

Logik und Mengenlehre

Zeichen und Begriffe

DIN
5473

Logic and set theory;
symbols and concepts

Ersatz für
Ausgabe 06.76
und DIN 5474/09.73

Inhalt

	Seite
1 Anwendungsbereich und Zweck	1
2 Festlegung des begrifflichen Rahmens	2
3 Logik	5
4 Klassen und Mengen	10
5 Standard-Zahlenmengen	13
6 Relationen	14
7 Funktionen	18
8 Strukturen	23
9 Kardinalzahlen	25
Anmerkungen	27

1 Anwendungsbereich und Zweck

In dieser Norm werden Zeichen und Begriffe der Logik und Mengenlehre behandelt. Eingeschlossen sind dabei Zeichen und Begriffe, die Relationen und Funktionen betreffen. Der Zweck der Norm ist es, für Anwender in Schule, Hochschule, Wissenschaft und Technik einen in sich konsistenten Satz von Bezeichnungen und Festlegungen auszuwählen, um dadurch zur Vereinheitlichung beizutragen und die Kommunikation zu erleichtern.

Gegenstand der Norm sind in erster Linie die Zeichen und Begriffe. Die angegebenen Sprechweisen können nicht in jedem Fall wörtlich eingehalten werden, wenn man formale Ausdrücke verbalisieren will; ähnliche Ausdrucksweisen können ebenfalls annehmbar sein.

Die vorliegende Norm ist mit DIN 1302/08.80 verträglich und entspricht ISO 31-11:1978, Abschnitte 1 und 2, führt aber darüber hinaus.

Fortsetzung Seite 2 bis 29

Normenausschuß Einheiten und Formelgrößen (AEF) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V.

2 Festlegung des begrifflichen Rahmens

Diese Norm enthält begriffliche Festlegungen sehr allgemeiner Art. Es ist deshalb erforderlich, den zugrundegelegten begrifflichen Rahmen näher zu beschreiben.

2.1 Individuen

Es werden gewisse Objekte vorausgesetzt, die als Individuen bezeichnet werden und über die man Aussagen machen möchte. Individuen treten als Elemente von Klassen auf, zwischen Individuen können Relationen bestehen, Individuen können Argumente und Werte von Funktionen sein. Dabei brauchen Individuen nicht (wie es vielleicht der Name vermuten läßt) unteilbar und ohne innere Struktur zu sein, vielmehr können sie durchaus aus anderen Objekten aufgebaut sein. Es ist ein Zweck der Mengenlehre, möglichst viele Objekte als Individuen verfügbar zu machen, darunter insbesondere mathematische Objekte wie Zahlen, Punkte, Räume verschiedener Art, interessierende Relationen und Funktionen u. ä.

Die Gesamtheit der Individuen ist in der Mengenlehre möglichst umfassend intendiert. Daneben ist es oft zweckmäßig, Individuen einer bestimmten Sorte auszuzeichnen, etwa Zahlen einer bestimmten Art, Punkte eines Raumes, bestimmte physikalische Objekte, Schüler in einem Klassenzimmer o.ä., die dann einen (speziellen) Individuenbereich einer gewissen Sorte bilden.

2.2 Klassen und Mengen

Neben Individuen betrachtet man Zusammenfassungen von Individuen, die man Klassen (von Individuen) nennt. Die in eine Klasse zusammengefaßten Individuen sind die Elemente der Klasse.

Von besonderem Interesse sind Mengen. Das sind spezielle Klassen, die selbst auch Individuen sind. Die Axiome der Mengenlehre machen Aussagen darüber, welche Klassen Mengen sind. Die Norm enthält entsprechende Hinweise. Die bekannten Zahlenbereiche (siehe Abschnitt 5) und viele andere mathematische Objekte sind Mengen. Aber es ist aus logischen Gründen nicht möglich, daß alle Klassen Mengen sind. So ist die Klasse aller Mengen selbst keine Menge, und auch die Klasse aller Individuen (Allklasse) ist keine Menge.

Es wird hier ein begrifflicher Rahmen benutzt, der neben Mengen auch andere Klassen enthält. Man kann auch einen engeren Rahmen wählen, in dem nur Mengen vorkommen. Das wird in einer unreflektierten Weise oft gemacht, ist aber weder zwingend noch besonders vorteilhaft. Man muß dann z.B. in Kauf nehmen, daß gewisse sprachliche Ausdrücke (die Klassen bezeichnen, die keine Mengen sind) bedeutungslos werden.

2.3 Relationen und Funktionen

In der Mengenlehre zeigt man, daß man (geordnete) Paare von Individuen definieren kann, die auch wieder Individuen sind. Dann lassen sich Relationen und Funktionen als spezielle Klassen auffassen, und zwar Relationen als Klassen von Paaren und Funktionen als rechtseindeutige Relationen. Relationen und Funktionen können insbesondere Mengen sein, und bei den in der Praxis auftretenden Relationen und Funktionen ist das gewöhnlich der Fall.

2.4 Objektsprache und Metasprache

In der Logik unterscheidet man bei der Untersuchung eines logischen Systems zwischen der Objektsprache, die die formale Logiksprache des betreffenden logischen Systems ist und die das Objekt der logischen Untersuchung ist, und der Metasprache, in der diese Untersuchung erfolgt.

Die Objektsprache hat eine genau festgelegte Syntax, welche die wohlgeformten Ausdrücke der Sprache festlegt, und eine Semantik, die angibt, wie die Sprache zu interpretieren ist. Die in dieser Norm eingeführten sprachlichen Ausdrucksmittel konstituieren eine reichhaltige logische Sprache, die geeignet ist, mathematische Sachverhalte auszudrücken.

Als Metasprache, deren inhaltliches Verständnis vorausgesetzt werden muß, dient zunächst die natürliche Sprache, die man aber zugleich mit der Explikation der Objektsprache präzisiert und erweitert, indem man die objektsprachlichen Bezeichnungen in inhaltlicher Weise übernimmt.

Für die mathematische Praxis ist die Unterscheidung von Objektsprache und Metasprache nicht erforderlich und eine durchgängige Formalisierung gar nicht praktikabel. Es genügt, die objektsprachlichen formalen Ausdrücke bei Bedarf inhaltlich zu verwenden. Für eine systematische Explikation der Ausdrucksmittel ist jedoch eine Darstellung als formale logische Sprache zweckmäßig.

2.5 Variablen

In der Sprache verwendet man gebundene Variablen, um sich in allgemeiner Weise auf gewisse Objekte zu beziehen. Die Gesamtheit der Objekte, auf die sich eine Variable bezieht, bildet den Bereich der Variablen. In einer Interpretation der Sprache muß die Variable vereinbart sein, d.h. dieser Bereich muß festgelegt sein. Oft hat man eine einsortige Sprache, d.h. alle Variablen sind von derselben Sorte und haben bei Interpretationen jeweils denselben Bereich.

Die Bereiche von Individuenvariablen bestehen nur aus Individuen. Dabei redet man von universellen Individuenvariablen, wenn der Bereich die Allklasse ist, doch lassen sich auch Individuenvariablen spezieller Sorten einführen, deren Bereich jeweils aus den Individuen einer speziellen Sorte besteht. In dieser Norm stehen die Buchstaben x, y, z (bei Bedarf mit Unterscheidungsindizes) für Individuenvariablen, wobei darauf verzichtet wird, Voraussetzungen über die Bereiche genauer zu spezifizieren.

Wenn Variablen in einem Ausdruck frei vorkommen, so können sie - oft nur vorübergehend - mit einem Element aus ihrem Bereich belegt werden. Für eine Interpretation von Ausdrücken mit freien Variablen ist auch jeweils eine Belegung der freien Variablen erforderlich.

2.6 Konstanten

Konstanten sind Zeichen der Sprache, die für bestimmte Individuen, Klassen, Relationen oder Funktionen stehen. Eine Interpretation der Sprache legt diese Denotate für die Konstanten fest.

2.7 Formeln

Unter den Ausdrücken der Sprache gibt es insbesondere Formeln. Der Begriff "Formel" ist dabei im Sinne von "Aussageform" zu verstehen, d.h. es handelt sich um sprachliche Ausdrücke, die die Form einer Aussage haben, aber noch freie Variablen enthalten dürfen.

Man schreibt auch $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ für eine Formel φ , um Variablen $x_1, \dots, x_n$ hervorzuheben, die in der Formel frei vorkommen können. Eine Interpretation muß dann auch eine Belegung dieser freien Variablen enthalten. Wenn keine freien Variablen vorkommen, so liegt eine Aussage vor. Dann reicht es für die Interpretation, daß für die gebundenen Variablen Bereiche und für die Konstantensymbole Denotate bereitgestellt werden.

Formeln drücken Behauptungen aus und werden durch Wahrheitswerte W oder F bewertet. Wenn eine Formel bei einer Interpretation durch den Wahrheitswert W bewertet wird, so sagt man auch, sie sei wahr oder erfüllt (in der Interpretation). In der Logik betrachtet man Formeln als syntaktische Objekte einer Metatheorie, die Syntax und Semantik umfaßt. Der normale inhaltliche Gebrauch der Sprache besteht darin, eine Formel hinzuschreiben und sie dadurch (als erfüllt) zu behaupten. Die gemeinte Interpretation ist dabei dem Kontext zu entnehmen. Oft sind mehrere Interpretationen gemeint, etwa daß die Behauptung für alle Belegungen der freien Variablen oder alle Interpretationen gemeint ist, oder es wird die Behauptung in Abhängigkeit von den Werten gewisser Variablen gesehen.

In dieser Norm stehen die Buchstaben φ, ψ, θ für Formeln (bei syntaktischer Betrachtung) bzw. Behauptungen (bei inhaltlicher Verwendung).

2.8 Terme

Unter den Ausdrücken der Sprache gibt es ferner Terme. Diese haben als semantische Werte Objekte und können als Namen dieser Objekte (relativ zu einer Interpretation) aufgefaßt werden. Man redet von Individuentermen, wenn diese Objekte Individuen sind, wie es z.B. bei den Individuenvariablen der Fall ist. Die Werte von Termen können auch Klassen von Individuen, Relationen zwischen Individuen und Funktionen von Individuen in Individuen sein. Entsprechend kann man solche Terme als Klassenterme, Relationsterme bzw. Funktionsterme bezeichnen.

In dieser Norm stehen a, b für Individuen, A, B für Klassen, Q, R für Relationen, f, g für Funktionen (bei inhaltlicher Verwendung) bzw. für Individuentermine, Klassenterme, Relationsterme, Funktionsterme (bei syntaktischer Betrachtung).

3 Logik

3.1 Junktoren

Junktoren sind syntaktisch dadurch charakterisiert, daß sie Formeln zu neuen Formeln verbinden. Semantisch ist ein Junktor durch eine Wahrheitstafel charakterisiert, die in der Definitionsspalte angegeben ist. Für die Wahrheitswerte wird hier W (wahr) und F (falsch) geschrieben. In der englischsprachigen Literatur findet man T (true) und F (false). Man schreibt auch 1 für W und 0 für F.

Zu Klammerregeln und weiteren Junktoren siehe Anmerkungen.

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen															
3.1.1	$\neg \varphi$	nicht φ Negation von φ	<table><tr><td>φ</td><td>$\neg \varphi$</td></tr><tr><td>W</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>W</td></tr></table>	φ	$\neg \varphi$	W	F	F	W	Die Negation einer Gleichung oder einer mit einem Relationszeichen gebildeten Formel wird oft durch Durchstreichen angegeben. Man schreibt: $a \neq b$ für $\neg(a=b)$, $a \notin A$ für $\neg(a \in A)$.									
φ	$\neg \varphi$																		
W	F																		
F	W																		
3.1.2	$\varphi \wedge \psi$	φ und ψ , Konjunktion von φ und ψ	<table><tr><td>φ</td><td>ψ</td><td>$\varphi \wedge \psi$</td></tr><tr><td>W</td><td>W</td><td>W</td></tr><tr><td>F</td><td>W</td><td>F</td></tr><tr><td>W</td><td>F</td><td>F</td></tr><tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td></tr></table>	φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$	W	W	W	F	W	F	W	F	F	F	F	F	
φ	ψ	$\varphi \wedge \psi$																	
W	W	W																	
F	W	F																	
W	F	F																	
F	F	F																	
3.1.3	$\varphi \vee \psi$	φ oder ψ , Disjunktion von φ und ψ	<table><tr><td>φ</td><td>ψ</td><td>$\varphi \vee \psi$</td></tr><tr><td>W</td><td>W</td><td>W</td></tr><tr><td>F</td><td>W</td><td>W</td></tr><tr><td>W</td><td>F</td><td>W</td></tr><tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td></tr></table>	φ	ψ	$\varphi \vee \psi$	W	W	W	F	W	W	W	F	W	F	F	F	Es handelt sich um das einschließende Oder, bisweilen auch Und-oder genannt. Zum ausschließenden Entweder-oder siehe Anmerkungen. Als Merkhilfe: Das Zeichen $\vee$ erinnert an den ersten Buchstaben des lateinischen Wortes vel.
φ	ψ	$\varphi \vee \psi$																	
W	W	W																	
F	W	W																	
W	F	W																	
F	F	F																	

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
3.1.4	$\varphi \longrightarrow \psi$	Wenn φ , so ψ , Subjunktion von φ und ψ , φ subjungiert ψ , φ impliziert ψ	$\begin{array}{c c} \varphi & \psi & \varphi \longrightarrow \psi \\ \hline W & W & W \\ F & W & W \\ W & F & F \\ F & F & W \end{array}$	Für $\varphi \longrightarrow \psi$ wird auch $\varphi \implies \psi$ geschrieben. Man beachte, daß Subjunktion nicht dasselbe besagt wie logische Folgerung. Aus einer Formel folgt logisch eine Formel, wenn die damit gebildete Subjunktion allgemeingültig ist.
3.1.5	$\varphi \longleftrightarrow \psi$	φ genau dann, wenn ψ Äquijunktion von φ und ψ , φ äquivalent zu ψ	$\begin{array}{c c} \varphi & \psi & \varphi \longleftrightarrow \psi \\ \hline W & W & W \\ F & W & F \\ W & F & F \\ F & F & W \end{array}$	Für $\varphi \longleftrightarrow \psi$ wird auch $\varphi \iff \psi$ geschrieben. Man beachte, daß Äquijunktion nicht dasselbe besagt wie logische Äquivalenz. Zwei Formeln sind logisch äquivalent, wenn die damit gebildete Äquijunktion allgemeingültig ist.
3.1.6	T	Verum	$\begin{array}{c} T \\ \hline W \end{array}$	Verum ist eine logische Aussagenkonstante und kann als nullstelliger Junktör betrachtet werden, der für sich allein eine Formel ist.
3.1.7	$\perp$	Falsum	$\begin{array}{c} \perp \\ \hline F \end{array}$	Falsum ist eine logische Aussagenkonstante und kann als nullstelliger Junktör betrachtet werden, der für sich allein eine Formel ist.
3.1.8	$\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i$	Konjunktion über φ_i von 1 bis n	$\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i =_{\text{def}} \varphi_1, \quad \bigwedge_{i=1}^n \varphi_i =_{\text{def}} (\bigwedge_{i=1}^n \varphi_i \wedge \varphi_{n+1})$	Man schreibt auch $\bigwedge (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Als Grenzfall der leeren Konjunktion setzt man: $\bigwedge_{i=1}^0 \varphi_i =_{\text{def}} T$.
3.1.9	$\bigvee_{i=1}^n \varphi_i$	Disjunktion über φ_i von 1 bis n	$\bigvee_{i=1}^n \varphi_i =_{\text{def}} \varphi_1, \quad \bigvee_{i=1}^n \varphi_i =_{\text{def}} (\bigvee_{i=1}^n \varphi_i \vee \varphi_{n+1})$	Man schreibt auch $\bigvee (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$. Als Grenzfall der leeren Disjunktion setzt man: $\bigvee_{i=1}^0 \varphi_i =_{\text{def}} \perp$.

3.2 Quantoren

Quantoren sind syntaktisch dadurch charakterisiert, daß sie aus einer Formel in Verbindung mit einer Variablen, die dabei gebunden wird, eine Formel bilden. Bei den relativierten Quantoren tritt noch ein Klassenterm hinzu, auf den relativiert wird.

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
3.2.1	$\forall x \varphi(x)$ relativierter All-quantor: $\forall x \in A \varphi(x)$	Für alle x (gilt) $\varphi(x)$ Für alle x aus A (gilt) $\varphi(x)$	Semantik entsprechend der Sprechweise $\forall x (x \in A \longrightarrow \varphi(x))$	Man benutzt auch mehrstellige Allquantoren und Existenzquantoren: $\forall x_1, x_2, \dots, x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$ steht für $\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$ und $\exists x_1, x_2, \dots, x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$ steht für $\exists x_1 \exists x_2 \dots \exists x_n \varphi(x_1, \dots, x_n)$. Ferner benutzt man mehrstellige relativierte Allquantoren und Existenzquantoren: $\forall x_1 \dots x_n \in A \varphi(x_1, \dots, x_n)$ steht für $\forall x_1 \in A \dots \forall x_n \in A \varphi(x_1, \dots, x_n)$ und $\exists x_1 \dots x_n \in A \varphi(x_1, \dots, x_n)$ steht für $\exists x_1 \in A \dots \exists x_n \in A \varphi(x_1, \dots, x_n)$. Die relativierte Form erspart die Vereinbarung des Bereichs für die Variablen. Man setzt dann automatisch voraus, daß der Bereich der Variablen die Klasse A umfaßt.
3.2.2	$\exists x \varphi(x)$ relativierter Existenzquantor: $\exists x \in A \varphi(x)$	Es gibt (wenigstens) ein x mit $\varphi(x)$ Es gibt (wenigstens) ein x aus A mit $\varphi(x)$	Semantik entsprechend der Sprechweise $\exists x (x \in A \wedge \varphi(x))$	
3.2.3	$\exists^1 x \varphi(x)$ in relativierter Form: $\exists^1 x \in A \varphi(x)$	Es gibt genau ein x mit $\varphi(x)$ Es gibt genau ein x aus A mit $\varphi(x)$	$\exists y \forall x (\varphi(x) \longleftrightarrow x=y)$ $\exists y \in A \forall x \in A (\varphi(x) \longleftrightarrow x=y)$	Man schreibt auch $\exists! x \varphi(x)$. Das Zeichen $\exists^1$ wird empfohlen, da es sich leicht verallgemeinern läßt. So sind z.B. $\exists^n$ (es gibt genau n), $\exists^{>n}$ (es gibt mehr als n), $\exists^{\leq n}$ (es gibt höchstens n) sofort verständlich.

3.3 Kennzeichnungsoperator

Der Kennzeichnungsoperator ist syntaktisch dadurch charakterisiert, daß er aus einer Formel in Verbindung mit einer Variablen, die dabei gebunden wird, einen Term bildet. Dabei wird vorausgesetzt, daß $\exists_1 x \varphi(x)$ erfüllt ist.

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
3.3.1	$\iota x \varphi(x)$ in relativierter Form: $\iota x \in A \varphi(x)$	Das (eindeutig bestimmte) x mit $\varphi(x)$	Semantik entsprechend der Sprechweise $\iota x (x \in A \wedge \varphi(x))$	Es soll hier nicht festgelegt werden, wie zu ver- fahren ist, wenn $\neg \exists_1 x \varphi(x)$ erfüllt ist.
		Das (eindeutig bestimmte) x aus A mit $\varphi(x)$		

3.4 Modaloperatoren

Es wird in Abschnitt 3.4 ein Rahmen von Zuständen (möglichen Welten) und eine Erreichbarkeitsrelation zwischen Zuständen vorausgesetzt. Für die Bewertung einer Formel wird jeweils ein Zustand (Ausgangszustand, aktueller Zustand) zugrundegelegt.

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
3.4.1	$\Box \varphi$	Es ist notwendig, daß φ	In allen erreichbaren Zu- ständen (möglichen Wel- ten) ist φ erfüllt	
3.4.2	$\Diamond \varphi$	Es ist möglich, daß φ	Es gibt (wenigstens) einen erreichbaren Zustand (mögliche Welt), in dem φ erfüllt ist	
3.4.3	$[\alpha] \varphi$	Nach Ablauf von α gilt notwendigerweise φ	Wie in 3.4.1, wobei die- jenigen Zustände erreich- bar sind, zu denen das Programm α führt	Es wird in 3.4.3 und 3.4.4 vorausgesetzt, daß in der Sprache Ausdrücke für Programme vor- handen sind. Diese sind i. allg. indeterministisch, d.h. sie können von einem Ausgangszustand zu

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
3.4.4	$\langle \alpha \rangle \varphi$	Nach Ablauf von α gilt möglicherweise φ	Wie in 3.4.2, wobei diejenigen Zustände erreichbar sind, zu denen das Programm α führt	mehreren Endzuständen führen.

3.5 Metatheoretische Zeichen

Die folgenden Zeichen gehören nicht der Objektsprache an. Sie dienen dazu, Aussagen über diese Sprache zu machen.

Nr	Zeichen/Verwendung	Sprechweise/Benennung	Definition	Bemerkungen
3.5.1	$\mathcal{I} \models \varphi$	$\mathcal{I}$ erfüllt φ $\mathcal{I}$ ist Modell von φ	Die Interpretation $\mathcal{I}$ ordnet der Formel φ den Wahrheitswert W zu	Eine Interpretation $\mathcal{I}$ wird gegeben durch Bereiche für die gebundenen Variablen, durch Denotate für die Konstanten und durch eine Belegung, die den freien Variablen Werte aus ihrem Bereich zuweist. Die Bereiche und Konstantendenotate kann man zu einer Struktur zusammenfassen, wie es in Abschnitt 8 für den speziellen Fall, daß nur ein Bereich vorliegt, gemacht ist.
3.5.2	$\models \varphi$	φ ist allgemeingültig	Jede Interpretation erfüllt φ	
3.5.3	$\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$	Aus $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ folgt φ	Jede Interpretation, die $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ erfüllt, erfüllt auch φ	Man schreibt auch $\varphi_1, \dots, \varphi_n \Vdash \varphi$. Die Folgerung $\varphi_1, \dots, \varphi_n \models \varphi$ ist gleichbedeutend mit der Allgemeingültigkeit der Subjunktion $\models (\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_n \rightarrow \varphi)$.