

Statistische Auswertungen

Attributmerkmale

DIN
53 804
Teil 4

Statistical evaluations; attribute characteristics
Estimations statistiques; caractères qualitatifs d'attributs

Inhalt

	Seite		Seite
1 Anwendungsbereich und Zweck	1	7.3 Verteilungsfunktion der Binomialverteilung	6
2 Begriffe	2	7.4 Standardisierte Normalverteilung	7
3 Binomialverteilung	2	7.5 <i>F</i> -Verteilung bei einseitiger Abgrenzung	7
4 Kennwert der Stichprobe	2	7.6 <i>F</i> -Verteilung bei zweiseitiger Abgrenzung	8
5 Schätzwert und Vertrauensbereich für den Anteil <i>p</i> in der Grundgesamtheit	2	Anhang A Beispiele aus der Textiltechnik	8
6 Testen von Anteilen bei Binomialverteilung	3	A.1 Berechnung des Vertrauensbereiches für den Anteil <i>p</i> ; Garnspulen ohne Fadenreserve	8
6.1 Vergleich eines Anteils mit einem vorgegebenen Wert	3	A.2 Vergleich des Anteils <i>p</i> mit einem vorgegebenen Wert; Garnspulen ohne Fadenreserve	8
6.2 Vergleich zweier Anteile	3	A.3 Vergleich zweier Anteile; grafisches Verfahren; Garnspulen ohne Fadenreserve	8
6.2.1 Grafisches Verfahren	3	A.4 Vergleich zweier Anteile; rechnerisches Verfahren; Unterschied im Mercerisationsgrad	9
6.2.2 Rechnerisches Verfahren	4	Anhang B Formelzeichen	9
7 Nomogramme und Tabellen	4	Zitierte Normen und andere Unterlagen	10
7.1 Vertrauensbereich bei Binomialverteilung; $1 - \alpha = 0,95$	4	Erläuterungen	10
7.2 Vertrauensbereich bei Binomialverteilung; $1 - \alpha = 0,99$	5		

1 Anwendungsbereich und Zweck

Die Eigenschaften von Produkten und Tätigkeiten werden durch Merkmale erfaßt. Den Merkmalsausprägungen werden Werte einer jeweils geeigneten Skale zugeordnet. Die Skalenwerte sind

- bei meßbaren (kontinuierlichen) Merkmalen beliebige reelle Zahlen (als Zahlenwerte von physikalischen Größen)
- bei zählbaren (diskreten) Merkmalen ganze Zahlen (Zählwerte)
- bei Ordinalmerkmalen Eigenschaftskategorien, die einer Rangordnung folgen (z. B. glatt, etwas verknittert, stark verknittert)
- bei Attributmerkmalen Attribute (z. B. rot, gelb, blau; vorhanden, nicht vorhanden; grün, nicht grün)

Meßbare und zählbare Merkmale werden als quantitative, Ordinalmerkmale und Attributmerkmale als qualitative (beurteilbare) Merkmale bezeichnet. Diese Merkmalsarten entsprechen den Grundbegriffen der Meßtechnik: Messen, Zählen, Sortieren und Klassieren (siehe DIN 1319 Teil 1).

Da es im allgemeinen nicht sinnvoll ist, Merkmalswerte an allen Einheiten einer Grundgesamtheit zu bestimmen, werden Stichproben gezogen und Kennwerte der Stichprobe ermittelt.

Parameter, die das Verhalten des Merkmals in der Grundgesamtheit beschreiben, werden mit Hilfe von Kennwerten der Stichprobe geschätzt. Die Schätzung ist mit einer angebbaren Unsicherheit behaftet. Hypothesen über die durch eine Stichprobe untersuchte Grundgesamtheit können mittels statistischer Tests geprüft werden.

Die statistischen Verfahren richten sich nach der Merkmalsart und damit nach dem benutzten Skalentyp. Die Normenreihe erscheint deshalb in vier Teilen. In DIN 53804 Teil 1, Teil 2 und Teil 3 werden meßbare, zählbare und Ordinalmerkmale behandelt.

Diese Norm befaßt sich mit Attributmerkmalen. Die Ausprägungen (Werte, Attribute) eines Attributmerkmals werden auf einer Nominalskale [1] dargestellt. Jede Einheit einer Grundgesamtheit hat genau eine Ausprägung des Merkmals. Die Eigenschaften des Merkmals werden durch die Anteile (relative Häufigkeiten) beschrieben, mit denen die einzelnen Ausprägungen in der Grundgesamtheit vorkommen.

Häufig interessiert man sich nur für eine bestimmte Ausprägung und deren Anteil in der Grundgesamtheit. Die vorliegende Norm beschreibt statistische Verfahren, mit denen die Anzahl *x* der Einheiten mit der betrachteten Ausprägung des Attributmerkmals unter *n* untersuchten Einheiten aufbereitet werden kann. Weiterhin werden Schätzungen und

Fortsetzung Seite 2 bis 10

Normenausschuß Materialprüfung (NMP) im DIN Deutsches Institut für Normung e. V.
Ausschuß Qualitätssicherung und angewandte Statistik (AQS) im DIN

Tests des Anteils der Einheiten mit der betrachteten Ausprägung des Attributmerkmals in der Grundgesamtheit behandelt. Methodisch beruhen diese Verfahren auf der Binomialverteilung.

Für Fragestellungen, bei denen die Anteile von mehr als zwei Attributen gleichzeitig geschätzt oder getestet werden sollen, wird auf die Literatur über Mehrfeldertafeln und die Multinomialverteilung verwiesen.

Lassen sich die Ausprägungen des Attributmerkmals in eine Rangordnung bringen, ist eine statistische Auswertung entsprechend DIN 53804 Teil 3 (Ordinalmerkmale) möglich.

In DIN 40080 wird die Annahmestichprobenprüfung an Hand qualitativer Merkmale (Attributprüfung) behandelt, wobei das Attributmerkmal die Fehlerhaftigkeit von Einheiten (mit den beiden Ausprägungen: fehlerhaft, nicht fehlerhaft) ist.

2 Begriffe

Die in der vorliegenden Norm benutzten statistischen Begriffe sind den Normen DIN 13303 Teil 1 und Teil 2 sowie DIN 55350 Teil 12, Teil 14 (z. Z. Entwurf), Teil 21, Teil 22, Teil 23, Teil 24 und DIN 55303 Teil 2 zu entnehmen.

Der Stichprobenumfang n ist die Anzahl der untersuchten Einheiten.

Die absolute Häufigkeit x ist bei n untersuchten Einheiten die Anzahl der festgestellten Einheiten, die die betrachtete Ausprägung des Attributmerkmals aufweisen.

Anmerkung: Der Anzahl x entspricht bei meßbaren Merkmalen (siehe DIN 53804 Teil 1) der Einzelwert x_i ; x kann nur ganzzahlige Werte annehmen ($x = 0, 1, 2, \dots, n$).

3 Binomialverteilung

Für das Berechnen von Vertrauensbereichen und das Testen von Hypothesen wird in dieser Norm vorausgesetzt, daß die Anzahl der Einheiten mit einer bestimmten Ausprägung des Attributmerkmals in der Stichprobe einer Binomialverteilung folgt. Bei der Probenahme mit Zurücklegen von n Einheiten aus einer Grundgesamtheit von N Einheiten ist diese Voraussetzung der Binomialverteilung erfüllt.

Bei der Probenahme ohne Zurücklegen ist die hypergeometrische Verteilung die exakte Wahrscheinlichkeitsverteilung. Unter der Bedingung $n/N < 0,1$ (d. h. der Stichprobenumfang ist kleiner als 10% der Grundgesamtheit) kann dafür die Binomialverteilung als gute Näherung benutzt werden.

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion der Binomialverteilung legt fest, mit welcher Wahrscheinlichkeit die betrachtete Ausprägung nullmal, einmal, zweimal, ..., k -mal, ..., n -mal bei n untersuchten Einheiten auftritt.

Der Parameter p der Binomialverteilung gibt den Anteil an, mit dem die betrachtete Ausprägung im Mittel unter n untersuchten Einheiten auftritt.

Der Erwartungswert für die Anzahl der Einheiten mit der betrachteten Ausprägung unter n untersuchten Einheiten ist $n \cdot p$. Der Erwartungswert für die relative Häufigkeit der Einheiten mit der betrachteten Ausprägung ist p .

4 Kennwert der Stichprobe

Der Anteil der in der Stichprobe festgestellten Einheiten mit der betrachteten Ausprägung des Attributmerkmals ist x/n . Er ist die beobachtete relative Häufigkeit in der Stichprobe vom Umfang n .

5 Schätzwert und Vertrauensbereich für den Anteil p in der Grundgesamtheit

Der Schätzwert für den Anteil p ist

$$\hat{p} = \frac{x}{n} \quad (1)$$

Der Vertrauensbereich $p_{\text{un}} \leq p \leq p_{\text{ob}}$ für p bei **zweiseitiger Abgrenzung** zum Vertrauensniveau $1 - \alpha$ hat die Vertrauensgrenzen

$$p_{\text{ob}} = \frac{(x+1) \cdot F_{f_1, f_2; 1-\alpha/2}}{(n-x) + (x+1) \cdot F_{f_1, f_2; 1-\alpha/2}} \quad (2)$$

mit $f_1 = 2 \cdot (x+1)$ und $f_2 = 2 \cdot (n-x)$ sowie

$$p_{\text{un}} = \frac{x}{x + (n-x+1) \cdot F_{f_1, f_2; 1-\alpha/2}} \quad (3)$$

mit $f_1 = 2 \cdot (n-x+1)$ und $f_2 = 2 \cdot x$.

Sie können für die Vertrauensniveaus $1 - \alpha = 0,95$ beziehungsweise $1 - \alpha = 0,99$ den Nomogrammen Bild 3 und Bild 4 entnommen werden. Das Ableseschema ist in Bild 5 angegeben.

Für den Sonderfall $\hat{p} = 0$, d. h. $x = 0$, kann man einfacher rechnen

$$p_{\text{ob}} = 1 - \sqrt[n]{\alpha/2} \quad \text{und} \quad p_{\text{un}} = 0 \quad (4)$$

Für den Sonderfall $\hat{p} = 1$, d. h. $x = n$, kann man einfacher rechnen

$$p_{\text{ob}} = 1 \quad \text{und} \quad p_{\text{un}} = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}} \quad (5)$$

Der Vertrauensbereich $0 \leq p \leq p_{\text{ob}}$ für p bei **einseitiger Abgrenzung nach oben** zum Vertrauensniveau $1 - \alpha$ hat die Vertrauensgrenze

$$p_{\text{ob}} = \frac{(x+1) \cdot F_{f_1, f_2; 1-\alpha}}{(n-x) + (x+1) \cdot F_{f_1, f_2; 1-\alpha}} \quad (6)$$

mit $f_1 = 2 \cdot (x+1)$ und $f_2 = 2 \cdot (n-x)$. Für den Sonderfall $\hat{p} = 0$, d. h. $x = 0$, kann man einfacher rechnen

$$p_{\text{ob}} = 1 - \sqrt[n]{\alpha} \quad (7)$$

Der Vertrauensbereich $p_{\text{un}} \leq p \leq 1$ für p bei **einseitiger Abgrenzung nach unten** zum Vertrauensniveau $1 - \alpha$ hat die Vertrauensgrenze

$$p_{\text{un}} = \frac{x}{x + (n-x+1) \cdot F_{f_1, f_2; 1-\alpha}} \quad (8)$$

mit $f_1 = 2 \cdot (n-x+1)$ und $f_2 = 2 \cdot x$. Für den Sonderfall $\hat{p} = 1$, d. h. $x = n$, kann man einfacher rechnen

$$p_{\text{un}} = \sqrt[n]{\alpha} \quad (9)$$

Die genannten Tabellenwerte der F -Verteilung zum Vertrauensniveau $1 - \alpha = 0,95$ sind den Tabellen 2 und 3 zu entnehmen. Ausführlichere Tabellen auch für andere Werte von $1 - \alpha$ findet man in der Fachliteratur, z. B. in [2] und [3].

Die Vertrauensgrenzen können näherungsweise mit Hilfe der Normalverteilung wie folgt berechnet werden. Bei $n \cdot \hat{p} \cdot (1 - \hat{p}) > 9$ geben die Gleichungen (10) bis (13) eine grobe Näherung für Überschlagsrechnungen an; der relative Fehler bei p_{ob} und p_{un} beträgt bis zu etwa 25% bei $1 - \alpha = 0,95$ [4]. Bei zweiseitiger Abgrenzung ist

$$p_{\text{ob}} = \hat{p} + u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}} \quad (10)$$

$$p_{\text{un}} = \hat{p} - u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}} \quad (11)$$

Bei einseitiger Abgrenzung ist

$$p_{ob} = \hat{p} + u_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} \quad (12)$$

$$p_{un} = \hat{p} - u_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1-\hat{p})}{n}} \quad (13)$$

Dabei sind $u_{1-\alpha/2}$ und $u_{1-\alpha}$ Tabellenwerte (Quantile) der standardisierten Normalverteilung, die der Tabelle 1 entnommen werden können.

Eine wesentlich bessere Näherung der Ordnung n^{-1} geben die Gleichungen (14) bis (18) an; diese Gleichungen erhält man aus [5], wenn man in der dortigen Formel 19 mit $\alpha = 0$ das Fehlerglied der Ordnung $n^{-1/2}$ gleich Null setzt. Mit den Gleichungen (14) bis (18) können die Vertrauensgrenzen mit einem relativen Fehler von höchstens 1 % für alle Werte von x und n mit $-3,2 \cdot \ln \alpha \leq x \leq n + 3,2 \cdot \ln \alpha$ berechnet werden; beispielsweise ist $9,6 \leq x \leq n - 9,6$ für $1 - \alpha = 0,95$.

Bei zweiseitiger Abgrenzung wird zunächst der Hilfwert

$$d_{\alpha/2} = \frac{1}{3} \cdot (1 - u_{1-\alpha/2}^2) \quad (14)$$

berechnet; damit erhält man die korrigierten x -Werte

$$x_{ob} = x + \frac{1}{2} \cdot (d_{\alpha/2} + 1) \quad (15)$$

$$x_{un} = x + \frac{1}{2} \cdot (d_{\alpha/2} - 1) = x_{ob} - 1 \quad (16)$$

und schließlich

$$p_{ob} = \frac{x_{ob} + \frac{1}{2} u_{1-\alpha/2}^2 + u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{x_{ob} - \frac{x_{ob}^2}{n + d_{\alpha/2}} + \frac{1}{4} u_{1-\alpha/2}^2}}{n + d_{\alpha/2} + u_{1-\alpha/2}^2} \quad (17)$$

$$p_{un} = \frac{x_{un} + \frac{1}{2} u_{1-\alpha/2}^2 - u_{1-\alpha/2} \cdot \sqrt{x_{un} - \frac{x_{un}^2}{n + d_{\alpha/2}} + \frac{1}{4} u_{1-\alpha/2}^2}}{n + d_{\alpha/2} + u_{1-\alpha/2}^2} \quad (18)$$

Zur Berechnung der Vertrauensgrenzen bei einseitiger Abgrenzung wird $\alpha/2$ durch α ersetzt, und zwar für die obere Vertrauensgrenze in den Gleichungen (14), (15) und (17), für die untere Vertrauensgrenze in den Gleichungen (14), (16) und (18).

6 Testen von Anteilen bei Binomialverteilung

6.1 Vergleich eines Anteils mit einem vorgegebenen Wert

Mit diesem Vergleich wird geprüft, ob sich der Anteil p der Einheiten mit der betrachteten Ausprägung des Attributmerkmals in der Grundgesamtheit von einem vorgegebenen Wert p_0 (z. B. Sollwert oder Erfahrungswert aus der Vergangenheit) unterscheidet, d. h. es wird die Nullhypothese $H_0: p = p_0$ gegen die Alternativhypothese $H_1: p \neq p_0$ getestet. Dazu wird das Signifikanzniveau α festgelegt.

Zur Durchführung des Tests wird der Vertrauensbereich für p bei zweiseitiger Abgrenzung zum Vertrauensniveau $1 - \alpha$ ermittelt, der sich aus der Stichprobe mit dem Stichprobenumfang n und dem Schätzwert $\hat{p}$ ergibt (siehe Abschnitt 5). Dabei ist das Vertrauensniveau $1 - \alpha$ aus dem festgelegten Signifikanzniveau α zu errechnen.

Liegt der vorgegebene Wert p_0 innerhalb des Vertrauensbereiches, wird die Nullhypothese $H_0: p = p_0$ nicht verwor-

fen. Liegt dagegen der vorgegebene Wert p_0 außerhalb des Vertrauensbereiches, wird die Nullhypothese zu Gunsten der Alternativhypothese $H_1: p \neq p_0$ verworfen.

Die Bilder 1 und 2 zeigen die Zusammenhänge.

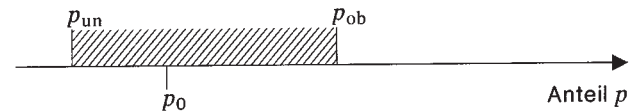


Bild 1. Vorgegebener Wert innerhalb des Vertrauensbereiches

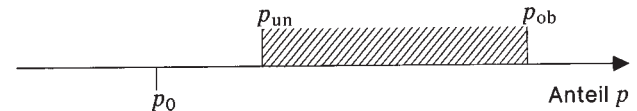


Bild 2. Vorgegebener Wert außerhalb des Vertrauensbereiches

Die Nullhypothese $H_0: p = p_0$ wird in Bild 1 nicht verworfen, dagegen wird sie in Bild 2 verworfen.

6.2 Vergleich zweier Anteile

Mit diesem Vergleich wird geprüft, ob sich die Anteile p_1 und p_2 der Einheiten mit der betrachteten Ausprägung des Attributmerkmals in zwei Grundgesamtheiten voneinander unterscheiden, d. h. es wird die Nullhypothese $H_0: p_1 = p_2$ gegen die Alternativhypothese $H_1: p_1 \neq p_2$ getestet.

Dazu wird das Signifikanzniveau α festgelegt.

Weiter werden unabhängig aus beiden Grundgesamtheiten Stichproben vom Umfang n_1 und n_2 gezogen. x_1 und x_2 sind die in den beiden Stichproben beobachteten Anzahlen der Einheiten mit der betrachteten Ausprägung.

Falls die Nullhypothese $H_0: p_1 = p_2 = p$ nicht verworfen wird, ist

$$\bar{p} = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2} \quad (19)$$

der beste Schätzwert für p .

Es gibt zwei häufig benutzte Verfahren, mit denen man diesen Vergleich durchführen kann, und zwar

- ein grafisches Verfahren für den Fall, daß $\bar{p} \leq 0,2$ ist; dabei wird das in [6] beschriebene Nomogramm Bild 6 der Binomialverteilung benutzt;
- ein rechnerisches Verfahren als Näherungslösung mit Hilfe der Normalverteilung, falls $0,2 < \bar{p} < 0,8$ ist.

Falls $\bar{p} \geq 0,8$ ist, testet man das Gegenteil der betrachteten Ausprägung, z. B. die Ausprägung „gut“ statt „schlecht“, und geht nach dem grafischen Verfahren vor.

6.2.1 Grafisches Verfahren

Für die Anwendung des Verfahrens wird vorausgesetzt, daß $\bar{p} \leq 0,2$ ist. Dabei erfolgt die Indizierung so, daß $n_1 \leq n_2$ ist.

Es werden die Hilfwerte

$$p^* = \frac{n_1}{n_1 + n_2} \quad (20)$$

$$n^* = x_1 + x_2 \quad (21)$$

$$x^* = x_1 \quad (22)$$

berechnet, mit denen im Nomogramm Bild 6 der Prüfwert P ermittelt wird. Das Ableseschema ist in Bild 7 angegeben. Liegt P im Intervall $\alpha/2 \leq P \leq 1 - \alpha/2$, wird die Nullhypothese nicht verworfen; ist $P < \alpha/2$ beziehungsweise ist $1 - \alpha/2 < P$, wird die Nullhypothese zugunsten der Alternativhypothese $H_1: p_1 \neq p_2$ verworfen.