

Statistische Auswertungen

Meßbare (kontinuierliche) Merkmale

DIN
53 804
Teil 1

Statistical evaluation, measurable (continuous) characteristics
Evaluation statistique; caractères mesurables (continués)

Ersatz für
DIN 53 804/01.61

Diese Norm enthält in logisch aufbauender Reihenfolge eine Zusammenstellung einfacher grundlegender statistischer Auswertungsverfahren. Sie sind in vielen Anwendungsbereichen (Technik, Landwirtschaft, Medizin u. a.) von Bedeutung, wenn mit Hilfe von Ergebnissen, die an einer Stichprobe aus einer Gesamtheit ermittelt werden, Aussagen über Eigenschaften der Gesamtheit selbst gemacht werden sollen.

Die Norm enthält im Anhang eine exemplarische Anwendung der Verfahren aus dem Bereich der Textiltechnik. Für andere Fachbereiche auch außerhalb der Materialprüfung sollen solche beispielhaften Anwendungen als Beiblätter zu dieser Norm veröffentlicht werden. Dadurch soll eine unnötige, vielfach wiederholte oder gar widersprüchliche Darstellung statistischer Methoden vermieden und deren einheitliche Anwendung sichergestellt werden.

Zur Zeit ist ein Beiblatt mit Beispielen aus der chemischen Analytik in Arbeit. Beiblätter aus weiteren Anwendungsgebieten sind geplant. Auch die zur Zeit im Anhang A enthaltenen Beispiele aus der Textiltechnik sollen dann in ein Beiblatt übernommen werden.

Inhalt

	Seite		Seite
1 Anwendungsbereich und Zweck	2	6.3 Vertrauensbereich für die Differenz zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben	6
2 Begriffe	2	6.4 Vertrauensbereich für die Differenz zweier Erwartungswerte bei paarweise verbundenen Stichproben	6
3 Häufigkeitsverteilungen und ihre graphischen Darstellungen	2	7 Testen von Erwartungswerten und Varianzen bei Normalverteilung	6
3.1 Graphische Darstellung bei Einzelwerten	2	7.1 Vergleich eines Erwartungswertes mit einem vorgegebenen Wert	6
3.2 Graphische Darstellung bei Klasseneinteilung	2	7.2 Vergleich zweier Erwartungswerte bei unabhängigen Stichproben	7
4 Kennwerte von Stichproben	4	7.3 Vergleich zweier Erwartungswerte bei paarweise verbundenen Stichproben	7
4.1 Kennwerte zur Charakterisierung der mittleren Lage der Einzelwerte einer Stichprobe	4	7.4 Vergleich zweier Varianzen	7
4.1.1 Arithmetischer Mittelwert	4	8 Ausreißerverdächtige Einzelwerte und ihre Behandlung	8
4.1.2 Median	4	8.1 Ausreißertest nach Dixon	9
4.2 Kennwerte zur Charakterisierung der Streuung der Einzelwerte einer Stichprobe	4	8.2 Ausreißertest nach Grubbs	9
4.2.1 Varianz	4	Anhang A Beispiele aus der Textiltechnik	9
4.2.2 Standardabweichung	4	Anhang B Übersicht über die benutzten Formelzeichen	13
4.2.3 Variationskoeffizient	4	Zitierte Normen und Unterlagen	14
4.2.4 Spannweite	4	Erläuterungen	15
4.3 Berechnung von Mittelwert und Varianz aus Einzelwerten	4		
4.4 Berechnung von Mittelwert und Varianz bei Klasseneinteilung	4		
5 Testen auf Normalverteilung	4		
6 Vertrauensbereiche für Parameter der Normalverteilung	5		
6.1 Vertrauensbereich für den Erwartungswert	5		
6.2 Vertrauensbereich für die Standardabweichung	6		

Fortsetzung Seite 2 bis 15

1 Anwendungsbereich und Zweck

Die Eigenschaften von Produkten oder Tätigkeiten werden durch Merkmale erfaßt. Den Merkmalsausprägungen werden Werte einer jeweils geeigneten Skala zugeordnet. Die Skalenwerte sind

- bei meßbaren (kontinuierlichen) Merkmalen beliebige reelle Zahlen (als Zahlenwerte von physikalischen Größen)
- bei zählbaren (diskreten) Merkmalen ganze Zahlen (Zählwerte)
- bei Ordinalmerkmalen Eigenschaftskategorien, die einer Rangordnung folgen (z. B. glatt, etwas verknittert, stark verknittert)
- bei Attributmerkmalen Attribute (z. B. vorhanden/nicht vorhanden oder rot/gelb/blau).

Meßbare und zählbare Merkmale werden als quantitative, Ordinalmerkmale und Attributmerkmale als qualitative (beurteilbare) Merkmale bezeichnet. Diese Merkmalsarten entsprechen den Grundbegriffen der Meßtechnik: Messen, Zählen, Sortieren und Klassieren (siehe DIN 1319 Teil 1). Da es im allgemeinen nicht sinnvoll ist, Merkmalswerte an allen Einheiten einer Gesamtheit zu bestimmen, werden Stichproben gezogen und Kennwerte der Stichproben ermittelt.

Parameter der Wahrscheinlichkeitsverteilung, die das Verhalten des Merkmals in der Gesamtheit beschreiben, werden mit Hilfe von Kennwerten der Stichprobe geschätzt. Die Schätzung ist mit einer angebbaren Unsicherheit behaftet. Hypothesen über die durch eine Stichprobe untersuchte Gesamtheit können mittels statistischer Tests geprüft werden.

Diese Norm beschreibt statistische Verfahren, mit denen Merkmalswerte aufbereitet und Parameter der zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung geschätzt oder getestet werden können.

Die statistischen Verfahren richten sich nach der benutzten Skalenart. Die Normreihe erscheint deshalb in 4 Teilen. DIN 53804 Teil 1 befaßt sich mit meßbaren (kontinuierlichen) Merkmalen. Zählbare Merkmale, Ordinalmerkmale und Attributmerkmale werden in weiteren Teilen*) behandelt.

2 Begriffe

Die in der vorliegenden Norm benutzten statistischen Begriffe sind den Normen DIN 13303 Teil 1 und Teil 2 (z. Z. Entwurf) und DIN 55350 Teil 12 (Vornorm), Teil 21, Teil 22, Teil 23, Teil 24, DIN 55303 Teil 2 (z. Z. Entwürfe) zu entnehmen.

3 Häufigkeitsverteilungen und ihre graphischen Darstellungen

Ein Einzelwert ist ein bei einer einzelnen Beobachtung, z. B. einer Messung, gefundener Merkmalswert. Bei den in der vorliegenden Norm behandelten meßbaren (kontinuierlichen) Merkmalen werden die Merkmalswerte auf einer kontinuierlichen Skala gemessen; jeder Zwischenwert zwischen zwei Merkmalswerten ist wiederum Merkmalswert.

Anmerkung: Bei physikalischen Größen nach DIN 1313 sind die Merkmalswerte Größenwerte. Jeder Größenwert ist ein Produkt aus Zahlenwert und Einheit. In dieser Norm werden bei den Berechnungen die Einzelwerte als Zahlenwerte behandelt, denen im Ergebnis die Einheit zugefügt wird.

Der Stichprobenumfang n ist die Anzahl der Einzelwerte x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) einer Stichprobe. Anstelle des Symbols x kann das im Fachgebiet gebräuchliche Zeichen verwendet werden.

Die Einzelwerte sind in der Reihenfolge, in der sie anfallen (Urliste), oft unübersichtlich. Werden sie nach aufsteigender Größe geordnet (Rangierung), entsteht eine Folge $x_{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Die Klammer des Index weist darauf hin, daß es sich um die nach aufsteigender Größe geordneten Einzelwerte handelt. Die zum Einzelwert x_i gehörende Nummer in der geordneten Folge ist seine Rangzahl.

Bei der Rangierung wird deutlich, wie häufig die einzelnen Merkmalswerte auftreten (absolute Häufigkeit). Der Zusammenhang zwischen den Merkmalswerten und ihren Häufigkeiten wird als Verteilung der absoluten Häufigkeiten oder Häufigkeitsverteilung bezeichnet. Werden die absoluten Häufigkeiten durch die Gesamtanzahl der Einzelwerte geteilt, ergeben sich die relativen Häufigkeiten.

Häufigkeitsverteilungen werden durch graphische Darstellungen anschaulich wiedergegeben.

3.1 Graphische Darstellung bei Einzelwerten

Werden die Einzelwerte als Punkte (oder mit anderen graphischen Zeichen) über einer geeignet geteilten Merkmalsachse dargestellt, so entsteht ein Punktdiagramm, z. B. in Bild 1 für die Einzelwerte 430, 405, 408, 437, 416, 421, 408 (in einer beliebigen Einheit).

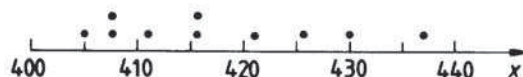


Bild 1. Punktdiagramm für Einzelwerte

Anschaulicher ist die Summentreppe, deren Sprünge bei den Einzelwerten liegen und deren Sprunghöhen gleich den Häufigkeiten (relativ oder absolut) der betreffenden Einzelwerte sind (siehe Bild 2). Die Summentreppe zeigt, wie viele oder wieviel Prozent der Einzelwerte kleiner als ein gewählter Wert oder ihm gleich sind. In Bild 2 sind z. B. 40 % der Werte kleiner oder gleich 411.

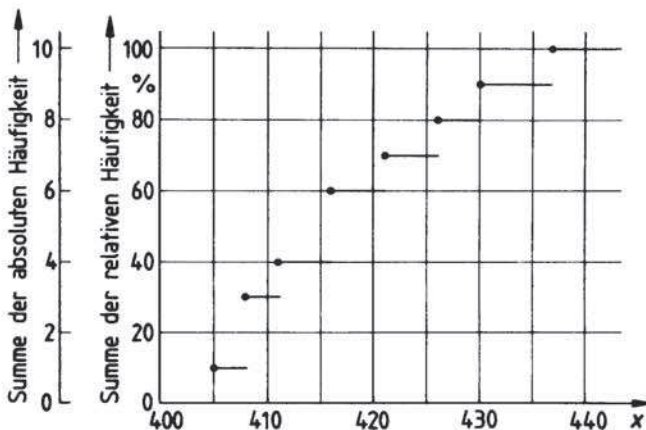


Bild 2. Summentreppe für Einzelwerte

3.2 Graphische Darstellung bei Klasseneinteilung

Bei größerem Stichprobenumfang ($n > 30$) ist ein Zusammenfassen von Einzelwerten in Klassen (Intervalle) sinnvoll.

In dieser Norm wird nur der Fall behandelt, daß alle Klassen die gleiche Klassenbreite haben.

Dabei sind die Klassengrenzen so festzulegen, daß jeder Einzelwert eindeutig zu einer Klasse gehört. Es wird empfohlen, die Klassenbreite w und damit die Anzahl der Klas-

sen in Abhängigkeit von der Anzahl n der Einzelwerte und der Spannweite ¹⁾ R_n nach

$$w \approx \frac{R_n}{\sqrt{n}} \text{ bei } 30 < n \leq 400 \quad (1)$$

und

$$w \approx \frac{R_n}{20} \text{ bei } n > 400 \quad (2)$$

zu wählen. Dabei sind die Klassengrenzen und die Rundung der Einzelwerte so aufeinander abzustimmen, daß möglichst wenige Einzelwerte auf die Klassengrenzen fallen.

Die Klassen werden in der vorliegenden Norm so festgelegt, daß die untere Klassengrenze zur Klasse gehört, die obere nicht; auch eine andere Festlegung kann zweckmäßig sein. Bei Übernahme fertiger Rechnerprogramme ist zu klären, wie die Klasseneinteilung erfolgt.

Die Anzahl n_j der in die Klasse j ($j = 1, 2, \dots, k$) fallenden Einzelwerte ist die absolute Häufigkeit in der betreffenden Klasse. Statt dieser kann die relative Häufigkeit

$$h_j = \frac{n_j}{n} \quad (3)$$

verwendet werden, die sich auch in % angeben läßt. Dabei ist die Anzahl n der Einzelwerte auszuweisen.

Tabelle 1. Zahlenbeispiel für klassierte Einzelwerte (siehe auch Anhang A, Abschnitt A.2)

Klasse Nr j	Klasse (Merkmal) (Einheit)	Obere Klassen- grenze x'_j	absolute Häufigkeit n_j	relative Häufigkeit h_j in %	Summe der	
					absoluten Häufigkeit $G_j = \sum_{i=1}^j n_i$	relativen Häufigkeit $F_j = \sum_{i=1}^j \frac{n_i}{n}$ in %
1	55 bis unter 60	60	2	2,67	2	2,67
2	60 bis unter 65	65	3	4,00	5	6,67
3	65 bis unter 70	70	7	9,33	12	16,00
4	70 bis unter 75	75	11	14,67	23	30,67
5	75 bis unter 80	80	16	21,33	39	52,00
6	80 bis unter 85	85	13	17,33	52	69,33
7	85 bis unter 90	90	10	13,33	62	82,67
8	90 bis unter 95	95	8	10,67	70	93,33
9	95 bis unter 100	100	3	4,00	73	97,33
10	100 bis unter 105	105	1	1,33	74	98,67
11	105 bis unter 110	110	1	1,33	75	100,00
Summe			$n = 75$	≈ 100		

Werden über den Klassen Rechtecke mit den absoluten Häufigkeiten n_j oder den relativen Häufigkeiten h_j als Höhen aufgetragen, entsteht ein Histogramm (graphische Darstellung der Häufigkeitsverteilung). Das Histogramm liefert anschauliche Hinweise auf die Form der Verteilung (Symmetrie, Ausreißer usw.).

In Bild 3 sind die klassierten Einzelwerte der Tabelle 1 als Histogramm dargestellt. Die Anzahl n der Meßwerte ist stets anzugeben.

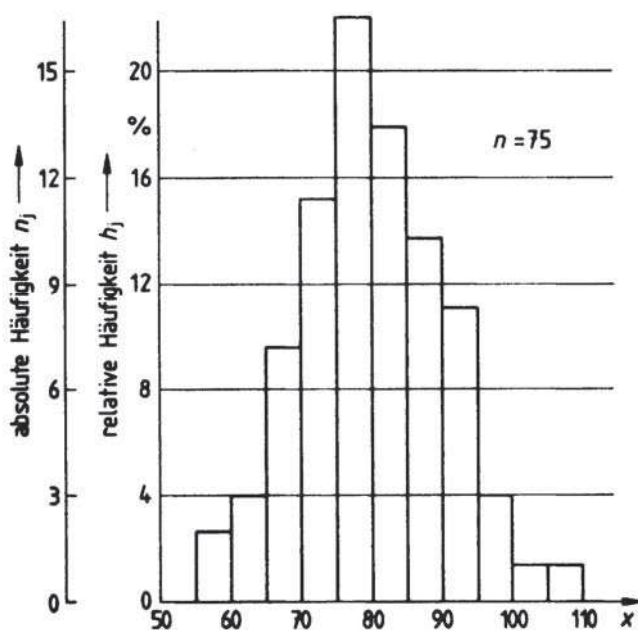


Bild 3. Histogramm für die klassierten Einzelwerte der Tabelle 1

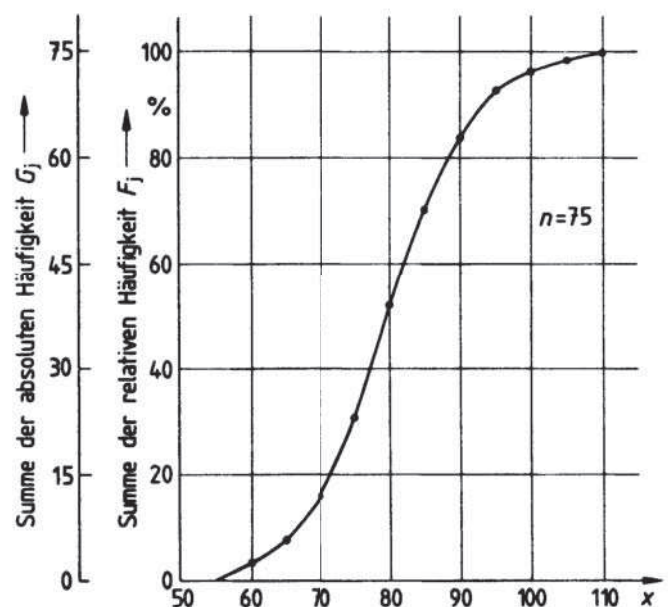


Bild 4. Summenlinie für die klassierten Einzelwerte der Tabelle 1

¹⁾ siehe Abschnitt 4.2.4

Die Summenlinie ist eine andere graphische Darstellung. Sie entsteht, wenn die Summen der Häufigkeiten (relativ F_j oder absolut G_j) über den oberen Klassengrenzen x'_j aufgetragen und die Punkte durch Strecken verbunden werden (vergleiche Bild 4).

An der Summenlinie kann abgelesen werden, wie viele Einzelwerte kleiner oder gleich einem vorgegebenen Wert (relativ oder absolut) sind.

4 Kennwerte von Stichproben

Ein Kennwert der Stichprobe ist ein aus allen oder einigen Einzelwerten ermittelter Wert, der die Stichprobe charakterisiert.

Außer dem Stichprobenumfang n sind zwei Arten von Kennwerten gebräuchlich: die eine beschreibt die mittlere Lage, die andere die Streuung der Einzelwerte der Stichprobe.

4.1 Kennwerte zur Charakterisierung der mittleren Lage der Einzelwerte einer Stichprobe

4.1.1 Arithmetischer Mittelwert

Der arithmetische Mittelwert $\bar{x}$ (kurz: Mittelwert) ist die Summe der Einzelwerte x_i der Stichprobe geteilt durch ihre Anzahl n .

$$\bar{x} = \frac{1}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (4)$$

4.1.2 Median

Der Median $\tilde{x}$ einer Stichprobe ist bei einer ungeraden Anzahl von Einzelwerten der Wert in der Mitte der Rangfolge:

$$\tilde{x} = x_{((n+1)/2)}; n \text{ ungerade} \quad (5)$$

Bei einer geraden Anzahl n von Einzelwerten eines meßbaren Merkmals wird der Median $\tilde{x}$ durch das arithmetische Mittel der beiden Werte in der Mitte der Rangfolge definiert:

$$\tilde{x} = \frac{1}{2} (x_{(n/2)} + x_{(n/2+1)}); n \text{ gerade} \quad (6)$$

Anmerkung: Im Gegensatz zum arithmetischen Mittelwert hängt der Median von den Extremwerten der Stichprobe nicht ab.

4.2 Kennwerte zur Charakterisierung der Streuung der Einzelwerte einer Stichprobe

4.2.1 Varianz

Die Varianz s^2 einer Stichprobe ist die Summe der Quadrate der Abweichungen der Einzelwerte vom arithmetischen Mittelwert dividiert durch die Zahl der Freiheitsgrade $f = n - 1$.

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (7)$$

4.2.2 Standardabweichung

Die Standardabweichung s der Stichprobe ist die positive Wurzel aus der Varianz:

$$s = \sqrt{s^2} \quad (8)$$

Sie ist ein Maß für die Streuung der Einzelwerte x_i um den Mittelwert $\bar{x}$. Die Standardabweichung hat die Maßeinheit der Einzelwerte.

4.2.3 Variationskoeffizient

Unter der Voraussetzung, daß alle Einzelwerte der Stichprobe positiv sind, ist der Variationskoeffizient der Stichprobe der Quotient aus der Standardabweichung s und dem Mittelwert $\bar{x}$:

$$v = \frac{s}{\bar{x}} \quad (9)$$

Häufig wird der Variationskoeffizient in % angegeben.

4.2.4 Spannweite

Die Spannweite ist die Differenz zwischen dem größten und dem kleinsten Einzelwert der Stichprobe

$$R_n = x_{\max} - x_{\min} = x_{(n)} - x_{(1)} \quad (10)$$

Anmerkung: Da die Spannweite von den Extremwerten abhängt, werden mitunter die Quasispannweiten verwendet.

Die erste Quasispannweite ist gegeben durch $x_{(n-1)} - x_{(2)}$, die zweite Quasispannweite durch $x_{(n-2)} - x_{(3)}$ usw.

4.3 Berechnung von Mittelwert und Varianz aus Einzelwerten

Es ist empfehlenswert, den Mittelwert nach Formel (4) und die Varianz nach der Formel

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \quad (11)$$

zu berechnen oder mittels einer Transformation

$$y_i = c(x_i - a) \quad (12)$$

mit zweckmäßig gewählten Hilfwerten a und c nach

$$\bar{x} = a + \frac{1}{cn} \sum_{i=1}^n y_i \quad (13)$$

und

$$s^2 = \frac{1}{c^2(n-1)} \left[\sum_{i=1}^n y_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^2 \right] \quad (14)$$

Die Standardabweichung ergibt sich nach Formel (8) (siehe Anhang A, Abschnitt A.1).

Um Fehler zu vermeiden, dürfen die verwendeten Summen nicht gerundet werden. Bei Übernahme fertiger Rechnerprogramme ist entsprechend Vorsicht geboten.

4.4 Berechnung von Mittelwert und Varianz bei Klasseneinteilung

Zur Berechnung von Mittelwert und Varianz bzw. Standardabweichung kann eine etwa in der Mitte der Häufigkeitsverteilung gelegene Klasse mit ihrer Klassenmitte (untere Klassengrenze plus halbe Klassenbreite) als Hilfwert a gewählt und dieser Klasse die Nummer 0 gegeben werden. Von dort ausgehend werden die Klassen (nach kleiner werdenden Einzelwerten hin negativ, nach größer werdenden hin positiv) mit ganzen Zahlen z_j beziffert und $\bar{x}$ und s^2 nach den Formeln

$$\bar{x} = a' + \frac{w}{n} \sum_{j=1}^k z_j n_j \text{ und} \quad (15)$$

$$s^2 = \frac{w^2}{n-1} \left[\sum_{j=1}^k z_j^2 n_j - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^k z_j n_j \right)^2 \right] \quad (16)$$

berechnet (siehe Anhang A, Abschnitt A.2).

5 Testen auf Normalverteilung

Für das Berechnen von Vertrauensbereichen und Testen von Hypothesen wird in diesem Teil der vorliegenden Norm vorausgesetzt, daß die Einzelwerte der betrachteten Gesamtheit normalverteilt sind. Bei meßbaren Merkmalen wird diese Annahme in vielen Fällen – mindestens näherungsweise – erfüllt sein. Statistische Tests auf Vorliegen einer Normalverteilung sind in der Literatur beschrieben [8].

2) Früher auch als Zentraler Maß bezeichnet.

Einfach und anschaulich kann die Voraussetzung der Normalverteilung durch die graphische Darstellung der Summenlinie im Wahrscheinlichkeitsnetz überprüft werden. Dieses Netz hat eine derart verzerrte Ordinatenteilung, daß die Summenlinie eines normalverteilten Merkmals eine Gerade ist. Ergeben die Summen der Häufigkeiten im Wahrscheinlichkeitsnetz aufgetragen näherungsweise eine Gerade, so darf auf eine Normalverteilung der Einzelwerte geschlossen werden. Die Kennwerte der Stichprobe lassen sich in diesem Fall dem Netz leicht entnehmen [2].

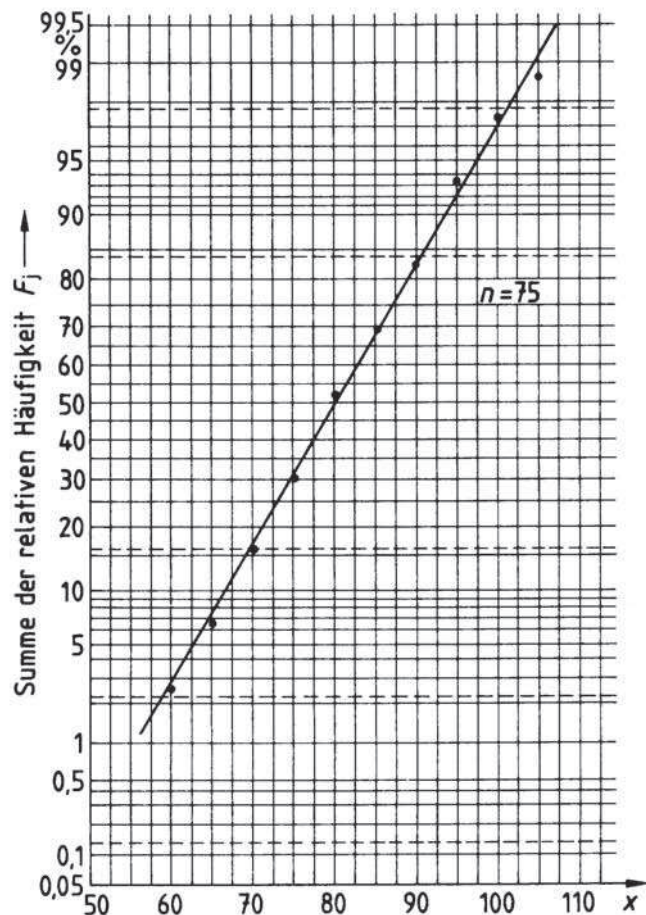


Bild 5. Summen der Häufigkeiten und Näherungsgerade

Bei kleinen Stichproben kann die Summenlinie nach dem Verfahren von Henning/Wartmann ermittelt werden, das statt der Summen der relativen Häufigkeiten die der Größe nach geordneten Einzelwerte verwendet [2], [4].

Bei Abweichung von der Normalverteilung sind die Auswertungsregeln der Abschnitte 7 und 8 oft noch brauchbar, wenn die Einzelwerte passend transformiert werden, d. h. wenn nicht die Einzelwerte selbst, sondern z. B. ihre Wurzeln, Kehrwerte oder Logarithmen benutzt werden und diese näherungsweise einer Normalverteilung folgen.

6 Vertrauensbereiche für Parameter der Normalverteilung

Die Kennwerte $\bar{x}$, s^2 , s , v der Stichprobe vom Umfang n dienen als Schätzwerte für die entsprechenden Parameter, Erwartungswert μ , Varianz σ^2 , Standardabweichung σ , Variationskoeffizient γ der Wahrscheinlichkeitsverteilung des Merkmals in der Gesamtheit, also in dieser Norm der Normalverteilung.

Da ein Schätzwert im allgemeinen von dem zu schätzenden Parameter mehr oder weniger abweicht, wird außer dem Schätzwert noch ein Vertrauensbereich für den Parameter angegeben, der mit Hilfe von Kennwerten der Stichprobe

berechnet wird. Dieser Bereich einschließlich seiner Grenzen, der oberen und der unteren Vertrauensgrenze, schließt den unbekannten Parameter mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit, dem Vertrauensniveau $1 - \alpha$ ein. Das bedeutet: wird der Vertrauensbereich für einen Parameter sehr oft ermittelt, so wird im Anteil $1 - \alpha$ der Fälle eine zutreffende Aussage gemacht: im Anteil α der Fälle schließt der Vertrauensbereich den Parameter nicht ein. Das Vertrauensniveau ist nach technischen und wirtschaftlichen Gesichtspunkten vor Beginn der Untersuchung festzulegen. Gebräuchlich sind Werte $1 - \alpha = 0,95$ und $1 - \alpha = 0,99$.

6.1 Vertrauensbereich für den Erwartungswert

Der Vertrauensbereich für den Erwartungswert μ wird bei unbekannter Standardabweichung σ aus Mittelwert $\bar{x}$ und Standardabweichung s einer Stichprobe vom Umfang n berechnet. Bei zweiseitiger Abgrenzung gilt auf dem Vertrauensniveau $1 - \alpha$:

$$\bar{x} - W \leq \mu \leq \bar{x} + W, \quad (17)$$

wobei

$$W = t_{f; 1-\alpha/2} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad (18)$$

der Abstand der Vertrauensgrenzen vom Mittelwert der Stichprobe ist. Der Vertrauensbereich hat demnach die Weite $2W$. Der Zahlenfaktor $t_{f; 1-\alpha/2}$ ist für das Vertrauensniveau $1 - \alpha = 0,95$ in Tabelle 2, zweiseitige Abgrenzung, in Abhängigkeit von der Zahl der Freiheitsgrade $f = n - 1$ aufgeführt (siehe Anhang A, Abschnitt A.3).

Bei einseitiger Abgrenzung (z. B. $\mu \leq \bar{x} + W$) und/oder bei bekannter Standardabweichung σ wird der Vertrauensbereich nach anderen Formeln berechnet, vergleiche z. B. [3], [4].

Tabelle 2. Tabellenwerte der t -Verteilung für das Vertrauensniveau $1 - \alpha = 0,95$ oder das Signifikanzniveau $\alpha = 0,05$

f	zweiseitige Abgrenzung $t_{f; 0,975}$	einseitige Abgrenzung $t_{f; 0,95}$
2	4,30	2,92
3	3,18	2,35
4	2,78	2,13
5	2,57	2,02
6	2,45	1,94
7	2,36	1,89
8	2,31	1,86
9	2,26	1,83
10	2,23	1,81
12	2,18	1,78
14	2,14	1,76
16	2,12	1,75
18	2,10	1,73
20	2,09	1,72
25	2,06	1,71
30	2,04	1,70
50	2,01	1,68
100	1,98	1,66
≥ 500	1,96	1,65

Ausführliche Tabellen der Zahlenwerte für $t_{f; 1-\alpha/2}$ bzw. $t_{f; 1-\alpha}$ — auch für andere Niveaus — sind in DIN 55303 Teil 2 (z. Z. Entwurf) und in der Fachliteratur zu finden, z. B. [3], [4].