

Schreibweise von Matrizen

DIN
5486

Notation of matrices

1. Begriff der Matrix

Eine (m, n) -Matrix ist ein (m, n) -tupel¹⁾ von Elementen, bei dem die Elemente üblicherweise in m Zeilen und n Spalten angeordnet werden. Die Elemente können Zahlen, Größen, Mengen, Funktionen, Tensoren, Operatoren und sogar selbst Matrizen sein oder sonst eine Bedeutung haben. Eine (m, n) -Matrix kann entweder aufgefaßt werden als ein System von m „ n -tupeln“ von Elementen oder als ein System von n „ m -tupeln“ von Elementen. Ist $m \neq n$, so spricht man von einer rechteckigen, ist $m = n$, von einer (n -reihigen) quadratischen Matrix. Wird das in der k -ten Zeile und in der l -ten Spalte stehende Element mit a_{kl} bezeichnet, so kann die Matrix in der folgenden Weise geschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

An Stelle der runden Klammern können eckige oder geschweifte verwendet werden. Das kürzere Zeichen (a_{kl}) ist ebenfalls gebräuchlich. Matrizen werden mit halbfetten Antiqua- oder mit Frakturbuchstaben gedruckt:

$$\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots \text{ oder } \mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \dots$$

Wenn kein Mißverständnis möglich ist, können auch gewöhnliche Buchstaben verwendet werden. Unter der Hauptdiagonale einer quadratischen Matrix versteht man diejenigen Elemente der Matrix, die in der von links oben nach rechts unten gehenden Diagonale stehen.

Nr	Zeichen	Benennung	Bemerkungen
2. Allgemeine Bezeichnungen der Matrizenrechnung			
2.01	a_{kl}	Element	a_k und a^{kl} werden auch benutzt. Die Elemente können reell oder komplex sein.
2.02	$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \mathbf{a} \text{ oder } \mathfrak{a}$	einspaltige Matrix	Für eine solche Matrix wird auch der Name „Spaltenvektor“ gebraucht (vgl. Anmerkungen).
2.03	$(a_1, a_2, \dots, a_n) = \mathbf{a}' \text{ oder } \mathfrak{a}'$	einzeilige Matrix	Eine einzeilige Matrix, auch „Zeilenvektor“ genannt, ist die Transponierte einer einspaltigen Matrix (Spaltenvektor). Die Transponierte einer Matrix ist in Nr 3.03 erklärt, wo auch weitere Zeichen für sie angegeben sind.
2.04	$\mathbf{O}, \mathfrak{O}$	Nullmatrix	Matrix, deren Elemente sämtlich den Wert Null haben.

¹⁾ Ein (m, n) -tupel ist ein System (geordnete Menge) von $m \times n$ Elementen; man spricht von einem Quadrupel von Elementen, einem Quintupel, allgemein von einem n -tupel.

Fortsetzung Seite 2 bis 5

Nr	Zeichen	Benennung	Bemerkungen
2.05	$D, \mathfrak{D}$	Diagonalmatrix	Quadratische Matrix, bei welcher die außerhalb der Hauptdiagonale stehenden Elemente sämtlich den Wert Null haben.
2.06	$E, \mathfrak{E}$	Einheitsmatrix, Einsmatrix	Die Einheitsmatrix ist eine Diagonalmatrix, deren in der Hauptdiagonale stehende Elemente sämtlich den Wert 1 haben.
2.07	$\det A, \det \mathfrak{A}$	Determinante von A	$\det A$ ist die aus den Elementen a_{ki} der quadratischen Matrix A gebildete Determinante.
2.08	$sp(A)$ oder $sp(\mathfrak{A})$	Spur von A	Die Spur der quadratischen Matrix A ist die Summe der in ihrer Hauptdiagonale stehenden Elemente.
2.09	$r(A)$ oder $r(\mathfrak{A})$	Rang von A	Die Matrix A hat den Rang r , wenn es in ihr eine r -reihige, nicht verschwindende Determinante gibt, während sämtliche Determinanten mit mehr als r Reihen verschwinden. Hat eine n -reihige quadratische Matrix A den Rang $r = n$, dann wird sie regulär genannt, ist $r < n$, dann singulär; $d = n - r$ wird Defekt der Matrix genannt.
2.10	$N(A)$ oder $\ A\ $ $N(\mathfrak{A})$ oder $\ \mathfrak{A}\ $	Norm von A	Die Norm der quadratischen Matrix A ist $N(A) = \left \sqrt{\sum_{k,i=1}^n a_{ki} ^2} \right $ (vgl. Anmerkungen).
2.11	$\lambda E - A$ $\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{A}$	charakteristische Matrix von A	Die charakteristische Matrix $\lambda E - A$ der quadratischen Matrix A ist gemäß den unter Nr 4.02 und Nr 4.03 erklärten Operationen zu bilden; λ ist dabei eine reelle oder komplexe Veränderliche.
2.12	$\det(\lambda E - A) = 0$ $\det(\lambda \mathfrak{E} - \mathfrak{A}) = 0$	charakteristische Gleichung von A	Die linke Seite der charakteristischen Gleichung ist ein Polynom vom n -ten Grade; es wird „charakteristisches Polynom“ der Matrix A genannt. Die Nullstellen dieses Polynoms heißen „charakteristische Zahlen“ oder „charakteristische Wurzeln“ der Matrix A (vgl. Anmerkungen).
3. Bezeichnung besonderer Matrizen			
3.01	$A^{-1}, \mathfrak{A}^{-1}$	Inverse (reziproke) Matrix von A , auch „die Inverse“ von A .	Die Inverse der regulären quadratischen Matrix A ist diejenige Matrix, die mit A multipliziert (von rechts oder links her) die Einheitsmatrix E ergibt (vgl. Nr 4.04). Die inverse Matrix existiert genau dann, wenn $\det A \neq 0$ ist. Es ist $AA^{-1} = A^{-1}A = E$.