

Komplexe Größen

Benennungen

DIN
5475
Blatt 1

Complex quantities; nomenclature

In dieser Norm werden nach DIN 5483 und DIN 40 110 komplexe Größen durch Unterstreichen, Effektivwerte durch Großbuchstaben (z. B. $\underline{I}$, $\underline{U}$, $\underline{X}$), Augenblickswerte durch Kleinbuchstaben (z. B. i , u , x) und Scheitelwerte durch Kleinbuchstaben mit Dach (z. B. $\hat{i}$, $\hat{u}$, $\hat{x}$) gekennzeichnet. Scheitelwerte von Sinusgrößen werden nach DIN 1311 Blatt 1 Amplituden genannt.

1. Komplexe Größen, Allgemeines

Eine skalare physikalische Größe, deren Zahlenwert komplex ist, heißt komplex dargestellte Größe oder kurz komplexe Größe.

Beispiele: Komplexe Potentialfunktion $f(x + jy)$ eines zweidimensionalen elektrostatischen Feldes, komplexe Spannung, komplexer Widerstand, komplexe Leistung, komplexe Feldstärke, komplexer Schalldruck, komplexer Anklingkoeffizient, komplexer Ausbreitungskoeffizient.

Die komplexe Größe kann in der komplexen Ebene als Punkt dargestellt werden. Sie wird bei kartesischen orthogonalen Koordinaten durch Realteil und Imaginärteil, bei Polarkoordinaten durch Betrag und Winkel beschrieben.

2. Komplexe Sinusgrößen

Die im folgenden behandelten komplexen Größen beziehen sich auf zeitlich sinusförmig veränderliche Größen, kurz Sinusgrößen (siehe DIN 1311 Blatt 1 und DIN 40110). Komplexe Sinusgrößen sind der komplexe Augenblickswert (siehe Abschnitt 2.1), die komplexe Amplitude (siehe Abschnitt 2.2) und der komplexe Effektivwert (siehe Abschnitt 2.3). Weitere komplexe Größen siehe Abschnitt 3.

2.1. Komplexer Augenblickswert und physikalischer Augenblickswert

Der komplexe Augenblickswert einer Sinusgröße mit der Amplitude $\hat{x} = X/\sqrt{2}$, dem Nullphasenwinkel φ und der Kreisfrequenz ω ist

$$\underline{x}(t) = \hat{x} e^{j\varphi} e^{j\omega t} \quad (1)$$

Der physikalische Augenblickswert ist der Realteil des komplexen Augenblickswertes, z. B.

$$x(t) = \operatorname{Re} \underline{x}(t); \quad (2)$$

er ist gleich der halben Summe aus dem komplexen Augenblickswert $\underline{x}(t)$ und seinem konjugiert komplexen Wert $\underline{x}^*(t)$

$$x(t) = \frac{1}{2} [\underline{x}(t) + \underline{x}^*(t)]. \quad (3)$$

Bei der Darstellung in der komplexen Ebene ist der physikalische Augenblickswert gleich der Projektion des komplexen Augenblickswertes auf die reelle Achse.

2.2. Komplexe Amplitude

Die komplexe Amplitude der Sinusgröße ist

$$\underline{\hat{x}} = \hat{x} e^{j\varphi}. \quad (4)$$

Es gilt also auch nach den Gleichungen (1) und (2)

$$\underline{x}(t) = \underline{\hat{x}} e^{j\omega t}. \quad (5)$$

2.3. Komplexer Effektivwert

Der komplexe Effektivwert der Sinusgröße ist

$$\underline{X} = X e^{j\varphi} = \frac{1}{\sqrt{2}} \underline{\hat{x}}. \quad (6)$$

3. Weitere komplexe Größen bei Sinusvorgängen

Weitere komplexe Größen werden durch Quotienten von komplexen Sinusgrößen gleicher Frequenz, deren Logarithmen sowie durch Produkte solcher Sinusgrößen gebildet (Beispiele: komplexer Widerstand, komplexer Leitwert, komplexer Übertragungsfaktor, komplexe Leistung; siehe DIN 1344, DIN 5483, DIN 40148 Blatt 1, DIN 40110).

Die durch Quotienten gebildeten komplexen Größen werden auch komplexe Koeffizienten oder Operatoren genannt.

Beispiele: Der komplexe Widerstand (die komplexe Impedanz) $\underline{Z}$ ist der Quotient aus komplexer Spannung und komplexem Strom:

$$\underline{Z} = \frac{\underline{u}(t)}{\underline{i}(t)} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\underline{\hat{i}}} \quad (7)$$

In Gleichung (7) sind $\underline{u}(t)$ und $\underline{i}(t)$ komplexe Augenblickswerte, $\underline{U}$ und $\underline{I}$ komplexe Effektivwerte und $\underline{\hat{u}}$ und $\underline{\hat{i}}$ komplexe Amplituden für Spannung beziehungsweise Strom. Die komplexe Scheinleistung ist

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^* \quad (8)$$

mit den komplexen Effektivwerten $\underline{U}$ und $\underline{I}$ von Spannung und Strom. $\underline{I}^*$ ist der konjugiert komplexe Wert von $\underline{I}$. Sind $\underline{x}_1$ und $\underline{x}_2$ Sinusgrößen an zwei verschiedenen Orten, so ist z. B. das komplexe Dämpfungsmaß nach DIN 40148 Blatt 1

$$\underline{g} = a + jb = \ln \frac{\underline{\hat{x}}_1}{\underline{\hat{x}}_2}. \quad (9)$$

Fortsetzung Seite 2

4. Zeiger

Für die komplexen Sinusgrößen und für die komplexen Koeffizienten wird auch die Benennung „Zeiger“ angewendet.

Beschränkt man die Benennung Zeiger auf die komplexen Sinusgrößen, so ist für deren Quotienten die Benennung komplexe Koeffizienten oder Operatoren anzuwenden.

4.1. Zeigerdiagramm

Im Zeigerdiagramm (Zeigerbild) für Sinusgrößen stellt die Länge der Zeiger in einem geeigneten Maßstab den Effektivwert oder die Amplitude der Sinusgröße dar. Die Winkel zwischen den Zeigern eines Zeigerdiagrammes sind die Phasenwinkeldifferenzen zwischen den dargestellten Sinusgrößen. Gibt die Länge eines Zeigers die Amplitude der Sinusgröße an, so werden deren Augenblickswerte durch Projektion des Zeigers auf eine umlaufende Achse (Zeitlinie) oder durch Projektion des umlaufenden Zeigers auf eine feste Achse erhalten. Die Winkelgeschwindigkeit des Umlaufs entspricht der Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ der Sinusgrößen (siehe DIN 1311 Blatt 1).

Die Orientierung des Zeigerdiagramms in der Zeichenebene kann willkürlich gewählt werden. Gewöhnlich wird mit einem waagrecht oder einem senkrecht gezeichneten Zeiger begonnen (Zeiger der Ausgangsgröße). Die Lage der Projektionsachse zum Zeigerdiagramm im Zeitpunkt $t = 0$ bestimmt die Nullphasenwinkel der dargestellten Sinusgrößen. Der komplexe Augenblickswert $\underline{x}(t)$ kann rotierender Zeiger, der komplexe Effektivwert $\underline{X}$ oder die komplexe Amplitude $\underline{\hat{x}}$ ruhender Zeiger genannt werden.

Durch Division aller Spannungs- oder Stromzeiger eines Zeigerdiagramms durch eine Stromstärke beziehungsweise eine Spannung ergibt sich das Zeigerdiagramm für die komplexen Koeffizienten, das sind die komplexen Scheinwiderstände oder Scheinleitwerte.

5. Komplexer Vektor

Ein Vektor heißt komplexer Vektor, wenn seine Koordinaten komplexe Größen im Sinne der Abschnitte 1 und 2 sind.

Ist z. B. $\underline{V}$ ein solcher komplexer Vektor und sind $\underline{e}_1$, $\underline{e}_2$, $\underline{e}_3$ die drei Einsvektoren der Koordinaten, dann gilt

$$\underline{V} = \underline{V}_1 \underline{e}_1 + \underline{V}_2 \underline{e}_2 + \underline{V}_3 \underline{e}_3, \quad (10)$$

wobei $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$, $\underline{V}_3$ die komplexen Augenblickswerte, Amplituden oder Effektivwerte gleichfrequenter Sinusschwingungen sind.

Anmerkung 1: Sind $\underline{V}_1$, $\underline{V}_2$ und $\underline{V}_3$ die komplexen Augenblickswerte von gleichfrequenten und gleichphasigen Sinusgrößen, so kann man schreiben

$$\left. \begin{aligned} \underline{V}_1 &= \hat{V}_1 e^{j\varphi} e^{j\omega t} \\ \underline{V}_2 &= \hat{V}_2 e^{j\varphi} e^{j\omega t} \\ \underline{V}_3 &= \hat{V}_3 e^{j\varphi} e^{j\omega t} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

wobei $\hat{V}_1$, $\hat{V}_2$ und $\hat{V}_3$ die Amplituden der drei Koordinaten des Vektors sind. Aus Gleichung (10) wird damit

$$\underline{V} = \hat{V} e^{j\varphi} e^{j\omega t}. \quad (12)$$

Der Vektor $\underline{V}$ stellt in diesem Fall eine mit den Komponenten gleichfrequente und gleichphasige Sinusschwingung dar.

$$\hat{V} = \hat{V}_1 \underline{e}_1 + \hat{V}_2 \underline{e}_2 + \hat{V}_3 \underline{e}_3 \quad (13)$$

ist der Vektor des Scheitelwertes der Schwingung. Sein Betrag ist

$$\hat{V} = \sqrt{\hat{V}_1^2 + \hat{V}_2^2 + \hat{V}_3^2}. \quad (14)$$

Die Spitze des Vektors $\underline{V} = \text{Re}(\hat{V} e^{j\varphi} e^{j\omega t})$ schwingt auf einer festen Geraden, deren räumliche Richtung nach Gleichung (13) durch die drei Koordinaten und die drei Einsvektoren bestimmt ist.

Anmerkung 2: Sind $\underline{V}_1$ und $\underline{V}_2$ die komplexen Augenblickswerte gleichfrequenter aber nicht gleichphasiger Sinusschwingungen, so ist

$$\underline{V} = \underline{V}_1 \underline{e}_1 + \underline{V}_2 \underline{e}_2 \quad (15)$$

der Ausdruck für eine ebene, elliptisch polarisierte Schwingung.