

# Tragfähigkeitsberechnung von Kegelrädern ohne Achsversetzung

## Berechnung der Grübchentragfähigkeit

**DIN**  
**3991**  
Teil 2

Calculation of load capacity of bevel gears without pinion offset; calculation of pitting resistance

Anwendungsbereich der vorliegenden Norm siehe DIN 3991 Teil 1, Ausgabe September 1988, Abschnitt 1.

Zur Beurteilung der Grübchentragfähigkeit dient die Hertzsche Pressung (siehe DIN 3990 Teil 2).

Im Gegensatz zu Stirnrädern, bei denen meist Linienberührung vorliegt, sind Kegelräder in der Regel breitenballig ausgeführt, d. h. die Zahnflanken sind allseitig gekrümmte Flächen. Bei Belastung der Zahnflanken bilden sich quasielliptische Druckflächen. Diese Tatsache wird bei der Ermittlung des Faktors  $K_{H\beta}$  dadurch berücksichtigt, daß die Rechteckdruckfläche (bei Linienberührung) durch eine einbeschriebene Druckellipse (bei Punktberührung) ersetzt wird. Die gegenüber den Stirnrädern abweichenden Verhältnisse bei Kegelrädern bezüglich der Berührungsart werden also durch den Breitenfaktor berücksichtigt. Die allgemeinen Berechnungsgleichungen für die Hertzsche Pressung sind damit für Stirn- und Kegelräder identisch. Für die Berechnung der Kegelräder werden die Ersatzstirnräder zugrunde gelegt (siehe DIN 3991 Teil 1, Ausgabe September 1988, Anhang A).

Weitere Hinweise zur Grübchentragfähigkeit siehe DIN 3990 Teil 2.

Allgemeine Gesichtspunkte, die bei der Wahl des Sicherheitsfaktors zu beachten sind, siehe DIN 3991 Teil 1, Ausgabe September 1988, Abschnitt 1.2. Weitere Erläuterungen zum Sicherheitsfaktor gegen Grübchenbildung siehe DIN 3990 Teil 2.

Erläuterungen siehe DIN 3991 Teil 1.

### Inhalt

|                                                                                      | Seite    |                                                                              | Seite    |
|--------------------------------------------------------------------------------------|----------|------------------------------------------------------------------------------|----------|
| <b>1 Zeichen, Benennungen und Einheiten</b>                                          | <b>1</b> | <b>4 Elastizitätsfaktor <math>Z_E</math></b>                                 | <b>3</b> |
| <b>2 Grundgleichungen</b>                                                            | <b>2</b> | <b>5 Überdeckungsfaktor (Flanke) <math>Z_e</math></b>                        | <b>4</b> |
| 2.1 Auftretende Flankenpressung                                                      | 2        | <b>6 Schrägenfaktor (Flanke) <math>Z_\beta</math></b>                        | <b>5</b> |
| 2.2 Zulässige Flankenpressung (für Dauergetriebe)                                    | 3        | <b>7 Größenfaktor (Flanke) <math>Z_X</math></b>                              | <b>5</b> |
| 2.3 Rechnerischer Sicherheitsfaktor für Flankenpressung (gegen Grübchenbildung)      | 3        | <b>8 Dauerfestigkeit für Flankenpressung <math>\sigma_{H\lim}</math></b>     | <b>7</b> |
| 2.4 Vereinfachte Berechnung (Hinweis)                                                | 3        | <b>9 Einflußgrößen auf die Schmierfilmbildung <math>Z_L, Z_v, Z_R</math></b> | <b>7</b> |
| <b>3 Zonenfaktor <math>Z_H</math>, Einzeleingriffsfaktoren <math>Z_B, Z_D</math></b> | <b>3</b> | 9.1 Methode B, Faktoren $Z_L, Z_v, Z_R$                                      | 7        |
| 3.1 Zonenfaktor $Z_H$                                                                | 3        | 9.2 Methode C, Produkt $Z_L \cdot Z_v \cdot Z_R$                             | 9        |
| 3.2 Ritzel-Einzeleingriffsfaktor $Z_B$                                               | 3        |                                                                              |          |
| 3.3 Rad-Einzeleingriffsfaktor $Z_D$                                                  | 3        |                                                                              |          |

### 1 Zeichen, Benennungen und Einheiten

|          |                                                      |    |               |                                                                                |                   |
|----------|------------------------------------------------------|----|---------------|--------------------------------------------------------------------------------|-------------------|
| $a_v$    | Virtueller Achsabstand der Ersatz-Stirnradverzahnung | mm | $u_v$         | Zähnezahlverhältnis der Ersatz-Stirnradverzahnung                              | —                 |
| $b$      | Zahnbreite                                           | mm | $v_{mt}$      | Umfangsgeschwindigkeit am Teilkegel in Mitte Zahnbreite                        | m/s               |
| $b_{eH}$ | Effektive Zahnbreite bezüglich Flankenbeanspruchung  | mm | $z_v$         | Zähnezahl der Ersatz-Stirnradverzahnung                                        | —                 |
| $d_m$    | Mittlerer Teilkreisdurchmesser                       | mm | $E$           | Elastizitätsmodul                                                              | N/mm <sup>2</sup> |
| $d_v$    | Teilkreisdurchmesser der Ersatz-Stirnradverzahnung   | mm | $F_{mt}$      | Nenn-Umfangskraft am Teilkegel in Mitte Zahnbreite                             | N                 |
| $d_{va}$ | Kopfkreisdurchmesser der Ersatz-Stirnradverzahnung   | mm | $K_v$         | Dynamikfaktor                                                                  | —                 |
| $d_{vb}$ | Grundkreisdurchmesser der Ersatz-Stirnradverzahnung  | mm | $K_A$         | Anwendungsfaktor                                                               | —                 |
| $m_{mn}$ | Normalmodul in Mitte Zahnbreite                      | mm | $K_{H\alpha}$ | Stirnfaktor (Flanke); berücksichtigt die Kraftaufteilung auf mehrere Zähne     | —                 |
| $u$      | Zähnezahlverhältnis der Kegelradverzahnung           | —  | $K_{H\beta}$  | Breitenfaktor (Flanke); berücksichtigt die Kraftverteilung über die Zahnbreite | —                 |
|          |                                                      |    | $R_a$         | Arithmetischer Mittenrauhwert nach DIN 4768 Teil 1                             | $\mu\text{m}$     |

Fortsetzung Seite 2 bis 9

Normenausschuß Antriebstechnik (NAN) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V.

|                      |                                                                                                                   |                        |
|----------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| $R_z$                | Gemittelte Rauhtiefe nach DIN 4768 Teil 1                                                                         | $\mu\text{m}$          |
| $R_{z\ 100}$         | Mittlere relative Rauhtiefe für Zahnradpaare mit Achsabstand $a = 100\text{ mm}$                                  | $\mu\text{m}$          |
| $S_H$                | Sicherheitsfaktor für Flankenpressung (gegen Grübchenbildung)                                                     | —                      |
| $Z_v$                | Geschwindigkeitsfaktor                                                                                            | —                      |
| $Z_{B,D}$            | Einzeleingriffsfaktor (Ritzel/Rad)                                                                                | —                      |
| $Z_E$                | Elastizitätsfaktor                                                                                                | $\sqrt{N/\text{mm}^2}$ |
| $Z_H$                | Zonenfaktor                                                                                                       | —                      |
| $Z_K$                | Kegelradfaktor (Flanke)                                                                                           | —                      |
| $Z_L$                | Schmierstofffaktor                                                                                                | —                      |
| $Z_R$                | Rauheitsfaktor für Grübchentragsfähigkeit                                                                         | —                      |
| $Z_X$                | Größenfaktor für (Flanke)                                                                                         | —                      |
| $Z_\beta$            | Schrägenfaktor (Flanke)                                                                                           | —                      |
| $Z_\epsilon$         | Überdeckungsfaktor (Flanke)                                                                                       | —                      |
| $\alpha_n$           | Normaleingriffswinkel                                                                                             | °                      |
| $\alpha_t$           | Stirneingriffswinkel                                                                                              | °                      |
| $\alpha_{vt}$        | Stirneingriffswinkel der Ersatz-Stirnradverzahnung                                                                | °                      |
| $\alpha_{wt}$        | Betriebseingriffswinkel der Ersatz-Stirnradverzahnung; $\alpha_{wt} = \alpha_t$ für Null- und V-Null-Verzahnungen | °                      |
| $\beta_m$            | Schrägungswinkel am Teilkegel in Mitte Zahnbreite                                                                 | °                      |
| $\beta_{vb}$         | Schrägungswinkel am Grundkreis der Ersatz-Stirnradverzahnung                                                      | °                      |
| $\delta$             | Teilkegelwinkel                                                                                                   | °                      |
| $\epsilon_{v\alpha}$ | Profilüberdeckung der Ersatz-Stirnradverzahnung                                                                   | —                      |
| $\epsilon_{v\beta}$  | Sprungüberdeckung der Ersatz-Stirnradverzahnung                                                                   | —                      |
| $\nu$                | Poisson-Konstante                                                                                                 | —                      |
| $\nu_{40}, \nu_{50}$ | Kinematische Viskosität des Öles bei 40, 50 °C                                                                    | $\text{mm}^2/\text{s}$ |
| $\varrho$            | Krümmungsradius                                                                                                   | $\text{mm}$            |
| $\sigma_H$           | Flankenpressung                                                                                                   | $\text{N}/\text{mm}^2$ |
| $\sigma_{H\ lim}$    | Dauerfestigkeitswert für Flankenpressung                                                                          | $\text{N}/\text{mm}^2$ |
| $\sigma_{HG}$        | Grübchen-Grenzfestigkeit                                                                                          | $\text{N}/\text{mm}^2$ |
| $\sigma_{HP}$        | Zulässige Flankenpressung                                                                                         | $\text{N}/\text{mm}^2$ |
| $\sigma_{H0}$        | Nennwert der Flankenpressung                                                                                      | $\text{N}/\text{mm}^2$ |
| $\Sigma$             | Achsenwinkel                                                                                                      | °                      |

## 2 Grundgleichungen

Die Berechnung der Grübchentragsfähigkeit basiert auf der Flankenpressung  $\sigma_H$  im Wälzpunkt oder im inneren Einzeleingriffspunkt der Ersatz-Stirnradverzahnung. Maßgebend ist die größere der beiden Pressungen.  $\sigma_H$  und die zulässige Flankenpressung  $\sigma_{HP}$  werden getrennt für Ritzel und Rad berechnet.  $\sigma_H$  muß kleiner sein als  $\sigma_{HP}$ . — Bei der Berechnung von  $\sigma_H$  werden drei Bereiche unterschieden:

### ● Geradverzahnung

**Ritzel:** Hierfür wird im allgemeinen  $\sigma_H$  im inneren Einzeleingriffspunkt B des Ritzels berechnet. Dabei ist der Faktor  $Z_B > 1$ , siehe Gleichung (2.01). In Sonderfällen ist  $\sigma_H$  im Wälzpunkt größer und damit maßgebend. Dabei ist  $Z_B \leq 1$  und wird in der Berechnung  $= 1$  gesetzt.

**Rad:** Hierfür wird im allgemeinen  $\sigma_H$  im Wälzpunkt berechnet. Dabei ist der Faktor  $Z_D \leq 1$  und wird in der Berechnung  $= 1$  gesetzt, siehe Gleichung (2.04). In Sonderfällen — insbesondere bei kleinen Übersetzungen (siehe Abschnitt 3.3) — ist  $\sigma_H$  im inneren Einzeleingriffs-

punkt D des Rades größer und damit maßgebend. Dabei ist der Faktor  $Z_D > 1$ .

### ● Schräg- oder Bogenverzahnung mit Sprungüberdeckung $\epsilon_{v\beta} \geq 1$

Für **Ritzel und Rad** wird hierbei  $\sigma_H$  im Wälzpunkt berechnet.

### ● Schräg- oder Bogenverzahnung mit Sprungüberdeckung $\epsilon_{v\beta} < 1$

Hierbei wird  $\sigma_H$  zwischen den beiden Grenzwerten, nämlich  $\sigma_H$  für Geradverzahnung und  $\sigma_H$  für Schräg- oder Bogenverzahnung mit  $\epsilon_{v\beta} \geq 1$  linear interpoliert. Für die Grenzwerte wird dieselbe Stirnschnitt-Ersatzverzahnung wie bei dem aktuellen Radpaar zugrunde gelegt.

## 2.1 Auftretende Flankenpressung

### 2.1.1 Flankenpressung bei Geradverzahnung

Maßgebend ist der größere Wert der Flankenpressung im inneren Einzeleingriffspunkt oder im Wälzpunkt.

#### 2.1.1.1 Bestimmung der Flankenpressung für das Ritzel

$$\sigma_H = Z_B \cdot \sigma_{H0} \cdot \sqrt{K_A \cdot K_v \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\alpha}} \leq \sigma_{HP} \quad (2.01)$$

Hierin ist  $\sigma_{H0}$  der Nennwert der Flankenpressung im Wälzpunkt.

$$\sigma_{H0} = Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\epsilon \cdot Z_\beta \cdot Z_K \cdot \sqrt{\frac{F_{mt}}{d_{v1} \cdot b_{eH}} \cdot \frac{u_v + 1}{u_v}} \quad (2.02)$$

Für den Achsenwinkel  $\Sigma = \delta_1 + \delta_2 = 90^\circ$  gilt:

$$\sigma_{H0} = Z_H \cdot Z_E \cdot Z_\epsilon \cdot Z_\beta \cdot Z_K \cdot \sqrt{\frac{F_{mt}}{d_{m1} \cdot b_{eH}} \cdot \frac{u^2 + 1}{u^2}} \quad (2.03)$$

$K_A$ ,  $K_v$ ,  $K_{H\beta}$ ,  $K_{H\alpha}$  und  $F_{mt}$  und Reihenfolge der Faktoren im Berechnungsablauf siehe DIN 3991 Teil 1.

$Z_H$ ,  $Z_B$ ,  $Z_E$ ,  $Z_\epsilon$  und  $Z_\beta$  siehe Abschnitte 3 bis 6.

Für  $b_{eH}$  gilt mit den Definitionen nach DIN 3991 Teil 1, Ausgabe September 1988, Abschnitt 5.2.1, im allgemeinen:

$$b_{eH} = 0,85 \cdot b.$$

$d_v$  und  $u_v$  siehe DIN 3991 Teil 1, Anhang A.

Der Kegelradfaktor  $Z_K$  berücksichtigt den Einfluß des von der Evolvente abweichenden Zahnprofils und der über die Breite veränderlichen Zahnfederfestigkeit auf die Grübchenbildung. Bei geeigneter und angepaßter Höhenballigkeit gilt:  $Z_K = 0,85$ .

#### 2.1.1.2 Bestimmung der Flankenpressung für das Rad

$$\sigma_H = Z_D \cdot \sigma_{H0} \cdot \sqrt{K_A \cdot K_v \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\alpha}} \leq \sigma_{HP} \quad (2.04)$$

$Z_D$  siehe Abschnitt 3.3

$\sigma_{H0}$  siehe Gleichungen (2.02) und (2.03)

$K_A$ ,  $K_v$ ,  $K_{H\beta}$ ,  $K_{H\alpha}$  siehe DIN 3991 Teil 1.

### 2.1.2 Flankenpressung bei Schräg- und Bogenverzahnung mit $\epsilon_{v\beta} \geq 1$

Maßgebend ist die Flankenpressung im Wälzpunkt.

Für Ritzel und Rad gelten die Gleichung (2.01) bzw. (2.04) mit  $Z_B = Z_D = 1$ .

### 2.1.3 Flankenpressung bei Schräg- und Bogenverzahnung mit $\epsilon_{v\beta} < 1$

Maßgebend ist die für die betreffende Sprungüberdeckung zwischen den Werten nach den Abschnitten 2.1.1 und 2.1.2 linear interpolierte Flankenpressung.

#### 2.1.3.1 Bestimmung der Flankenpressung für das Ritzel

Hierfür gilt Gleichung (2.01) mit  $Z_{B\beta}$  statt  $Z_B$ :

$$Z_{B\beta} = Z_B - \epsilon_{v\beta} (Z_B - 1) \quad (2.05)$$

$Z_B$  ist nach Abschnitt 3.2 zu berechnen. Dabei sind die Daten der aktuellen Schräg- oder Bogenverzahnung einzusetzen.

### 2.1.3.2 Bestimmung der Flankenpressung für das Rad

Hierfür gilt Gleichung (2.04) mit  $Z_{D\beta}$  statt  $Z_D$ :

$$Z_{D\beta} = Z_D - \varepsilon_{v\beta} (Z_D - 1) \quad (2.06)$$

$Z_D$  ist nach Abschnitt 3.3 zu berechnen. Dabei sind die Daten der aktuellen Schräg- oder Bogenverzahnung einzusetzen. – Da meist  $Z_D = 1$  ist, wird auch meist  $Z_{D\beta} = 1$ .

## 2.2 Zulässige Flankenpressung (für Dauergetriebe)

Die zulässige Flankenpressung  $\sigma_{HP}$  ist jeweils getrennt für Ritzel und Rad zu berechnen:

$$\sigma_{HP} = \frac{\sigma_{H \lim}}{S_{H \min}} \cdot (Z_L \cdot Z_v \cdot Z_R) \cdot Z_X = \frac{\sigma_{HG}}{S_{H \min}} \quad (2.07)$$

$\sigma_{H \lim}$  Dauerfestigkeitswert für Flankenpressung, siehe Abschnitt 8.

$S_{H \min}$  Geforderter Mindest-Sicherheitsfaktor für Flankenpressung, siehe DIN 3991 Teil 1, Ausgabe September 1988, Abschnitt 1.2.

$Z_X$  siehe Abschnitt 7;  $Z_L$ ,  $Z_v$ ,  $Z_R$  siehe Abschnitt 9.

## 2.3 Rechnerischer Sicherheitsfaktor für Flankenpressung (gegen Grübchenbildung)

Der rechnerische Sicherheitsfaktor für Flankenpressung muß getrennt für Ritzel und Rad geprüft werden.

$$S_H = \frac{\sigma_{HG}}{\sigma_H} \geq S_{H \min} \quad (2.08)$$

Anmerkung: Hier handelt es sich um die rechnerische Sicherheit im Hinblick auf die Flankenpressung. Die Sicherheit bezüglich des übertragbaren Momentes ist gleich dem Quadrat von  $S_H$ .

Hinweise auf Zahlenwerte für den Mindest-Sicherheitsfaktor oder das Schadensrisiko (Schadenswahrscheinlichkeit) siehe DIN 3991 Teil 1, Ausgabe September 1988, Abschnitt 1.

## 2.4 Vereinfachte Berechnung (Hinweis)

Für den ersten Entwurf, für bestimmte Anwendungsgebiete oder für Überschlagsrechnungen ist es mitunter zulässig, einige Faktoren mit 1 oder als Konstante anzunehmen oder Faktoren zusammenzufassen (vergleiche DIN 3991 Teil 1, Ausgabe September 1988, Abschnitt 1.3 c).

## 3 Zonenfaktor $Z_H$ , Einzeleingriffsfaktoren $Z_B$ , $Z_D$

### 3.1 Zonenfaktor $Z_H$

Der Zonenfaktor  $Z_H$  erfaßt den Einfluß der Zahnflankenkrümmung in Zahnhöhenrichtung und im Wälzpunkt auf die Flankenpressung.

Unter der Annahme eines evolventischen Zahnprofils gilt für Kegelräder mit Null- oder V-Null-Verzahnung ( $\alpha_t = \alpha_{vt}$ ):

$$Z_H = 2 \sqrt{\frac{\cos \beta_{vb}}{\sin (2 \alpha_{vt})}} \quad (3.01)$$

Für einige gebräuchliche Normaleingriffswinkel kann  $Z_H$  Bild 3.1 entnommen werden.

### 3.2 Ritzel-Einzeleingriffsfaktor $Z_B$

Der Ritzel-Einzeleingriffsfaktor  $Z_B$  dient bei Geradverzahnung zur Umrechnung der Flankenpressung im Wälzpunkt C auf die Flankenpressung im inneren Einzeleingriffspunkt B des Ritzels. Siehe Bild 3.2 und Einleitung zu Abschnitt 2.

$$Z_B = \frac{\tan \alpha_{vt}}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{d_{va1}^2}{d_{vb1}^2} - 1} - \frac{2 \pi}{z_{v1}}\right) \left(\sqrt{\frac{d_{va2}^2}{d_{vb2}^2} - 1} - (\varepsilon_{v\alpha} - 1) \cdot \frac{2 \pi}{z_{v2}}\right)}} \quad (3.02)$$

### 3.3 Rad-Einzeleingriffsfaktor $Z_D$

Der Rad-Einzeleingriffsfaktor  $Z_D$  dient bei Geradverzahnung zur Umrechnung der Flankenpressung im inneren Einzeleingriffspunkt D des Rades. Siehe Bild 3.2 und Einleitung zu Abschnitt 2. ( $Z_D$  muß im allgemeinen nur bei Radpaaren mit  $u < 1,5$  berechnet werden; bei größeren Zähnezahlnverhältnissen ist meist  $Z_D < 1$  und damit in Gleichung (2.04) gleich eins zu setzen).

$$Z_D = \frac{\tan \alpha_{vt}}{\sqrt{\left(\sqrt{\frac{d_{va2}^2}{d_{vb2}^2} - 1} - \frac{2 \pi}{z_{v2}}\right) \left(\sqrt{\frac{d_{va1}^2}{d_{vb1}^2} - 1} - (\varepsilon_{v\alpha} - 1) \cdot \frac{2 \pi}{z_{v1}}\right)}} \quad (3.03)$$

## 4 Elastizitätsfaktor $Z_E$

Der Elastizitätsfaktor berücksichtigt den Einfluß der werkstoffspezifischen Größen  $E$  (Elastizitätsmodul) und  $\nu$  (Poisson-Konstante) auf die Flankenpressung.

$$Z_E = \sqrt{\frac{1}{\pi \left( \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right)}} \quad (4.01)$$

Für  $E_1 = E_2 = E$  und  $\nu_1 = \nu_2 = \nu$  gilt

$$Z_E = \sqrt{\frac{E}{2 \cdot \pi \cdot (1 - \nu^2)}} \quad (4.02)$$

Für Stahl und Leichtmetall ist  $\nu = 0,3$  und damit

$$Z_E = \sqrt{0,175 \cdot E} \quad (4.03)$$

Bei Radpaarungen aus Werkstoffen mit verschiedenen Elastizitätsmoduln  $E_1$  und  $E_2$  kann gesetzt werden

$$E = \frac{2 \cdot E_1 \cdot E_2}{E_1 + E_2} \quad (4.04)$$

Für Paarung Stahl/Stahl gilt

$$Z_E = 189,8 \quad (4.05)$$

Für weitere Werkstoffpaarungen kann  $Z_E$  DIN 3990 Teil 2 entnommen werden.