

Statistische Auswertung
an Stichproben mit Beispielen aus der
Elastomer- und Kunststoffprüfung

DIN
53 598
Teil 1

Statistical evaluation at off-hand samples with examples from testing of rubbers and plastics
Evaluation statistique aux prélèvements avec exemples d'essai des élastomères et des
matières plastiques

Ersatz für Ausgabe 08.74

Beabsichtigt ist, die zur Zeit in der Herausgabe befindlichen allgemeinen Grundlagen über die Anwendung der Statistischen Auswertungsverfahren, die Normen der Reihe DIN 53 804, künftig an Stelle dieser vorliegenden Norm zu übernehmen. Sie sind jedoch durch ein Beiblatt zu ergänzen, das die hier gebrachten und weitere Beispiele aus der Elastomer- und Kunststoffprüfung enthalten soll.

Inhalt

	Seite		Seite
1 Anwendungsbereich und Zweck	2	3.2 Statistischer Streubereich	3
2 Begriffe	2	3.3 Signifikanzniveau α und Vertrauensniveau 1 - α	4
2.0 Allgemeines	2	3.4 Abschätzen des wahren Mittelwertes μ . . .	4
2.1 Kennwerte zur Charakterisierung der mitt- leren Lage	2	3.5 Abschätzen der wahren Standard- abweichung σ	4
2.1.1 Arithmetischer Mittelwert $\bar{x}$	2	3.6 Vertrauensbereich für den Mittelwert $\pm W$ und $\pm e$	4
2.1.2 Medianwert $\tilde{x}$	2	3.7 Stichprobenumfang n	5
2.1.3 Mittelwert transformierter Größen	2	3.8 Vertrauensbereich für die Standardabweichung	5
2.2 Kennwerte zur Charakterisierung der Streuung	3	3.9 Vertrauensbereich für den Variationskoeffizienten	5
2.2.1 Varianz s^2 und Standardabweichung s . . .	3	4 Wiedergabe der Meßergebnisse	5
2.2.2 Variationskoeffizient v :	3	5 Beispiele	6
2.2.3 Spannweite R_n	3	6 Tabellen	8
3 Statistische Aussagen und Auswertungen . . .	3		
3.1 Allgemeines	3		

Fortsetzung Seite 2 bis 11

Normenausschuß Materialprüfung (NMP) im DIN Deutsches Institut für Normung e. V.
Normenausschuß Kautschuktechnik (FAKAU) im DIN
Normenausschuß Kunststoffe (FNK) im DIN

Nachdruck, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung des DIN Deutsches Institut für Normung e. V., Berlin, gestattet.

1 Anwendungsbereich und Zweck

In dieser Norm sind die wichtigsten statistischen Begriffe und Verfahren zum Auswerten von Meßwerten bei Prüfungen mit überwiegend kleiner Probenanzahl zusammengestellt und an Hand von Beispielen erläutert. Die Anwendungsbeispiele betreffen vorzugsweise die technologischen Prüfungen von Elastomeren und Kunststoffen. Mit Hilfe dieser Norm sollen Aussagen über bestimmte Eigenschaften von Werkstoffen oder Erzeugnissen auf Grund einer geringen Anzahl von Messungen gemacht werden. Dabei soll insbesondere festgestellt werden, in welchem Bereich die Meßergebnisse Vertrauen beanspruchen können und ob im Hinblick auf den Zweck der Prüfungen die Probenanzahl ausreichend war oder vergrößert werden muß.

Verfahren zum Auswerten größerer Meßreihen, z. B. durch graphische Darstellung der Häufigkeitsverteilung und Berechnungen nach Klasseneinteilung der Meßwerte, siehe DIN 53 804 Teil 1. Die hier genannten statistischen Kennwerte gelten für Meßergebnisse, die an einer Prüfstelle für sich unter sogenannten Wiederholbedingungen gewonnen wurden. Sie müssen nicht identisch sein mit den Kennwerten, die unter Vergleichsbedingungen, die zwischen verschiedenen Prüfstellen, z. B. in Ringversuchen, gewonnen werden. Hierzu siehe DIN ISO 5725.

2 Begriffe

2.0 Allgemeines

Eine Prüfung besteht in der Regel aus wiederholten Messungen der gleichen Merkmale zur Erfassung bestimmter Eigenschaften von Werkstoffen und Produkten. Die Messungen werden sinnvollerweise an Stichproben durchgeführt und nicht an allen Einzelwerten der sogenannten Grundgesamtheit (bzw. des Kollektives); denn erst alle möglichen Stichproben zusammen bilden diese Grundgesamtheit.

Aussagen über die Grundgesamtheit und ihre sie beschreibenden Parameter sind jedoch das Ziel einer Prüfung.

Dazu dienen zwei Arten von statistischen Kennwerten, die zur Charakterisierung der mittleren Lage und der Streuung der Grundgesamtheit mindestens notwendig sind und aus der Stichprobe gewonnen bzw. abgeschätzt werden. Diese Schätzungen sind mit einer angebbaren Unsicherheit behaftet.

Für ein vorgewähltes Vertrauensniveau und den durch den Stichprobenumfang gegebenen sogenannten Freiheitsgrad können die Vertrauensbereiche der Kennwerte errechnet werden.

2.1 Kennwerte zur Charakterisierung der mittleren Lage

2.1.1 Arithmetischer Mittelwert $\bar{x}$

(Beispiele siehe Abschnitte 5.1 und 5.2)

Der arithmetische Mittelwert $\bar{x}$ aus n Einzelwerten x_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n$) ist die durch n geteilte Summe der Einzelwerte

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

Für die numerische Berechnung ist es häufig einfacher, anstatt mit x_i mit

$$y_i = (x_i - a) \quad c \quad (2a)$$

zu rechnen, wobei a und c frei zu wählende Hilfswerte, a vorzugsweise in der Nähe des zu schätzenden Mittelwertes, darstellen. Für den arithmetischen Mittelwert gilt dann:

$$\bar{x} = a + \frac{1}{cn} \sum_{i=1}^n y_i = a + \frac{\bar{y}}{c} \quad (2b)$$

Anmerkung 1: Bei größeren Stichproben kann es vorteilhaft sein, die Meßwerte in Klassen zusammenzufassen (siehe DIN 53 804 Teil 1).

2.1.2 Medianwert $\tilde{x}$

(Beispiel siehe Abschnitt 5.3)

Ordnet man die n Einzelwerte

$$x_i \quad [i = 1, 2, \dots, n],$$

die zunächst in der Reihenfolge der Beobachtung notiert sind, nach aufsteigender Größe, so erhält man eine Reihe:

$$x_{(i)} \quad [i = 1, 2, \dots, n].$$

Die Klammer des Index soll auf diese geordnete Reihenfolge hinweisen.

Bei einer ungeraden Anzahl von Einzelwerten ist der mittelste Wert der geordneten Reihe der Median $\tilde{x}$ (sprich x Tilde oder Median von x):

$$\tilde{x} = x_{(n+1)/2} \quad (3)$$

Bei einer geraden Anzahl n gibt es keinen mittelsten Wert. Der Median wird dann konventionell durch das arithmetische Mittel der beiden mittelsten Werte ersetzt:

$$\tilde{x} = \frac{1}{2} (x_{n/2} + x_{(n/2+1)}) \quad (4)$$

Besteht die Absicht, den Median aus einer Reihe von Meßwerten zu bilden, ist es angebracht, von vornherein eine ungerade Anzahl von Einzelwerten zu bestimmen, um Gleichung (3) anwenden zu können.

Anmerkung 2: Im Gegensatz zum arithmetischen Mittelwert hängt der Median von den Extremwerten der Stichprobe nicht ab.

Anmerkung 3: Zu nennen ist noch der Modalwert, auch Mode oder Dichtemittel D genannt und definiert als der häufigste Wert in einer Verteilung.

Während der Median $\tilde{x}$ eine Verteilung definitionsgemäß in zwei gleiche Teile teilt, liegt z. B. bei einer negativ schiefen Verteilung (d. h. einer sogenannten rechtsgipfligen Verteilung) – wie sie z. B. für die Reißkraft und Reißdehnung von Elastomeren gemäß DIN 53 504 vorkommen kann – der arithmetische Mittelwert $\bar{x}$ niedriger und das Dichtemittel D höher als der Median $\tilde{x}$.

2.1.3 Mittelwert transformierter Größen

(Beispiele siehe Abschnitte 5.4 und 5.8)

Unter Umständen ist eine Transformation der Einzelwerte angebracht. So liefert z. B. der arithmetische Mittelwert von logarithmierten Einzelwerten

$$\lg \bar{x}_G = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lg x_i \quad (5)$$

nach dem Entlogarithmieren den geometrischen Mittelwert $\bar{x}_G$.

Das geometrische Mittel $\bar{x}_G$ ist also die n -te Wurzel aus dem Produkt der Einzelwerte

$$\bar{x}_G = \sqrt[n]{\prod_{i=1}^n x_i} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot \dots \cdot x_n} \quad (6)$$

Es ist zu beachten, daß nur positive Einzelwerte vorliegen dürfen.

Außer der logarithmischen Transformation können auch andere Transformationen vorteilhaft angewendet werden:

Die gemittelte Summe der Kehrwerte bildet z. B. den Kehrwert des harmonischen Mittelwertes (siehe DIN 55 302 Teil 1 und DIN 55 302 Teil 2). Unter Umständen ist es zweckmäßig, mit den Wurzeln oder Potenzen der Einzelwerte zu rechnen.

Anmerkung 4: Eine Transformation ist von Vorteil, falls man nach der Transformation eine Verteilung für die Grundgesamtheit erhält, die besser der Normalverteilung entspricht. Unter der Normalverteilung, die auch unter dem Namen Gauß-Laplace-Verteilung bekannt ist, versteht man eine symmetrische Verteilung, die durch eine hier nicht anzugebende Gleichung bestimmt ist und die durch zwei statistische Kennwerte, nämlich den arithmetischen Mittelwert und die Standardabweichung, eindeutig beschrieben wird. Die meisten der im Abschnitt 3 dieser Norm angegebenen Aussagen gelten im strengen Sinne nur, falls die zu untersuchende Grundgesamtheit einer Normalverteilung gehorcht. Zur Beurteilung auf Normalverteilung siehe DIN 53 804 Teil 1.

2.2 Kennwerte zur Charakterisierung der Streuung

2.2.1 Varianz s^2 und Standardabweichung s (Beispiele siehe Abschnitte 5.1 und 5.2)

Um die Streuung von n Einzelwerten x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) einer Stichprobe zu erfassen, bildet man die Summe der Quadrate der Abweichungen der Einzelwerte vom arithmetischen Mittelwert und dividiert sie durch die Anzahl der Freiheitsgrade $f = n - 1$. Man erhält dann die Varianz s^2 :

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (7)$$

Den Absolutwert der Quadratwurzel aus der Varianz bezeichnet man als Standardabweichung s :

$$s = |\sqrt{s^2}| \quad (8)$$

mit der Maßeinheit der Einzelwerte.

Für das Maschinenrechnen und zum Vermeiden von Rundungsfehlern ist die Formel

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum x_i \right)^2 \right] \quad (9)$$

vorzuziehen bzw.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum (x_i - a)^2 - \frac{1}{n} \left(\sum (x_i - a) \right)^2 \right] \quad (10)$$

wobei a ein frei zu wählender Hilfswert ist, der eingeführt werden kann, um mit einfacheren Zahlen zu rechnen, bzw.

$$s^2 = \frac{1}{c^2(n-1)} \left[\sum y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum y_i \right)^2 \right] \quad (10a)$$

wobei y_i nach Formel (2a) mit den Hilfswerten a und c definiert ist.

Die Summe der Abweichungsquadrate entspricht somit der Differenz aus der Summe der Quadrate der Einzelwerte und des durch n geteilten Quadrats der Summe der Einzelwerte, letzteres auch Korrektionsglied genannt. Die verwendeten Summen dürfen im Rechengang nicht gerundet werden.

Anmerkung 5: An Stelle des griechischen Buchstabens Σ wird häufig der für die Maschinenschreibweise zweckmäßigere Buchstabe S angewendet.

2.2.2 Variationskoeffizient v (Beispiel siehe Abschnitt 5.4)

Für die Angabe der relativen Streuung in % dividiert man die Standardabweichung durch den arithmetischen Mittel-

wert. Den mit 100 multiplizierten Quotienten nennt man Variationskoeffizient v in %:

$$v = \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 \quad (11)$$

2.2.3 Spannweite R_n (Beispiel siehe Abschnitt 5.3)

Die Differenz zwischen dem höchsten und niedrigsten Einzelwert einer Stichprobe nennt man Spannweite und bezeichnet sie mit dem Buchstaben R_n . Sie ist ebenfalls ein Kennwert für die Streuung:

$$R_n = x_{\max} - x_{\min} = x_{(n)} - x_{(1)} \quad (12)$$

Die Anzahl n der Einzelwerte, aus der die Spannweite gewonnen wurde, ist anzugeben, z. B. als Index der Form R_n . Wird die Spannweite zum Schätzen der Standardabweichung der Grundgesamtheit benutzt, soll möglichst $n \leq 13$ sein (siehe Anmerkung 6).

Liegt eine größere Stichprobe vor, so teilt man diese zweckmäßig in gleich große Gruppen auf und bildet die mittlere Spannweite $\bar{R}$ als arithmetisches Mittel aus den einzelnen Spannweiten R_n der Gruppen.

Anmerkung 6: Für $n = 7$ bzw. $n = 8$ ergibt sich die durchschnittlich beste Schätzgenauigkeit der Standardabweichung (siehe Abschnitt 3.5).

3 Statistische Aussagen und Auswertungen

3.1 Allgemeines

Die Prüfung einer bestimmten Eigenschaft eines Prüfgutes hat im allgemeinen das Ziel:

- a) den Mittelwert μ der Grundgesamtheit zu bestimmen, den man als wahren Mittelwert bzw. Erwartungswert bezeichnet,
- b) die Standardabweichung σ oder den Variationskoeffizienten γ der Grundgesamtheit zu ermitteln, die man als wahre Standardabweichung oder wahren Variationskoeffizienten bezeichnet.

Hierfür wäre die Prüfung aller Einheiten der Grundgesamtheit erforderlich. Üblicherweise wird nur eine beschränkte Anzahl von Messungen durchgeführt, und diese sind mit mehr oder weniger großen Zufallsfehlern behaftet. Deshalb kann man in einem auf n Einzelwerte beschränkten Versuch aus den statistischen Kennwerten $\bar{x}$ und s nur einen Bereich angeben, in dem sich die wahren statistischen Parameter μ und σ mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit befinden.

3.2 Statistischer Streubereich

Gehorcht die Streuung der Einzelwerte einer Grundgesamtheit der Normalverteilung (siehe Anmerkung 3) mit dem wahren Mittelwert μ und der wahren Standardabweichung σ , so liegen in dem Bereich des wahren Mittelwertes

$$\begin{aligned} \mu \pm 0,67 \sigma &: 50 \% \\ \mu \pm 1,00 \sigma &: 68 \% \\ \mu \pm 1,64 \sigma &: 90 \% \\ \mu \pm 1,96 \sigma &: 95 \% \\ \mu \pm 2,58 \sigma &: 99 \% \\ \mu \pm 3,00 \sigma &: 99,7 \% \\ \mu \pm 3,09 \sigma &: 99,8 \% \\ \mu \pm 3,29 \sigma &: 99,9 \% \end{aligned}$$

der Einzelwerte.

Zur Beschreibung des Streubereiches werden vielfach die 3σ -Grenzen verwendet. Bei einer Grundgesamtheit mit einer beliebigen Verteilung der Einzelwerte, einem wahren Mittelwert μ und einer wahren Standardabweichung σ , liegen innerhalb des Bereiches $\mu \pm 3\sigma$ (d. h. innerhalb der 3σ -Grenzen) mindestens %, also etwa 89 % aller Werte.

Bei den in der Technik meist vorkommenden Verteilungen liegen innerhalb der 3σ -Grenzen mindestens 95 % und bei einer Normalverteilung 99,73 % der Werte.

In der Praxis werden bevorzugt die 2σ -Grenzen verwendet, innerhalb deren bei beliebiger Verteilung der Grundgesamtheit mindestens $\frac{3}{4}$, also 75 % aller Werte, bei einer Normalverteilung 95,45 % der Werte liegen.

3.3 Signifikanzniveau α und Vertrauensniveau $1 - \alpha$

Statistische Aussagen lassen sich nie mit voller Gewißheit machen. Es muß damit gerechnet werden, daß sie zu einem gewissen Anteil nicht zutreffen. Diesen Anteil in einer Wahrscheinlichkeitsverteilung bezeichnet man als Signifikanzniveau α . Z. B. bedeutet ein Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$, daß die Aussage durchschnittlich in 5 % der Fälle nicht erfüllt wird, dagegen in 95 % der Fälle zutrifft.

Bei Aussagen über Vertrauensbereiche ist es gebräuchlich, das Vertrauensniveau $1 - \alpha$ anzugeben. Es ist nach technischen und wirtschaftlichen Gesichtspunkten vor Beginn der Untersuchung festzulegen. In dem Beispiel entspricht einem Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$ ein Vertrauensniveau $1 - \alpha = 0,95$.

Anmerkung 7: Statt Vertrauensniveau $1 - \alpha$ wurde früher die Bezeichnung Aussagewahrscheinlichkeitwert P oder „statistische Sicherheit“ P bzw. S benutzt. Auch ist der Ausdruck Konfidenzniveau $1 - \alpha$ gebräuchlich.

Der Begriff Signifikanzniveau soll bei statistischen Testverfahren, der Begriff Vertrauensniveau bei Aussagen über Vertrauensbereiche nach DIN 53 350 Teil 24 gebraucht werden.

3.4 Abschätzen des wahren Mittelwertes μ

Den wahren Mittelwert μ der Grundgesamtheit kann man aus den in Abschnitt 2.1 zur Charakterisierung der mittleren Lage genannten statistischen Kennwerte einer Stichprobe abschätzen.

Der arithmetische Mittelwert $\bar{x}$ einer Stichprobe kann als Näherung für den wahren Mittelwert μ herangezogen werden, d. h. $\bar{x}$ ist ein erwartungstreuer Schätzwert für μ :

$$E(\bar{x}) = \mu \quad (13)$$

Die Abweichung des Näherungswertes $\bar{x}$ von dem wahren Mittelwert μ kann um so größer sein, je kleiner die Anzahl n der Messungen und je größer die wahre Standardabweichung σ sind.

3.5 Abschätzen der wahren Standardabweichung σ

Die wahre Standardabweichung kann man aus den im Abschnitt 2.2 zur Kennzeichnung der Streuung genannten statistischen Maßzahlen abschätzen. Es gilt zunächst:

$$E(s^2) = \sigma^2 \quad (14)$$

d. h. s^2 ist ein erwartungstreuer Schätzwert für σ^2 . Dies gilt nicht nur für die Normalverteilung, sondern für beliebige Verteilungen. Als Schätzwert für σ benutzt man $s = \sqrt{s^2}$.

Im Falle normalverteilter Beobachtungen gilt auch

$$E(R_n/d_n) = \sigma \quad (15)$$

d. h. die Spannweite R_n – besser die mittlere Spannweite $\bar{R}_n$ – (siehe auch Anmerkung 6) durch eine Größe d_n dividiert, ist ein erwartungstreuer Schätzwert für σ . Der Wert d_n ist in Abhängigkeit von der Anzahl n der Einzelwerte der Tabelle 1 im Abschnitt 6 zu entnehmen. Der so erhaltene Schätzwert ist durch $s_{(R)}$ zu kennzeichnen.

3.6 Vertrauensbereich für den Mittelwert $\pm W$ und $\pm e$

(Beispiele siehe Abschnitte 5.5 und 5.8)

Der Vertrauensbereich bzw. das Vertrauensintervall des Mittelwertes $\bar{x}$ einer Stichprobe schließt den wahren Mittelwert μ der Grundgesamtheit mit dem Vertrauensniveau $1 - \alpha$ ein:

$$P(\bar{x} - W \leq \mu \leq \bar{x} + W) = 1 - \alpha \quad (16a)$$

Mit einem Anteil α liegt der Mittelwert μ der Grundgesamtheit außerhalb des Vertrauensbereiches

$$\bar{x} \pm W \quad (16b)$$

Die Größe W bezeichnet man auch als halbe Weite des Vertrauensbereiches:

$$W = \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot s \quad (16c)$$

Hierin bedeuten:

$\bar{x}$ Mittelwert der Stichprobe

s Standardabweichung der Stichprobe

t bzw. $t/\sqrt{n}$ Faktor, der in Abhängigkeit von dem Signifikanzniveau α oder dem Vertrauensniveau $1 - \alpha$ und vom Freiheitsgrad $f = n - 1$ aus Tabelle 2 im Abschnitt 6 zu entnehmen ist; er berücksichtigt, daß s nicht gleich σ ist.

Anmerkung 8: Die in Gleichung (16c) enthaltene Größe t entspricht einer der Normalverteilung ähnlichen statistischen Verteilung, die unter dem Namen t -Verteilung bekannt ist. Die t -Verteilung ist abhängig vom Freiheitsgrad f und geht für große Freiheitsgrade in die Normalverteilung über.

Diese t -Verteilung ist symmetrisch und ihre Integralwerte t für das Signifikanzniveau α schneiden an beiden Seiten des Integrals den Bereich von je $\alpha/2$ ab. Diese Grenzwerte für die sogenannte zweiseitige Abgrenzung sind in Tabelle 2, im Abschnitt 6, festgelegt.

Es ist zu beachten, daß es Darstellungsweisen gibt, bei denen jeder der am Integral abgeschnittenen Bereiche mit α bezeichnet wird. In diesem Fall ist das Signifikanzniveau als 2α und das Vertrauensniveau $1 - 2\alpha$ definiert. Bei Anwendung von t -Tabellen ist auf die noch unterschiedliche Darstellungsweise zu achten.

Will man den Vertrauensbereich relativ zum Mittelwert ausdrücken, so gilt für die relative halbe Weite des Vertrauensbereiches e in %

$$e = \frac{W}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot \frac{s}{\bar{x}} \cdot 100 = \frac{t}{\sqrt{n}} \cdot v, \quad (17)$$

wobei v der Variationskoeffizient ist.

Die relative halbe Weite des Vertrauensbereiches e wird auch als „zulässiger Fehler der Stichprobe in %“ oder als relative Abweichung in % bezeichnet.

Auch aus der Spannweite R_n einer Stichprobe vom Umfang n kann die halbe Weite des Vertrauensbereiches für $\bar{x}$ nach folgender Näherungsgleichung

$$W_{(R)} = \frac{t_R}{\sqrt{n} \cdot d_n} \cdot R_n = q \cdot R_n \quad (18)$$

und entsprechend auch die relative halbe Weite $e_{(R)}$ in %:

$$e_{(R)} = \frac{W_{(R)}}{\bar{x}} \cdot 100 \quad (19)$$

errechnet werden.

Der Faktor $q = t_R/\sqrt{n} \cdot d_n$ ist der Tabelle 2 im Abschnitt 6 zu entnehmen.