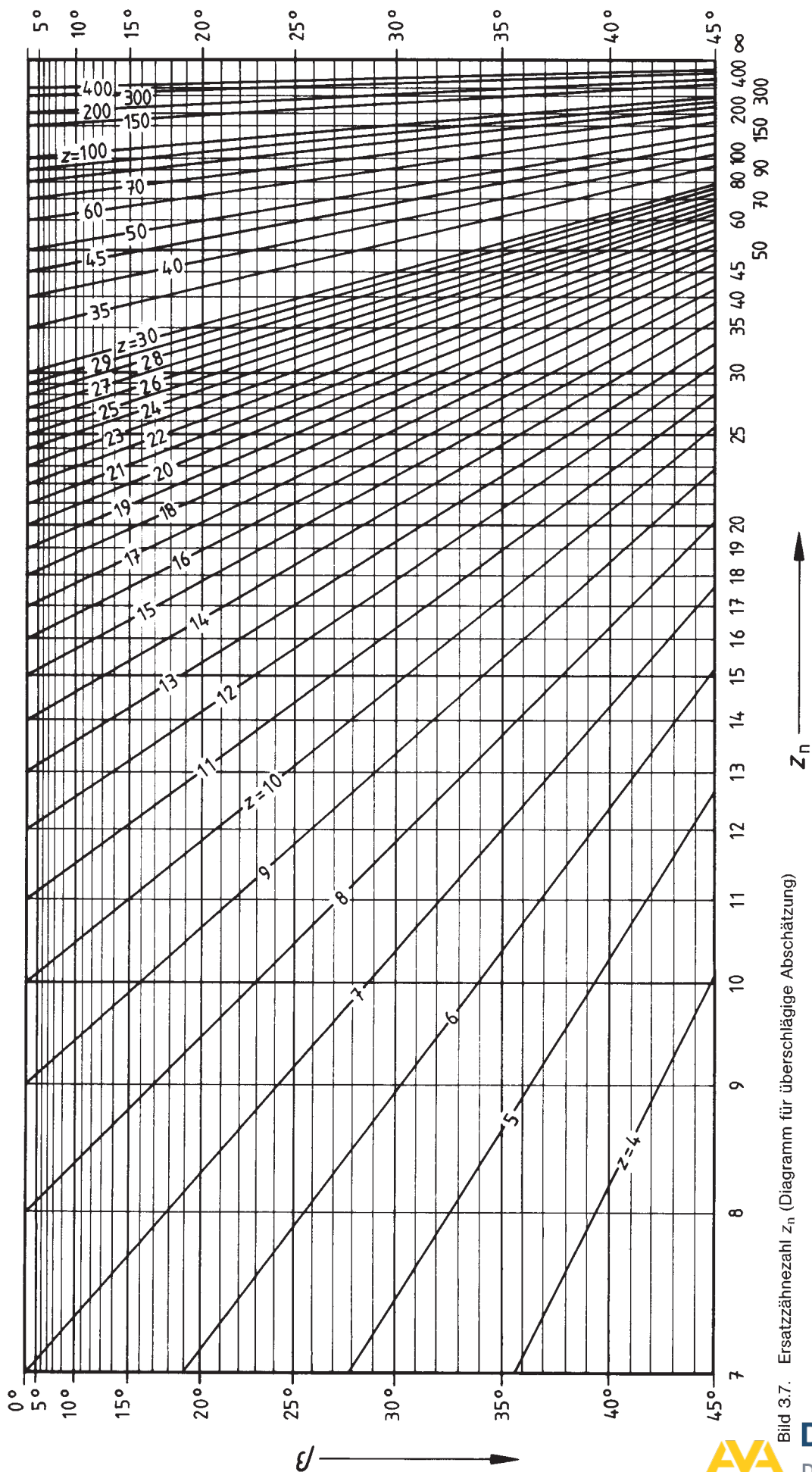
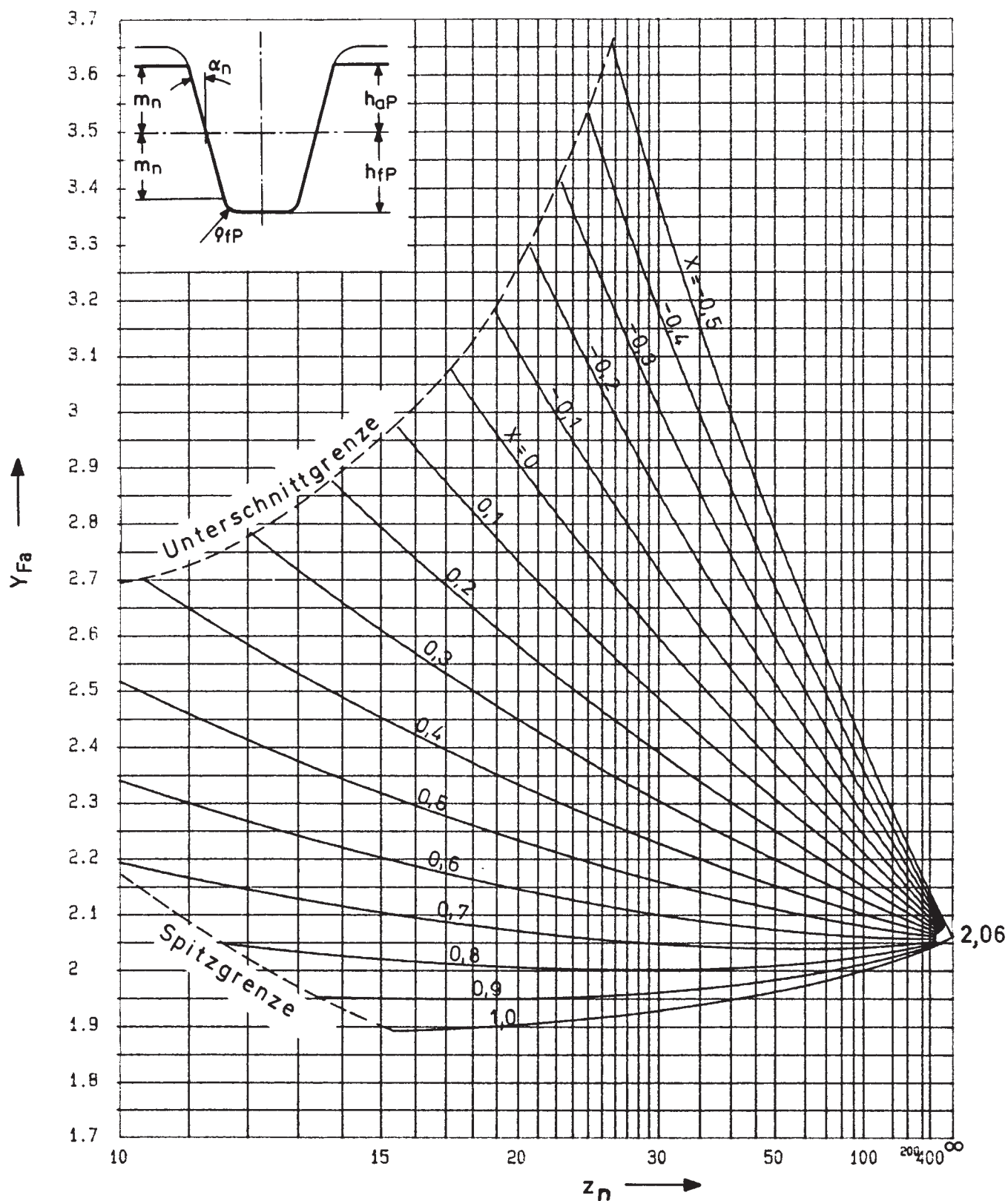


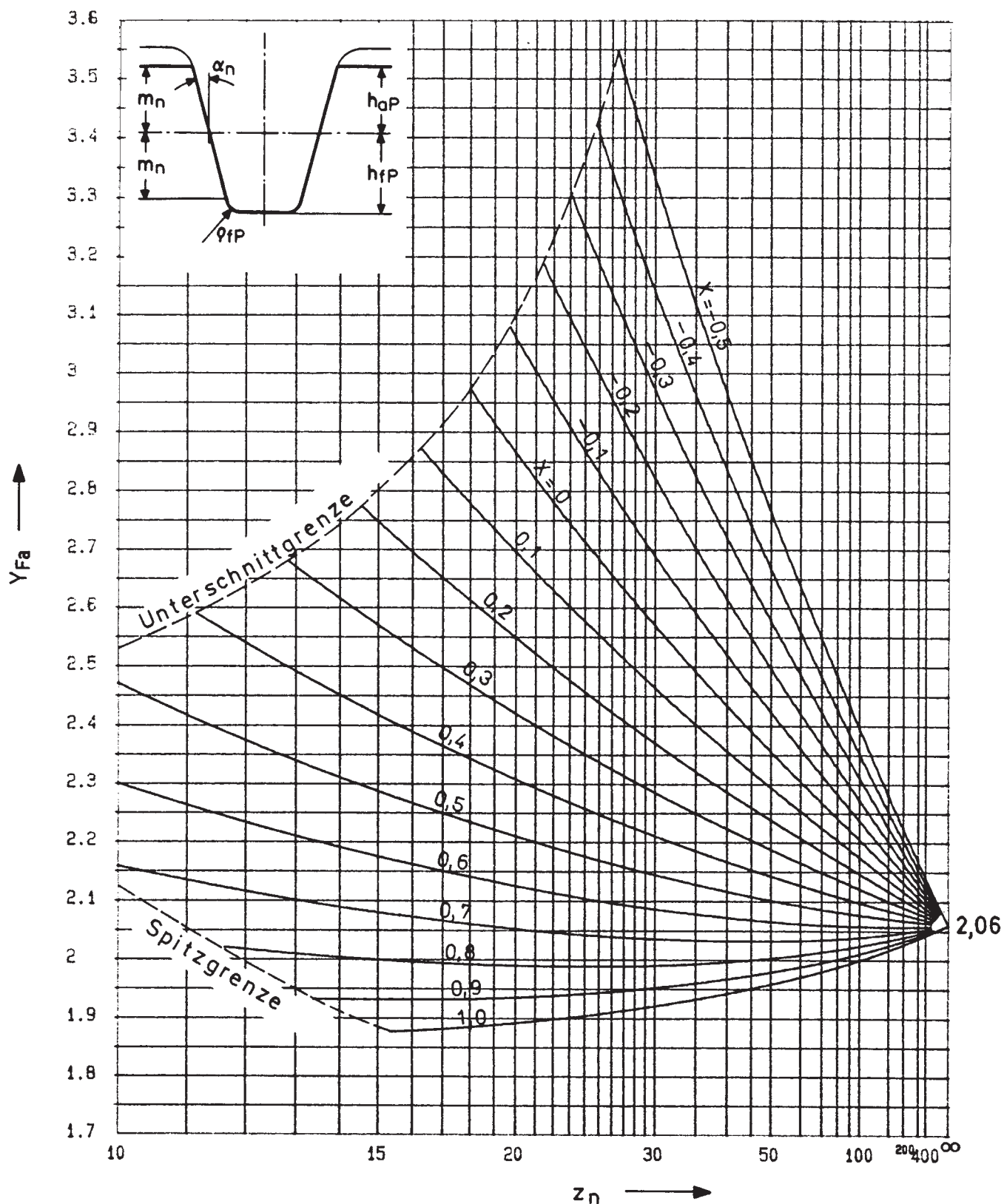
Bild 3.7. Ersatzzähnezahl z_n (Diagramm für überschlägige Abschätzung)



Für Innenverzahnung mit $q_F = q_{fP}/2$ (Normalfall) und Zahnhöhe $h = h_{fP} + h_{aP}$ gilt: $Y_{Fa} = 2,058$; bei voller Fußrundung $Y_{Fa} = Y_{Fa\infty}$

Bild 3.8. Formfaktor Y_{Fa} für Außenverzahnung mit Bezugsprofil

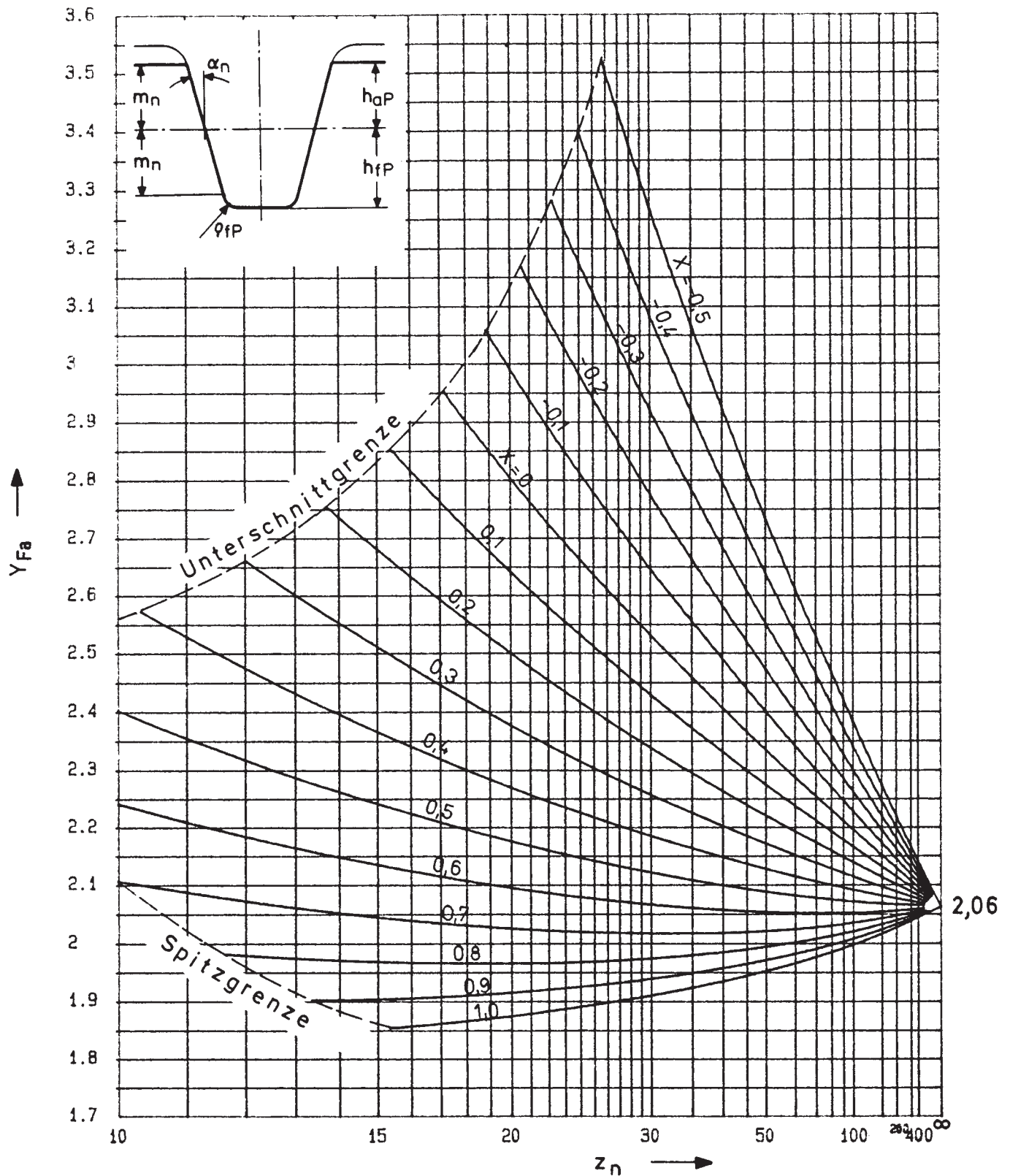
$\alpha_n = 20^\circ$; $h_{aP}/m_n = 1,0$; $h_{fP}/m_n = 1,25$; $q_{fP}/m_n = 0,25$



Für Innenverzahnung mit $q_F = q_{fP}/2$ (Normalfall) und Zahnhöhe $h = h_{fP} + h_{aP}$ gilt: $Y_{Fa} = 2,061$; bei voller Fußbrundung $Y_{Fa} = Y_{Fa\infty}$

Bild 3.9. Formfaktor Y_{Fa} für Außenverzahnung mit Bezugsprofil

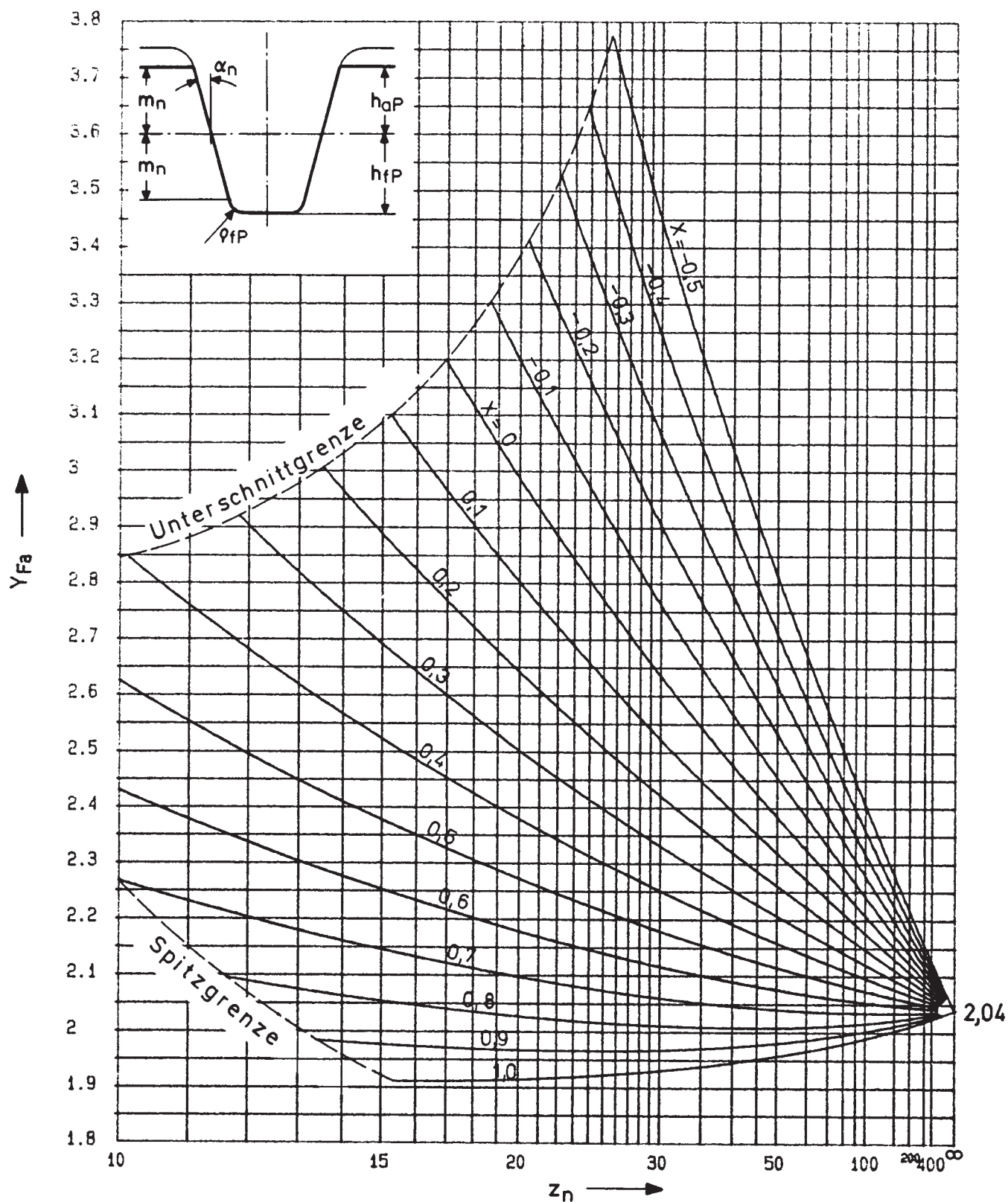
$\alpha_n = 20^\circ$; $h_{aP}/m_n = 1,0$; $h_{fP}/m_n = 1,25$; $q_{fP}/m_n = 0,3$



Für Innenverzahnung mit $\rho_F = \rho_{fP}/2$ (Normalfall) und Zahnhöhe $h = h_{fP} + h_{aP}$ gilt: $Y_{Fa} = 2,065$; bei voller Fußrundung $Y_{Fa} = Y_{Fa\infty}$

Bild 3.10. Formfaktor Y_{Fa} für Außenverzahnung mit Bezugsprofil

$\alpha_n = 20^\circ$; $h_{aP}/m_n = 1,0$; $h_{fP}/m_n = 1,25$; $\rho_{fP}/m_n = 0,375$



Für Innenverzahnung mit $Q_F = Q_{fP}/2$ (Normalfall) und Zahnhöhe $h = h_{fP} + h_{aP}$ gilt: $Y_{Fa} = 2,039$; bei voller Fußrundung $Y_{Fa} = Y_{Fa\infty}$

Bild 3.11. Formfaktor Y_{Fa} für Außenverzahnung mit Bezugsprofil
 $\alpha_n = 20^\circ$; $h_{aP}/m_n = 1,0$; $h_{fP}/m_n = 1,35$; $Q_{fP}/m_n = 0,3$