

Zeichen der mathematischen Logik

DIN
5474

Signs in mathematical logic

Diese Norm dient dazu, die Zeichen der mathematischen Logik zu vereinheitlichen. Diese Zeichen werden auch kurz logische Zeichen genannt.

Die logischen Zeichen sind wesentliche Bausteine für eine formale Sprache, die mit der sogenannten Metasprache (das ist die Sprache, in der man über die formale Sprache spricht) nicht notwendig übereinstimmt. Als Metasprache dient in dieser Norm die um einige Fachausdrücke angereicherte mathematische Umgangssprache. Es wird nicht der Versuch unternommen, auch die Metasprache zu formalisieren.

Im folgenden ist jeweils unter Syntax (in den Abschnitten 1.2, 2.2, 3.2) beschrieben, wie Ausdrücke der formalen Sprache (d. h. Formeln, Terme, Relationszeichen und Funktionszeichen) aus kürzeren Ausdrücken mit Hilfe logischer Zeichen gebildet werden können.

Über die Bedeutung der Ausdrücke gibt es in der Logik verschiedene Auffassungen, von denen hier nur die sogenannte semantische betrachtet wird. Unter Semantik (in den Abschnitten 1.3, 2.3, 3.3) ist jeweils angegeben, was die mit logischen Zeichen zusammengesetzten Ausdrücke nach dieser Auffassung bei Interpretationen der formalen Sprache bedeuten.

Zusätze und Beispiele zu den in der Norm vorkommenden Begriffen sind in den Abschnitten 1.4, 2.4, 3.4 und in Abschnitt 4 (Syntax) und Abschnitt 5 (Semantik) zu finden.

1. Junktoren

1.1. Tabellarische Übersicht

1	2	3	4	5
Nr	Benennung	Zeichen	Verwendung	Sprechweise
1.1.1.	Negation	$\neg$	$\neg \varphi$	nicht φ
1.1.2.	Konjunktion	$\wedge$	$(\varphi \wedge \psi)$	φ und ψ
1.1.3.	Adjunktion, Alternation, Disjunktion	$\vee$	$(\varphi \vee \psi)$	φ oder ψ
1.1.4.	Subjunktion, Implikation	$\rightarrow$	$(\varphi \rightarrow \psi)$	φ Pfeil ψ wenn φ , so ψ
1.1.5.	Bisubjunktion, Äquijunktion, Äquivalenz	$\leftrightarrow$	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$	φ Doppelpfeil ψ φ genau dann, wenn ψ

Es wird empfohlen, die hervorgehobenen Benennungen zu benutzen.

Fortsetzung Seite 2 bis 6

1.2. Syntax

Junktoren sind Zeichen, durch die Formeln zu weiteren Formeln verbunden werden können:

Wenn φ, ψ Formeln sind, so auch $\neg \varphi, (\varphi \wedge \psi), (\varphi \vee \psi), (\varphi \rightarrow \psi), (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

1.3. Semantik

Der Wahrheitswert einer Formel, die mit einem Junktor aus Teilformeln gebildet ist, hängt nur von den Wahrheitswerten der Teilformeln ab. Bei den oben betrachteten Junktoren wird das durch die folgenden Wahrheitstabellen festgelegt:

φ	$\neg \varphi$
W	F
F	W

φ	ψ	$(\varphi \wedge \psi)$	$(\varphi \vee \psi)$	$(\varphi \rightarrow \psi)$	$(\varphi \leftrightarrow \psi)$
W	W	W	W	W	W
W	F	F	W	F	F
F	W	F	W	W	F
F	F	F	F	W	W

1.4. Zusätze

1.4.1. Andere Zeichen

Statt $\neg \varphi$ wird auch $\bar{\varphi}$ benutzt. Statt $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ sind auch die Zeichen $\Rightarrow$ bzw. $\Leftrightarrow$ gebräuchlich.

1.4.2. Einschließendes und ausschließendes Oder

Der Junktor $\vee$ symbolisiert das einschließende „Oder“ (siehe Wahrheitstafel in Abschnitt 1.3). Das ausschließende „Entweder, oder“, das der negierten Bisubjunktion entspricht und auch Antivalenz genannt wird, kann durch $\leftrightarrow$ dargestellt werden.

1.4.3. Klammerersparungsregeln

Aus systematischen Gründen sind bei den zweistelligen Junktoren immer Außenklammern vorgesehen. Wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, können Klammern weggelassen werden. Zu diesem Zweck wird zur Einsparung von Klammern vorgeschlagen:

- a) Außenklammern einer einzeln stehenden Formel können weggelassen werden.

b) $\wedge, \vee$ binden stärker als $\rightarrow, \leftrightarrow, \leftrightarrow$.

c) $\wedge, \vee$ binden unter sich gleich stark, ebenso $\rightarrow, \leftrightarrow, \leftrightarrow$.

d) In mehrgliedrigen Konjunktionen und mehrgliedrigen Adjunktionen mit Klammerung nach links können diese Klammern weggelassen werden.

Beispiel:

Die Formel $((\varphi \wedge \psi) \wedge \chi) \rightarrow (\chi \rightarrow \varphi)$ kann folgendermaßen abgekürzt werden:

$$\varphi \wedge \psi \wedge \chi \rightarrow (\chi \rightarrow \varphi).$$

Weitere Klammern dürfen nicht weggelassen werden.

Eine klammerfreie Schreibweise erhält man, wenn man die Syntax so abändert, daß die Junktoren den zu verknüpfenden Formeln vorangestellt werden.

1.4.4. Subjunktion und Folgebeziehungen

Man verwechsle nicht den Junktor $\rightarrow$ der formalen Sprache und die (metasprachlichen) Zeichen $\models, \vdash$ (siehe Abschnitte 4.7 und 5.5).

Wenn $(\varphi \rightarrow \psi)$ bei einer Interpretation erfüllt ist, so bedeutet das noch nicht, daß ψ aus φ folgt. Das ist erst dann der Fall, wenn $(\varphi \rightarrow \psi)$ bei jeder Interpretation erfüllt ist, d.h. allgemeingültig ist.

1.4.5. Bisubjunktion und logische Äquivalenz

Zwei Formeln φ, ψ sind „logisch äquivalent“, wenn die Bisubjunktion $(\varphi \leftrightarrow \psi)$ allgemeingültig ist. Wegen der Verwechslungsgefahr von logischer Äquivalenz und Bisubjunktion wird in Abschnitt 1.1.5 die erste Benennung empfohlen.

1.4.6. Generalisierte Subjunktion und Bisubjunktion

Statt $\wedge x (\varphi \rightarrow \psi)$ kann man auch $\varphi \rightarrow_x \psi$ schreiben, entsprechend für mehrere Variablen: $\varphi \rightarrow_{x,y} \psi$ und für Bisubjunktion: $\varphi \leftrightarrow_x \psi, \varphi \leftrightarrow_{x,z} \psi$.

1.4.7. Iterierte Subjunktionen und Bisubjunktionen

Iterierte Schreibweisen $\varphi_1 \rightarrow \varphi_2 \rightarrow \varphi_3 \dots$ oder $\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2 \leftrightarrow \varphi_3 \dots$ sollen oft iterierte Konjunktionen $(\varphi_1 \rightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \rightarrow \varphi_3) \wedge \dots$ oder $(\varphi_1 \leftrightarrow \varphi_2) \wedge (\varphi_2 \leftrightarrow \varphi_3) \wedge \dots$ darstellen.

1.4.8. Merkgeregeln

Das Zeichen $\neg$ erinnert an das mathematische Minuszeichen. Das Zeichen $\vee$ für „Oder“ ist der Anfangsbuchstabe des lateinischen Wortes vel. Das Konjunktionszeichen $\wedge$ erinnert an die Dualität zu $\vee$.

1.4.9. Aussagenkonstanten

Als Aussagenkonstanten können die Zeichen $\top$ (mit der Interpretation W) und $\perp$ (mit der Interpretation F) verwendet werden. $\top$ erinnert an True.