

Statistische Auswertung von Daten

Bestimmung eines statistischen Anteilsbereichs

DIN
55 303
Teil 5

Statistical interpretation of data; determination of a statistical tolerance interval

Ersatz für Ausgabe 03.83

Sachliche Übereinstimmung mit der von der International Organization for Standardization (ISO) herausgegebenen Norm ISO 3207 – 1975 „Statistical interpretation of data; determination of a statistical tolerance interval“ und der hierzu erschienenen Ergänzung ISO 3207 – 1975/Addendum 1 – 1978.

Die Formblätter dieser Norm (siehe Seite 4 bis 7) unterliegen nicht dem Vervielfältigungs-Randvermerk.

Inhalt

	Seite		Seite
1 Zweck und Anwendungsbereich	2	5 Statistischer Anteilsbereich bei beliebiger stetiger Verteilung	3
2 Begriffe	2	6 Beispiele	3
3 Berechnung von $\bar{x}$ und s^2 als Schätzungen von Erwartungswert μ und Varianz σ^2 einer Zufallsgröße	2	6.1 Beispiel für die Formblätter 1 und 2	3
3.1 Berechnung von $\bar{x}$ und s^2 aus n Beobachtungswerten x_i ; $i = 1, \dots, n$	2	6.2 Beispiel für das Formblatt 3	3
3.2 Berechnung von $\bar{x}$ und s^2 aus einer Häufigkeitsverteilung	2	7 Formblätter	3
3.3 Berechnung von $\bar{x}$ und s^2 aus klassierten Werten	2	Formblatt 1: Statistischer Anteilsbereich für den Anteil p der Grundgesamtheit (bei Normalverteilung); Varianz bekannt	4
4 Statistischer Anteilsbereich bei Normalverteilung	2	Formblatt 2: Statistischer Anteilsbereich für den Anteil p der Grundgesamtheit (bei Normalverteilung); Varianz unbekannt	5
4.1 Erwartungswert μ und Standardabweichung σ der Normalverteilung sind bekannt	2	Formblatt 3: Statistischer Anteilsbereich für den Anteil p der Grundgesamtheit (bei beliebiger stetiger Verteilung)	6
4.2 Erwartungswert μ unbekannt, Standardabweichung σ bekannt	3	8 Statistische Tabellen	8
4.3 Erwartungswert μ und Standardabweichung σ unbekannt	3		

Fortsetzung Seite 2 bis 12

Ausschuß Qualitätssicherung und angewandte Statistik (AQS) im DIN Deutsches Institut für Normung e. V.

Jede Art der Vervielfältigung, auch auszugsweise, nur mit Genehmigung des DIN Deutsches Institut für Normung e. V., Berlin, gestattet.

1 Zweck und Anwendungsbereich

1.1 In dieser Norm werden Verfahren zur Bestimmung von statistischen Anteilsbereichen beschrieben.

Ein statistischer Anteilsbereich ist ein aus Stichprobenergebnissen berechneter Schätzbereich, der mindestens einen festgelegten Anteil p der Grundgesamtheit auf dem vorgegebenen Vertrauensniveau $1 - \alpha$ einschließt. Die Grenzen des statistischen Anteilsbereichs heißen Anteilsgrenzen. Sie sind Funktionen der Beobachtungswerte der Stichprobe, also Zufallsgrößen, und weisen daher im allgemeinen für jede Stichprobe andere Werte auf. Die aus einer längeren Folge von Stichproben errechneten statistischen Anteilsbereiche schließen mit einer relativen Häufigkeit, die annähernd gleich oder größer als $1 - \alpha$ ist, Anteile der Grundgesamtheit ein, die den festgelegten Anteil p mindestens erreichen.

Sind beide Anteilsgrenzen als Zufallsgrößen definiert, dann spricht man von einem „zweiseitig abgegrenzten statistischen Anteilsbereich“. Ist eine der beiden Grenzen keine Zufallsgröße, sondern stellt sie den kleinst- oder größtmöglichen endlichen oder unendlichen Wert der betrachteten Zufallsgröße dar, dann spricht man von einem „einseitig abgegrenzten statistischen Anteilsbereich“.

1.2 Für die Anwendung der Verfahren müssen Beobachtungswerte als Ergebnis stochastisch unabhängiger Beobachtungen jeder der betrachteten Zufallsgrößen vorliegen. Auf Beobachtungswerte aus Grundgesamtheiten endlichen Umfangs können die Verfahren dann angewendet werden, wenn die an den Stichprobeneinheiten gewonnenen Beobachtungswerte praktisch als stochastisch unabhängig angesehen werden können. Dies ist der Fall, wenn die Grundgesamtheiten ausreichend groß und im Verhältnis dazu die Stichproben ausreichend klein sind. Als Faustregel kann ein Verhältnis von kleiner 1 : 10 gelten.

1.3 Eine weitere – streng zu beachtende – Voraussetzung für die Anwendung der Verfahren des Abschnitts 4 dieser Norm und der darauf aufbauenden Formblätter 1 und 2 ist, daß die betrachteten Zufallsgrößen normalverteilt sind. Sie können als normalverteilt angesehen werden, wenn sich das begründen läßt, z. B. aus umfangreicher Erfahrung mit einschlägigem Datenmaterial.

Mit Testverfahren auf Normalverteilung, wofür sich eine Norm in Vorbereitung befindet, läßt sich die Nullhypothese testen, daß die betrachtete Zufallsgröße einer Normalverteilung folgt. Bei Verwerfen der Nullhypothese dürfen die Verfahren dieser Norm nicht zur Anwendung kommen, jedoch ist auch bei Nichtverwerfen der Nullhypothese keineswegs sicher, daß eine Normalverteilung vorliegt.

Mit Hilfe des Wahrscheinlichkeitsnetzes (siehe die Erläuterungen zu DIN 55303 Teil 2) ist eine visuelle Prüfung auf Normalverteilung möglich, mit der grobe Abweichungen von der Normalverteilung erkannt werden können. Da sich dabei oft auch die Art der Abweichung von der Normalverteilung erkennen läßt, bildet seine Anwendung eine Ergänzung der numerischen Testverfahren auf Normalverteilung.

In allen Zweifelsfällen sollten anstelle der Verfahren des Abschnitts 4 die des Abschnitts 5 angewendet werden, welche die Voraussetzung der Normalverteilung nicht verlangen.

2 Begriffe

Die in dieser Norm benutzten statistischen Begriffe sind in DIN 13303 Teil 1 und Teil 2 und in den Normen DIN 55350 definiert.

3 Berechnung von $\bar{x}$ und s^2 als Schätzungen von Erwartungswert μ und Varianz σ^2 einer Zufallsgröße

Der Mittelwert $\bar{x}$ /die Varianz s^2 ist ein aus theoretischen und praktischen Gründen brauchbarer Schätzwert für den gemeinsamen Erwartungswert μ /die gemeinsame Varianz σ^2 einer Reihe von Beobachtungen.

Die Standardabweichung s ist der gebräuchlichste Schätzwert für die Standardabweichung σ .

3.1 Berechnung von $\bar{x}$ und s^2 aus n Beobachtungswerten x_i , $i = 1, \dots, n$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{i=1}^n x_i^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right] \quad (2)$$

3.2 Berechnung von $\bar{x}$ und s^2 aus einer Häufigkeitsverteilung

Bei Vorliegen einer Häufigkeitsverteilung gibt n_j die Anzahl der Werte an, die gleich dem Wert x_j sind ($j = 1, \dots, k$).

Dabei gilt

$$n = \sum_{j=1}^k n_j \quad (3)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k n_j x_j \quad (4)$$

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \left[\sum_{j=1}^k n_j x_j^2 - \frac{1}{n} \left(\sum_{j=1}^k n_j x_j \right)^2 \right] \quad (5)$$

3.3 Berechnung von $\bar{x}$ und s^2 aus klassierten Werten

Ist die Anzahl n der Beobachtungswerte hinreichend groß (z. B. über 50), so kann es vorteilhaft sein, sie in Klassen aufzuteilen. Gelegentlich können die Beobachtungswerte bereits klassiert vorliegen. Wird die Anzahl der Klassen mit k , die Klassenmitte der Klasse j ($j = 1, \dots, k$) mit x_j und die Anzahl der Werte in Klasse j (Besetzungszahl) mit n_j bezeichnet, dann ergeben sich $\bar{x}$ und s^2 aus den Formeln des Abschnitts 3.2 als Näherungen an die Werte, die sich aus den unklassierten Werten ergeben würden.

4 Statistischer Anteilsbereich bei Normalverteilung

4.1 Erwartungswert μ und Standardabweichung σ der Normalverteilung sind bekannt

Bei bekanntem Erwartungswert μ und bekannter Standardabweichung σ ist die Normalverteilung vollständig bestimmt. In diesem Fall ist die Abgrenzung von Bereichen, die genau einen festgelegten Anteil p der Grundgesamtheit enthalten, ohne die Verwendung von Stichprobenergebnissen möglich.

Einseitige Abgrenzung: Genau der festgelegte Anteil p der Grundgesamtheit liegt

$$\text{oberhalb von } L_u = \mu - u_p \cdot \sigma \quad (6)$$

oder

$$\text{unterhalb von } L_o = \mu + u_p \cdot \sigma \quad (7)$$

Zweiseitige Abgrenzung: Genau der festgelegte Anteil p der Grundgesamtheit liegt zwischen

$$L_u = \mu - u_{(1+p)/2} \cdot \sigma \quad (8a)$$

und

$$L_o = \mu + u_{(1+p)/2} \cdot \sigma \quad (8b)$$

Dabei ist u_p das p -Quantil der standardisierten Normalverteilung. Zahlenwerte von u_p können den letzten Zeilen der Tabellen 1 und 2 entnommen werden.

4.2 Erwartungswert μ unbekannt, Standardabweichung σ bekannt

Das Verfahren zur Abgrenzung eines statistischen Anteilsbereichs ist in Formblatt 1 dargestellt. Der rechte Teil des Formblatts enthält die Berechnungen für das Beispiel des Abschnitts 6.1, wobei angenommen wird, daß $\sigma = 0,85$ N bekannt ist.

4.3 Erwartungswert μ und Standardabweichung σ unbekannt

Das Verfahren zur Abgrenzung eines statistischen Anteilsbereichs ist in Formblatt 2 dargestellt. Der rechte Teil des Formblatts enthält die Berechnungen für das Beispiel des Abschnitts 6.1.

5 Statistischer Anteilsbereich bei beliebiger stetiger Verteilung

Ist der Verteilungstyp einer stetigen Verteilung nicht bekannt und liegen n Beobachtungswerte als Ergebnis stochastisch unabhängiger Beobachtungen der betrachteten Zufallsgröße vor, dann lassen sich statistische Anteilsbereiche unter Verwendung der Rangwerte der Beobachtungsreihe abgrenzen. Die in dieser Norm beschriebenen Verfahren stützen sich auf die Extremwerte $x_{\min}$ oder $x_{\max}$ der Beobachtungsreihe.

Ein einseitiger statistischer Anteilsbereich mit der unteren Anteilsgrenze $L_u = x_{\min}$ (oder der oberen Anteilsgrenze $L_o = x_{\max}$) überdeckt beim Stichprobenumfang n auf dem Vertrauensniveau $1 - \alpha$ mindestens einen Anteil p der Grundgesamtheit, wenn die Beziehung

$$p^n = \alpha \quad (9)$$

gilt.

Ein zweiseitiger statistischer Anteilsbereich mit der unteren Anteilsgrenze $L_u = x_{\min}$ und der oberen Anteilsgrenze $L_o = x_{\max}$ überdeckt beim Stichprobenumfang n auf dem Vertrauensniveau $1 - \alpha$ mindestens einen Anteil p der Grundgesamtheit, wenn die Beziehung

$$np^{n-1} - (n-1)p^n = \alpha \quad (10)$$

gilt.

- Gibt man für n und $1 - \alpha$ Werte vor, so kann man aus diesen Beziehungen p berechnen.
- Gibt man für p und $1 - \alpha$ Werte vor, so kann man aus diesen Beziehungen n bestimmen.

Dann gilt:

Bei einseitiger Abgrenzung liegt mindestens der Anteil p der Grundgesamtheit auf dem Vertrauensniveau $1 - \alpha$ oberhalb von $x_{\min}$ (unterhalb von $x_{\max}$).

Bei zweiseitiger Abgrenzung liegt mindestens der Anteil p der Grundgesamtheit auf dem Vertrauensniveau $1 - \alpha$ zwischen $x_{\min}$ und $x_{\max}$.

Das Verfahren zur Abgrenzung eines statistischen Anteilsbereichs ist in Formblatt 3 dargestellt. Der rechte Teil des Formblatts und ein weiteres links- und rechtsseitig ausgefülltes Formblatt 3 enthalten die Berechnungen für das Beispiel des Abschnitts 6.2.

6 Beispiele

6.1 Beispiel für die Formblätter 1 und 2

Das Beispiel entspricht der Fertigung 2 des Beispiels 6.1 in DIN 55303 Teil 2.

Merkmal und Beobachtungsverfahren

Merkmal: Bruchkraft in Newton von Gewebestreifen

Beobachtungsverfahren: Zugversuch nach DIN 53857 Teil 1

Einheiten

Aus Fertigung 2 werden 12 Prüfstücke entnommen.

lfd. Nr des Prüfstückes	Bruchkraft in N
1	18,0
2	18,2
3	17,0
4	18,4
5	17,9
6	19,6
7	17,6
8	16,2
9	19,0
10	16,6
11	20,0
12	18,0

6.2 Beispiel für das Formblatt 3

Merkmal und Beobachtungsverfahren

Merkmal: Lebensdauer bis zum Bruch (in willkürlichen Einheiten) von bestimmten Flugzeugmotorteilen

Beobachtungsverfahren: Biegedauerfestigkeitsversuch

Einheiten

15 Flugzeugmotorteile bestimmter Art

Meßwerte der Lebensdauer (nach der Größe geordnet)

x
0,200
0,330
0,450
0,490
0,780
0,920
0,950
0,970
1,040
1,710
2,220
2,275
3,650
7,000
8,800

Die Lebensdauer kann nicht als normalverteilt angesehen werden.

7 Formblätter

Formblatt 1

Statistischer Anteilbereich für den Anteil p der Grundgesamtheit (bei Normalverteilung); Varianz bekannt

auszufüllendes Formblatt	
Merkmal und Beobachtungsverfahren:	
Einheiten:	
Bemerkungen:	
Abgrenzung des statistischen Anteilbereichs für den Anteil p : a) einseitig nach oben b) einseitig nach unten c) zweiseitig Bekannter Wert der Varianz: $\sigma^2 =$ der Standardabweichung: $\sigma =$ Zu erfassender Anteil der Grundgesamtheit: $p =$ Gewähltes Vertrauensniveau: $1 - \alpha =$ Anzahl der Beobachtungswerte: $n =$ Tabellenwerte: zu a) und b) siehe Tabelle 1 $k_{1b}(n, p, 1 - \alpha) =$ zu c) siehe Tabelle 2 $k_{2b}(n, p, 1 - \alpha) =$	
Berechnungen $\bar{x} =$ zu a) $L_o = \bar{x} + k_{1b}(n, p, 1 - \alpha) \cdot \sigma =$ zu b) $L_u = \bar{x} - k_{1b}(n, p, 1 - \alpha) \cdot \sigma =$ zu c) $L_u = \bar{x} - k_{2b}(n, p, 1 - \alpha) \cdot \sigma =$ $L_o = \bar{x} + k_{2b}(n, p, 1 - \alpha) \cdot \sigma =$	
Ergebnis bei a) Mindestens der Anteil $p =$ der Grundgesamtheit liegt auf dem Vertrauensniveau $1 - \alpha =$ unterhalb von $L_o =$ bei b) Mindestens der Anteil $p =$ der Grundgesamtheit liegt auf dem Vertrauensniveau $1 - \alpha =$ oberhalb von $L_u =$ bei c) Mindestens der Anteil $p =$ der Grundgesamtheit liegt auf dem Vertrauensniveau $1 - \alpha =$ zwischen $L_u =$ und $L_o =$	

Beispiel für ausgefülltes Formblatt	
Merkmal und Beobachtungsverfahren: <i>Bruchkraft von Gewebestreifen Zugversuch nach DIN 53 857 Teil 1</i>	
Einheiten: <i>Prüfstücke aus Fertigung 2 (siehe Abschnitt 6.1)</i>	
Bemerkungen: -	
Abgrenzung des statistischen Anteilbereichs für den Anteil p : a) einseitig nach oben b) einseitig nach unten c) zweiseitig Bekannter Wert der Varianz: $\sigma^2 =$ der Standardabweichung: $\sigma = 0,85 \text{ N}$ Zu erfassender Anteil der Grundgesamtheit: $p = 90 \%$ Gewähltes Vertrauensniveau: $1 - \alpha = 0,95$ Anzahl der Beobachtungswerte: $n = 12$ Tabellenwerte: zu a) und b) siehe Tabelle 1 $k_{1b}(n, p, 1 - \alpha) = 1,76$ zu c) siehe Tabelle 2 $k_{2b}(n, p, 1 - \alpha) =$	
Berechnungen $\bar{x} = 18,04 \text{ N}$ zu a) $L_o = \bar{x} + k_{1b}(n, p, 1 - \alpha) \cdot \sigma =$ zu b) $L_u = \bar{x} - k_{1b}(n, p, 1 - \alpha) \cdot \sigma = 16,5 \text{ N}$ zu c) $L_u = \bar{x} - k_{2b}(n, p, 1 - \alpha) \cdot \sigma =$ $L_o = \bar{x} + k_{2b}(n, p, 1 - \alpha) \cdot \sigma =$	
Ergebnis bei a) Mindestens der Anteil $p =$ der Grundgesamtheit liegt auf dem Vertrauensniveau $1 - \alpha =$ unterhalb von $L_o =$ bei b) Mindestens der Anteil $p = 90 \%$ der Grundgesamtheit liegt auf dem Vertrauensniveau $1 - \alpha = 0,95$ oberhalb von $L_u = 16,5 \text{ N}$ bei c) Mindestens der Anteil $p =$ der Grundgesamtheit liegt auf dem Vertrauensniveau $1 - \alpha =$ zwischen $L_u =$ und $L_o =$	
<i>Mindestens 90 % der aus Fertigung 2 entnehmbaren Prüfstücke haben auf dem Vertrauensniveau $1 - \alpha = 0,95$ eine Bruchkraft, die nicht kleiner ist als 16,5 N.</i>	