

Statistische Auswertung von Daten

Teil 7: Schätz- und Testverfahren bei zweiparametriger Weibull-Verteilung

DIN
55303-7

ICS 03.120.30

Deskriptoren: Qualitätsmanagement, statistische Auswertung, Schätzung, Weibullverteilung, Stichprobe

Statistical interpretation of data —

Part 7: Estimating and test procedures for Weibull distributions with two parameters

Interprétation statistique de données —

Partie 7: Méthodes de test et d'estimation pour lois de Weibull à 2 paramètres

Inhalt

	Seite		Seite
Vorwort	1	6.3 Einzeichnen der Stichprobendaten in das Weibull-Netz	3
1 Anwendungsbereich und Zweck	2	6.4 Beurteilung der Stichprobendaten	6
2 Normative Verweisungen	2	7 Vertrauensbereiche	6
3 Begriffe	2	7.1 Vertrauensbereich für den Formparameter β ...	6
4 Formelzeichen und Definitionsgleichungen	2	7.2 Vertrauensbereich für den Wert der Verteilungs- funktion $G(x)$ bei vorgegebenem Merkmalswert x ..	7
5 Punktschätzungen für den Formparameter β und den Skalenparameter θ der Verteilung	3	7.3 Vertrauensbereich für den Skalenparameter θ ..	7
5.1 Zensorisierte Stichprobe	3	7.4 Vertrauensbereich für x bei vorgegebenem Wert G der Verteilungsfunktion	7
5.2 Vollständige Stichprobe	3	8 Formblätter	8
6 Beurteilung von Stichprobenergebnissen	3	9 Beispiele	11
6.1 Das Weibull-Netz	3	10 Tabellen	18
6.2 Graphische Darstellung der geschätzten Verteilungsfunktion	3	Anhang A (informativ) Erläuterungen	23
		Anhang B (informativ) Literaturhinweise	23

Vorwort

Diese Norm wurde vom Normenausschuß Qualitätsmanagement, Statistik und Zertifizierungsgrundlagen (NQSZ), Arbeitsausschuß 2 "Angewandte Statistik" erarbeitet.

Zu den Normen der Reihe DIN 55303 gehören weiter DIN 55303-2 : 1984-05, Beiblatt 1 zu DIN 55303-2 : 1984-05 und DIN 55303-5 : 1987-02. E DIN 55303-6 : 1989-04 wurde durch E DIN ISO 11453 : 1992-08 ersetzt.

Anhang A und Anhang B sind informativ.

Fortsetzung Seite 2 bis 23

Normenausschuß Qualitätsmanagement, Statistik und Zertifizierungsgrundlagen (NQSZ)
im DIN Deutsches Institut für Normung e.V.
Normenausschuß Materialprüfung (NMP) im DIN

1 Anwendungsbereich und Zweck

1.1 Allgemeines

Diese Norm legt Schätzverfahren bei der zweiparametrischen Weibull-Verteilung anhand von Stichprobenergebnissen fest.

ANMERKUNG: Die dreiparametrische Weibull-Verteilung unterscheidet sich von der zweiparametrischen durch den Verschiebungsparameter x_0 (siehe Abschnitt 4), welcher eine Verschiebung der Verteilung auf der Merkmalsachse bewirkt.

Geschätzt werden die Parameter der Verteilung sowie der Unterschreitungsanteil bei betrachtetem Merkmalswert und der Wert des Quantils bei betrachtetem Unterschreitungsanteil. Es werden die Berechnungen von Punktschätzungen und von Vertrauensbereichen sowie eine Prüfung der Ergebnisse im Weibull-Netz im Hinblick auf die Voraussetzung "zweiparametrische Weibull-Verteilung" behandelt. Diese Norm ist fachübergreifend. Sie gilt für alle Bereiche wie z. B. Technik, Wirtschaft, Medizin, Wissenschaft und andere.

1.2 Vollständige und zensorisierte Stichproben

Als Grundlage für eine Schätzung wird eine Stichprobe von mehreren Einheiten herangezogen. Die aus den Einheiten gewonnenen Ermittlungsergebnisse stellen eine Stichprobe aus der Grundgesamtheit aller möglichen Ermittlungsergebnisse dar. Diese Stichprobe wird als "vollständige Stichprobe" bezeichnet, wenn Ermittlungsergebnisse von allen Stichprobeneinheiten vorliegen. Sie wird als "zensorisierte Stichprobe" bezeichnet, wenn nur von einem Teil der Stichprobeneinheiten Ermittlungsergebnisse vorliegen. Von den verschiedenen möglichen Arten der Zensorisierung werden hier die beiden folgenden betrachtet:

- Vorab festgelegte Anzahl $r < n$ der n Stichprobeneinheiten, von denen Merkmalswerte ermittelt werden sollen. Die Merkmalswerte, die an den n Stichprobeneinheiten ermittelt werden, fallen nach aufsteigenden Werten an, bis die vorab festgelegte Anzahl r erreicht ist; die weiteren $(n - r)$ Merkmalswerte, die bei Fortsetzung der Untersuchung gefunden würden, werden nicht mehr ermittelt.
- Vorab festgelegter größter Merkmalswert x' , wie z. B. eine Festigkeit, eine Zeitdauer oder eine Anzahl von Schaltzyklen. Die Stichprobe des Umfangs n wird bis zum Erreichen des größten Merkmalswertes x' beansprucht. Dann liegen Merkmalswerte $x \leq x'$ von r' Stichprobeneinheiten vor; die weiteren $(n - r')$ Merkmalswerte, die bei Fortsetzung der Untersuchung gefunden würden, werden nicht mehr ermittelt.

Diese Norm gilt streng nur für die vorab festgelegte Anzahl r . Sie gilt in ausreichender Näherung auch für den vorab festgelegten größten Merkmalswert x' . Im letzteren Fall ist in den nachfolgenden Formeln r durch r' zu ersetzen. Zur Bedeutung des Wortes "zensorisieren" sei darauf hingewiesen, daß es den Verzicht auf einen direkt oder indirekt festgelegten Anteil derjenigen Werte einer Stichprobe bedeutet, die bei vollständiger Untersuchung der Stichprobe ermittelt werden könnten. Dagegen bezeichnet das Wort "stutzen" den Verzicht auf einen Teil der Werte der Grundgesamtheit. In dieser Norm wird vorausgesetzt, daß die Grundgesamtheit nicht gestutzt ist.

ANMERKUNG: In dieser Norm werden nur vollständige und einfach zensorisierte Stichproben behandelt, nicht jedoch mehrfach zensorisierte Stichproben.

1.3 Wichtige Randbedingungen

Obwohl Mischverteilungen bei speziellen Merkmalen, beispielsweise bei Lebensdauern, vergleichsweise häufig vorkommen können, geht diese Norm von der Voraussetzung

aus, daß die Stichprobenergebnisse einer unvermischten Weibull-Verteilung entstammen. Deshalb ist es wichtig, daß sich der Anwender vor der Anwendung der in dieser Norm beschriebenen Verfahren davon überzeugt, daß eine unvermischte Weibull-Verteilung vorliegt (siehe Abschnitt 6).

Entsprechende Vorsicht ist – unter Einbeziehung aller verfügbaren Kenntnisse aus dem Fachgebiet, aus welchem die Stichprobe stammt – geboten bei jeglichen Extrapolationen in Bereiche der Häufigkeitssumme hinein, die nicht mit Meßwerten belegt sind; und zwar um so mehr, je weiter sich die beurteilende Betrachtung aus dem mit Meßwerten belegten Bereich entfernt.

Zur statistischen Auswertungsmethodik ist anzumerken, daß es unterschiedliche Näherungen gibt. Je besser die Näherung ist, um so größer ist im allgemeinen der Rechenaufwand. Die Methodik dieser Norm wurde gewählt, weil sie auch nur mit einem Taschenrechner angewendet werden kann. Das vielfach verwendete Näherungsverfahren unter Anwendung der kleinsten Abweichungsquadrate wird hier als nichthinreichende Näherung betrachtet.

2 Normative Verweisungen

Diese Norm enthält durch datierte oder undatierte Verweisungen Festlegungen aus anderen Publikationen. Diese normativen Verweisungen sind an den jeweiligen Stellen im Text zitiert, und die Publikationen sind nachstehend aufgeführt. Bei datierten Verweisungen gehören spätere Änderungen oder Überarbeitungen dieser Publikationen nur zu dieser Norm, falls sie durch Änderung oder Überarbeitung eingearbeitet sind. Bei undatierten Verweisungen gilt die letzte Ausgabe der in Bezug genommenen Publikation.

DIN 55350-14

Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik – Begriffe der Probenahme

DIN 55350-21

Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik – Begriffe der Statistik, Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen

DIN 55350-22

Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik – Begriffe der Statistik, Spezielle Wahrscheinlichkeitsverteilungen

DIN 55350-24

Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik – Begriffe der Statistik, Schließende Statistik

Übrige Normen der Reihe DIN 55350

Begriffe der Qualitätssicherung und Statistik

ISO 3534-1 : 1993

Statistics – Vocabulary and symbols – Part 1: Probability and general statistical terms

ISO 3534-2 : 1993

Statistics – Vocabulary and symbols – Part 2: Statistical quality control

ISO 3534-3 : 1985

Statistics – Vocabulary and symbols – Part 3: Design of experiments

3 Begriffe

In dieser Norm werden die Begriffe aus ISO 3534-1 : 1993, ISO 3534-2 : 1993, ISO 3534-3 : 1985 und der Normenreihe DIN 55350 verwendet, insbesondere diejenigen aus DIN 55350-14, DIN 55350-21, DIN 55350-22 und DIN 55350-24.

4 Formelzeichen und Definitionsgleichungen

X betrachtetes Merkmal

x Wert des Merkmals

x_G Quantil zum Unterschreitungsanteil G

$G(x)$ Verteilungsfunktion von X = Unterschreitungsanteil zum Wert x

$$R(x) = 1 - G(x)$$

- x_0 Verschiebungsparameter der dreiparametrischen Weibull-Verteilung
 β Formparameter der Weibull-Verteilung (Ausfallsteilheit)
 θ Skalenparameter der Weibull-Verteilung
 $\sim$ Kennzeichnung eines Schätzwertes
 $1-\alpha$ Vertrauensniveau
 n Stichprobenumfang
 r, r' Anzahl der Stichprobeneinheiten, von denen Ermittlungsergebnisse gewonnen wurden
 r/n Zensorisierungsgrad
 $x_{(1)}, x_{(2)}, x_{(3)}, \dots, x_{(r)}$ geordnete Stichprobe mit $r \leq n$ und $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(r)}$
 f Anzahl der Freiheitsgrade

Indizes

- un untere Vertrauensgrenze
ob obere Vertrauensgrenze
e einseitiger Vertrauensbereich
z hier: zweiseitiger Vertrauensbereich

Für die beiden Parameter θ und β werden in verschiedenen Anwendungsgebieten unterschiedliche Formelzeichen benutzt. Beispiele dafür finden sich in der nachfolgenden Tabelle 1.

Tabelle 1: Formelzeichen für Parameter der Weibull-Verteilung aus verschiedenen Anwendungsbereichen

Fachgebiet	Skalenparameter	Formparameter
diese Norm	θ	β
DIN 55350-22	b	k
Lebensdaueruntersuchungen	T	b
Materialprüfungen	σ_0	m

Die Verteilungsfunktion der Weibull-Verteilung lautet:

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq x_0 \\ 1 - \exp \left[- \left(\frac{x - x_0}{\theta} \right)^\beta \right] & \text{für } x \geq x_0 \end{cases} \quad (1)$$

Mit $x_0 = 0$ erhält man die in dieser Norm allein behandelte zweiparametrische Weibull-Verteilung mit der Verteilungsfunktion

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 - \exp \left[- (x/\theta)^\beta \right] & \text{für } x \geq 0 \end{cases} \quad (2)$$

5 Punktschätzungen für den Formparameter β und den Skalenparameter θ der Verteilung

5.1 Zensorisierte Stichprobe: $r < n$

$$\hat{\beta} = \frac{n K_{r,n}}{r \ln x_{(r)} - \sum_{i=1}^r \ln x_{(i)}} \quad (3)$$

$$\hat{\theta} = \exp \left(\ln x_{(r)} - \frac{c_{r,n}}{\hat{\beta}} \right) \quad (4)$$

Werte für $K_{r,n}$ und $c_{r,n}$ sind den Tabellen 9 und 10 zu entnehmen.

5.2 Vollständige Stichprobe: $r = n$

$$\hat{\beta} = \frac{n K_n}{\frac{s}{n-s} \sum_{i=s+1}^n \ln x_{(i)} - \sum_{i=1}^s \ln x_{(i)}} \quad (5)$$

$$\hat{\theta} = \exp \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln x_{(i)} + \frac{0,5772}{\hat{\beta}} \right) \quad (6)$$

mit $s = \text{ent}(0,84 n) = (\text{größte ganze Zahl} \leq 0,84 n)$.

Die Werte für K_n sind der Tabelle 11 zu entnehmen.

6 Beurteilung von Stichprobenergebnissen

6.1 Das Weibull-Netz

Das Wahrscheinlichkeitsnetz für die Weibull-Verteilung ist so konstruiert, daß die Verteilungsfunktion einer zweiparametrischen Weibull-Verteilung durch eine Gerade repräsentiert wird. Die Steigung der Geraden ist durch den Formparameter β bestimmt.

Es ist folgendermaßen aufgebaut:

Ordinateneinteilung für $G(x)$ nach der Funktion

$$\eta = \ln \left(\ln \frac{1}{1 - G(x)} \right)$$

Abszisseneinteilung für x nach der Funktion

$$\xi = \ln x \text{ oder } \zeta = \lg x$$

Entsprechende Formblätter sind im Handel.

In der Regel soll ein Weibull-Netz verwendet werden, dessen Ordinate von $G = 10^{-3} = 0,1\%$ bis $G = 0,999 = 99,9\%$ reicht.

Die Anzahl der erforderlichen Dekaden des Abszissenbereichs hängt vom Formparameter β ab.

6.2 Graphische Darstellung der geschätzten Verteilungsfunktion

Die Punktschätzungen $\hat{\beta}$ des Formparameters β und $\hat{\theta}$ des Skalenparameters θ legen eine Gerade im Weibull-Netz fest; diese Gerade wird zweckmäßigerweise durch folgende Punkte festgelegt:

$$\begin{aligned} x = \hat{\theta} & \quad G(x) = 0,6321 = 63,21\% \\ x = \hat{\theta} \cdot 0,01005^{1/\hat{\beta}} & \quad G(x) = 0,01 = 1\% \end{aligned}$$

Die Gerade wird in das Weibull-Netz eingezeichnet.

6.3 Einzeichnen der Stichprobendaten in das Weibull-Netz

6.3.1 Einzelwerte

Aus den Messungen an einer zensorisierten oder vollständigen Stichprobe liegen r bzw. n einzelne Merkmalswerte $x_{(i)}$ vor, geordnet in aufsteigender Reihenfolge.

Jedem solchen Merkmalswert $x_{(i)}$ wird ein Ordinatenwert

$$G_{n,i} = \frac{i - 0,3}{n + 0,4} \quad i = 1, 2, \dots, r \leq n \quad (7)$$

zugeordnet, wobei die Ordinatenwerte $G_{n,i}$ eine Näherung der Median-Ranks darstellen.

Die Werte der Funktion $G_{n,i}$ für die Stichprobenumfänge $n = 5$ bis $n = 46$ sind in Tabelle 2 angegeben.

Tabelle 2: Werte von $G_{n,i} = \frac{i - 0,3}{n + 0,4}$ in % für Stichprobenumfänge $5 \leq n \leq 46$

<i>i</i>	<i>n</i>													
	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	12,96	10,94	9,46	8,33	7,45	6,73	6,14	5,65	5,22	4,86	4,55	4,27	4,02	3,80
2	31,48	26,56	22,97	20,24	18,09	16,35	14,91	13,71	12,69	11,81	11,04	10,37	9,77	9,24
3	50,00	42,19	36,49	32,14	28,72	25,96	23,68	21,77	20,15	18,75	17,53	16,46	15,52	14,67
4	68,52	57,81	50,00	44,05	39,36	35,58	32,46	29,84	27,61	25,69	24,03	22,56	21,26	20,11
5	87,04	73,44	63,51	55,95	50,00	45,19	41,23	37,90	35,07	32,64	30,52	28,66	27,01	25,54
6	—	89,06	77,03	67,86	60,64	54,81	50,00	45,97	42,54	39,58	37,01	34,76	32,76	30,98
7	—	—	90,54	79,76	71,28	64,42	58,77	54,03	50,00	46,53	43,51	40,85	38,51	36,41
8	—	—	—	91,67	81,91	74,04	67,54	62,10	57,46	53,47	50,00	46,95	44,25	41,85
9	—	—	—	—	92,55	83,65	76,32	70,16	64,93	60,42	56,49	53,05	50,00	47,28
10	—	—	—	—	—	93,27	85,09	78,23	72,39	67,36	62,99	59,15	55,75	52,72
11	—	—	—	—	—	—	93,86	86,29	79,85	74,31	69,48	65,24	61,49	58,15
12	—	—	—	—	—	—	—	94,35	87,31	81,25	75,97	71,34	67,24	63,59
13	—	—	—	—	—	—	—	—	94,78	88,19	82,47	77,44	72,99	69,02
14	—	—	—	—	—	—	—	—	—	95,14	88,96	83,54	78,74	74,46
15	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	95,45	89,63	84,48	79,89
16	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	95,73	90,23	85,33
17	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	95,98	90,76
18	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	96,20
<i>i</i>	<i>n</i>													
	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
1	3,61	3,43	3,27	3,13	2,99	2,87	2,76	2,65	2,55	2,46	2,38	2,30	2,23	2,16
2	8,76	8,33	7,94	7,59	7,26	6,97	6,69	6,44	6,20	5,99	5,78	5,59	5,41	5,25
3	13,92	13,24	12,62	12,05	11,54	11,07	10,63	10,23	9,85	9,51	9,18	8,88	8,60	8,33
4	19,07	18,14	17,29	16,52	15,81	15,16	14,57	14,02	13,50	13,03	12,59	12,17	11,78	11,42
5	24,23	23,04	21,96	20,98	20,09	19,26	18,50	17,80	17,15	16,55	15,99	15,46	14,97	14,51
6	29,38	27,94	26,64	25,45	24,36	23,36	22,44	21,59	20,80	20,07	19,39	18,75	18,15	17,59
7	34,54	32,84	31,31	29,91	28,63	27,46	26,38	25,38	24,45	23,59	22,79	22,04	21,34	20,68
8	39,69	37,75	35,98	34,38	32,91	31,56	30,31	29,17	28,10	27,11	26,19	25,33	24,52	23,77
9	44,85	42,65	40,65	38,84	37,18	35,66	34,25	32,95	31,75	30,63	29,59	28,62	27,71	26,85
10	50,00	47,55	45,33	43,30	41,45	39,75	38,19	36,74	35,40	34,15	32,99	31,91	30,89	29,94
11	55,15	52,45	50,00	47,77	45,73	43,85	42,13	40,53	39,05	37,68	36,39	35,20	34,08	33,02
12	60,31	57,35	54,67	52,23	50,00	47,95	46,06	44,32	42,70	41,20	39,80	38,49	37,26	36,11
13	65,46	62,25	59,35	56,70	54,27	52,05	50,00	48,11	46,35	44,72	43,20	41,78	40,45	39,20
14	70,62	67,16	64,02	61,16	58,55	56,15	53,94	51,89	50,00	48,24	46,60	45,07	43,63	42,28
15	75,77	72,06	68,69	65,63	62,82	60,25	57,87	55,68	53,65	51,76	50,00	48,36	46,82	45,37
16	80,93	76,96	73,36	70,09	67,09	64,34	61,81	59,47	57,30	55,28	53,40	51,64	50,00	48,46
17	86,08	81,86	78,04	74,55	71,37	68,44	65,75	63,26	60,95	58,80	56,80	54,93	53,18	51,54

(fortgesetzt)

Tabelle 2 (fortgesetzt)

<i>i</i>	<i>n</i>													
	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32
18	91,24	86,76	82,71	79,02	75,64	72,54	69,69	67,05	64,60	62,32	60,20	58,22	56,37	54,63
19	96,39	91,67	87,38	83,48	79,91	76,64	73,62	70,83	68,25	65,85	63,61	61,51	59,55	57,72
20	—	96,57	92,06	87,95	84,19	80,74	77,56	74,62	71,90	69,37	67,01	64,80	62,74	60,80
21	—	—	96,73	92,41	88,46	84,84	81,50	78,41	75,55	72,89	70,41	68,09	65,92	63,89
22	—	—	—	96,88	92,74	88,93	85,43	82,20	79,20	76,41	73,81	71,38	69,11	66,98
23	—	—	—	—	97,01	93,03	89,37	85,98	82,85	79,93	77,21	74,67	72,29	70,06
24	—	—	—	—	—	97,13	93,31	89,77	86,50	83,45	80,61	77,96	75,48	73,15
25	—	—	—	—	—	—	97,24	93,56	90,15	86,97	84,01	81,25	78,66	76,23
26	—	—	—	—	—	—	—	97,35	93,80	90,49	87,41	84,54	81,85	79,32
27	—	—	—	—	—	—	—	—	97,45	94,01	90,82	87,83	85,03	82,41
28	—	—	—	—	—	—	—	—	—	97,54	94,22	91,12	88,22	85,49
29	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	97,62	94,41	91,40	88,58
30	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	97,70	94,59	91,67
31	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	97,77	94,75
32	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	97,84
<i>i</i>	<i>n</i>													
	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
1	2,10	2,03	1,98	1,92	1,87	1,82	1,78	1,73	1,69	1,65	1,61	1,58	1,54	1,51
2	5,09	4,94	4,80	4,67	4,55	4,43	4,31	4,21	4,11	4,01	3,92	3,83	3,74	3,66
3	8,08	7,85	7,63	7,42	7,22	7,03	6,85	6,68	6,52	6,37	6,22	6,08	5,95	5,82
4	11,08	10,76	10,45	10,16	9,89	9,64	9,39	9,16	8,94	8,73	8,53	8,33	8,15	7,97
5	14,07	13,66	13,28	12,91	12,57	12,24	11,93	11,63	11,35	11,08	10,83	10,59	10,35	10,13
6	17,07	16,57	16,10	15,66	15,24	14,84	14,47	14,11	13,77	13,44	13,13	12,84	12,56	12,28
7	20,06	19,48	18,93	18,41	17,91	17,45	17,01	16,58	16,18	15,80	15,44	15,09	14,76	14,44
8	23,05	22,38	21,75	21,15	20,59	20,05	19,54	19,06	18,60	18,16	17,74	17,34	16,96	16,59
9	26,05	25,29	24,58	23,90	23,26	22,66	22,08	21,53	21,01	20,52	20,05	19,59	19,16	18,75
10	29,04	28,20	27,40	26,65	25,94	25,26	24,62	24,01	23,43	22,88	22,35	21,85	21,37	20,91
11	32,04	31,10	30,23	29,40	28,61	27,86	27,16	26,49	25,85	25,24	24,65	24,10	23,57	23,06
12	35,03	34,01	33,05	32,14	31,28	30,47	29,70	28,96	28,26	27,59	26,96	26,35	25,77	25,22
13	38,02	36,92	35,88	34,89	33,96	33,07	32,23	31,44	30,68	29,95	29,26	28,60	27,97	27,37
14	41,02	39,83	38,70	37,64	36,63	35,68	34,77	33,91	33,09	32,31	31,57	30,86	30,18	29,53
15	44,01	42,73	41,53	40,38	39,30	38,28	37,31	36,39	35,51	34,67	33,87	33,11	32,38	31,68
16	47,01	45,64	44,35	43,13	41,98	40,89	39,85	38,86	37,92	37,03	36,18	35,36	34,58	33,84
17	50,00	48,55	47,18	45,88	44,65	43,49	42,39	41,34	40,34	39,39	38,48	37,61	36,78	35,99
18	52,99	51,45	50,00	48,63	47,33	46,09	44,92	43,81	42,75	41,75	40,78	39,86	38,99	38,15
19	55,99	54,36	52,82	51,37	50,00	48,70	47,46	46,29	45,17	44,10	43,09	42,12	41,19	40,30
20	58,98	57,27	55,65	54,12	52,67	51,30	50,00	48,76	47,58	46,46	45,39	44,37	43,39	42,46
21	61,98	60,17	58,47	56,87	55,35	53,91	52,54	51,24	50,00	48,82	47,70	46,62	45,59	44,61

(fortgesetzt)

Tabelle 2 (abgeschlossen)

<i>i</i>	<i>n</i>													
	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46
22	64,97	63,08	61,30	59,62	58,02	56,51	55,08	53,71	52,42	51,18	50,00	48,87	47,80	46,77
23	67,96	65,99	64,12	62,36	60,70	59,11	57,61	56,19	54,83	53,54	52,30	51,13	50,00	48,92
24	70,96	68,90	66,95	65,11	63,37	61,72	60,15	58,66	57,25	55,90	54,61	53,38	52,20	51,08
25	73,95	71,80	69,77	67,86	66,04	64,32	62,69	61,14	59,66	58,25	56,91	55,63	54,41	53,23
26	76,95	74,71	72,60	70,60	68,72	66,93	65,23	63,61	62,08	60,61	59,22	57,88	56,61	55,39
27	79,94	77,62	75,42	73,35	71,39	69,53	67,77	66,09	64,49	62,97	61,52	60,14	58,81	57,54
28	82,93	80,52	78,25	76,10	74,06	72,14	70,30	68,56	66,91	65,33	63,82	62,39	61,01	59,70
29	85,93	83,43	81,07	78,85	76,74	74,74	72,84	71,04	69,32	67,69	66,13	64,64	63,22	61,85
30	88,92	86,34	83,90	81,59	79,41	77,34	75,38	73,51	71,74	70,05	68,43	66,89	65,42	64,01
31	91,92	89,24	86,72	84,34	82,09	79,95	77,92	75,99	74,15	72,41	70,74	69,14	67,62	66,16
32	94,91	92,15	89,55	87,09	84,76	82,55	80,46	78,47	76,57	74,76	73,04	71,40	69,82	68,32
33	97,90	95,06	92,37	89,84	87,43	85,16	82,99	80,94	78,99	77,12	75,35	73,65	72,03	70,47
34	—	97,97	95,20	92,58	90,11	87,76	85,53	83,42	81,40	79,48	77,65	75,90	74,23	72,63
35	—	—	98,02	95,33	92,78	90,36	88,07	85,89	83,82	81,84	79,95	78,15	76,43	74,78
36	—	—	—	98,08	95,45	92,97	90,61	88,37	86,23	84,20	82,26	80,41	78,63	76,94
37	—	—	—	—	98,13	95,57	93,15	90,84	88,65	86,56	84,56	82,66	80,84	79,09
38	—	—	—	—	—	98,18	95,69	93,32	91,06	88,92	86,87	84,91	83,04	81,25
39	—	—	—	—	—	—	98,22	95,79	93,48	91,27	89,17	87,16	85,24	83,41
40	—	—	—	—	—	—	—	98,27	95,89	93,63	91,47	89,41	87,44	85,56
41	—	—	—	—	—	—	—	—	98,31	95,99	93,78	91,67	89,65	87,72
42	—	—	—	—	—	—	—	—	—	98,35	96,08	93,92	91,85	89,87
43	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	98,39	96,17	94,05	92,03
44	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	98,42	96,26	94,18
45	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	98,46	96,34
46	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	98,49

Die Punkte $(x_{(i)}, G_{n,i})$ werden in das Weibull-Netz eingetragen. Sie repräsentieren die Merkmalswerte der Stichprobe.

ANMERKUNG: Es gibt auch andere Funktionen $G_{n,i}$. Ihre Werte unterscheiden sich um so weniger von den in Tabelle 2 angegebenen, je größer n ist. Hier wird eine weit verbreitete Näherungsfunktion verwendet.

6.3.2 Klassierte Werte

An den oberen Klassengrenzen werden die bis zur betrachteten Merkmalsklasse aufsummierten Anteile eingetragen.

6.4 Beurteilung der Stichprobendaten

Werden bei einem Vergleich der nach Abschnitt 6.2 eingetragenen Geraden und der nach Abschnitt 6.3 eingetragenen Punkte systematische Abweichungen festgestellt, ist die Annahme einer unvermischten Weibull-Verteilung für die Stichprobenwerte zu verwerfen.

Systematische Abweichungen müssen im einzelnen untersucht werden, wobei das Wissen über die zugrundeliegenden technisch-physikalischen Zusammenhänge sowie die Ergebnisse vorausgegangener Untersuchungen herangezogen werden sollen.

Läßt sich z. B. die Folge der Stichprobenwerte durch Geradenabschnitte unterschiedlicher Steigungen annähern, so deutet dies auf das Vorliegen einer Mischverteilung hin.

7 Vertrauensbereiche

Die Formeln zur Berechnung der Vertrauensbereiche in den folgenden Unterabschnitten gelten für den zweiseitigen Fall. Im einseitigen Fall ist in den Formeln $\alpha/2$ durch α zu ersetzen. Eine ausführliche Anleitung zum Rechengang wird in den betreffenden Formblättern gegeben.

Das Vertrauensniveau $(1 - \alpha)$ ist vom Anwender der Norm unter Einbeziehung aller bekannten Risiken zum betrachteten Fall zu wählen.

7.1 Vertrauensbereich für den Formparameter β

(Ausführung der Berechnung siehe Formblatt A)

Die obere Grenze des zweiseitigen Vertrauensbereichs für den Formparameter β zum Vertrauensniveau $1 - \alpha$ beträgt

$$\beta_{\text{ob};z} = \hat{\beta} \frac{\chi^2_{f_1; 1-\alpha/2}}{f_1} \quad (8)$$

und die untere Grenze

$$\beta_{\text{un};z} = \hat{\beta} \frac{\chi_{f_1; \alpha/2}^2}{f_1} \quad (9)$$

mit $\hat{\beta}$ nach Abschnitt 5.

f_1 wird aus dem Tabellenwert der Tabelle 12 durch Multiplikation mit n errechnet. $\chi_{f_1; \alpha/2}^2$ und $\chi_{f_1; 1-\alpha/2}^2$ sind Quantile der Chi-Quadrat-Verteilung mit f_1 Freiheitsgraden (siehe Tabelle 15).

ANMERKUNG: f_1 ist abhängig vom Stichprobenumfang n und vom Zensorisierungsgrad r/n , jedoch nicht abhängig vom Schätzwert $\hat{\beta}$ des Formparameters β .

7.2 Vertrauensbereich für den Wert der Verteilungsfunktion $G(x)$ bei vorgegebenem Merkmalswert x

(Ausführung der Berechnung siehe Formblatt B)

Die Grenzen des zweiseitigen Vertrauensbereichs für G zum Vertrauensniveau $1-\alpha$ werden zu einem betrachteten Wert x der Variablen X in folgenden Schritten ermittelt:

Berechnung der Hilfsgröße y :

$$y = \hat{\beta} \ln \frac{\hat{\theta}}{x} = -\ln \left(\ln \frac{1}{1 - \hat{G}(x)} \right) \quad (10)$$

Berechnung der Hilfsgröße v :

$$v = By^2 - 2Cy + A \quad (11)$$

Die Werte A , B , C werden aus den Tabellenwerten der Tabelle 13 mittels Division durch n errechnet.

Ermittlung von f_2 und $H(f_2)$ nach Tabelle 14.

Berechnung der Hilfsgröße Y :

$$Y = \exp(-y + H(f_2)) \quad (12)$$

ANMERKUNG: Y und f_2 sind abhängig vom Schätzwert $\hat{G}(x)$, dem Stichprobenumfang n und dem Zensorisierungsgrad r/n , jedoch unabhängig vom Schätzwert $\hat{\beta}$ des Formparameters β .

Obere Vertrauensgrenze

$$G_{\text{ob};z} = 1 - \exp \left[-Y \frac{\chi_{f_2; 1-\alpha/2}^2}{f_2} \right] \quad (13)$$

Untere Vertrauensgrenze

$$G_{\text{un};z} = 1 - \exp \left[-Y \frac{\chi_{f_2; \alpha/2}^2}{f_2} \right] \quad (14)$$

7.3 Vertrauensbereich für den Skalenparameter θ

(Ausführung der Berechnung siehe Formblatt C)

7.3.1 Berechnung im allgemeinen Fall

Die Grenzen des zweiseitigen Vertrauensbereichs für den Skalenparameter θ zum Vertrauensniveau $1-\alpha$ werden iterativ ermittelt:

$$\theta_{\text{ob};z;j+1} = \frac{\theta_{\text{ob};z;j}}{\left[\ln \frac{1}{1 - G_{\text{un};z}(x = \theta_{\text{ob};z;j})} \right]^{1/\hat{\beta}}} \quad (15)$$

$$\theta_{\text{un};z;j+1} = \frac{\theta_{\text{un};z;j}}{\left[\ln \frac{1}{1 - G_{\text{ob};z}(x = \theta_{\text{un};z;j})} \right]^{1/\hat{\beta}}} \quad (16)$$

Die Iteration soll für $j = 0$ mit $\theta_{\text{ob};z;0} = \theta_{\text{un};z;0} = \hat{\theta}$ gestartet werden. Sie kann abgebrochen werden, wenn zwei aufeinanderfolgende Werte θ_{ob} bzw. θ_{un} sich nicht um mehr unterscheiden, als es im betrachteten Fall hinnehmbar ist.

7.3.2 Vereinfachte Berechnung bei vollständigen Stichproben

Bei vollständigen Stichproben kann folgende Beziehung verwendet werden:

$$\theta_{\text{ob};z}^* = \hat{\theta} \exp \left[-\frac{T_{n;\alpha/2}}{\hat{\beta}} \right] \quad (17)$$

$$\theta_{\text{un};z}^* = \hat{\theta} \exp \left[-\frac{T_{n;1-\alpha/2}}{\hat{\beta}} \right] \quad (18)$$

$T_{n;p}$ wird aus Tabelle 17 entnommen.

7.4 Vertrauensbereich für x bei vorgegebenem Wert G der Verteilungsfunktion

7.4.1 Berechnung im allgemeinen Fall

Die Berechnung des Vertrauensbereichs für den Merkmalswert x bei vorgegebenem Wert der Verteilungsfunktion $G(x) = G$ erfordert die Lösung der transzendenten Gleichungen

$$G_{\text{un};z}(x = x_{\text{ob};z}) = G_{\text{ob};z}(x = x_{\text{un};z}) = G$$

Die Lösungen dieser Gleichungen können durch Variation von x im Berechnungsgang nach Abschnitt 7.2 in fortschreitender Annäherung gewonnen werden.

In der Regel ist es weniger aufwendig, den Vertrauensbereich für x bei vorgegebenem $G(x) = G$ graphisch zu ermitteln. Dazu werden in das nach Abschnitt 6 gezeichnete Diagramm die nach Abschnitt 7 ermittelten Vertrauensgrenzen $G_{\text{ob};z}(x)$ und $G_{\text{un};z}(x)$ für mehrere x eingetragen und miteinander verbunden. An dem dadurch entstehenden Bereich können dann die Vertrauensgrenzen von x bei vorgegebenem $G(x) = G$ direkt abgelesen werden.

Dieses Verfahren ist bei niedrigen Werten $G(x)$ ungenau, da dann der Freiheitsgrad f_2 , der die Chi-Quadrat-Verteilung festlegt, kleiner als 1 wird. In diesem Fall müssen die Grenzkurven des Vertrauensbereichs für die Verteilungsfunktion $G(x)$ entweder graphisch oder rechnerisch linear extrapoliert werden.

Die graphische Extrapolation erlaubt eine direkte Ablesung der Vertrauensbereichsgrenzen von x bei vorgegebenem $G(x)$.

Soll der Vertrauensbereich für x bei vorgegebenem G durch rechnerische Extrapolation ermittelt werden, so wird ein geeigneter Wert $\hat{x}_1$ gewählt und nach Abschnitt 7.2 dafür der Vertrauensbereich der Verteilungsfunktion $\hat{G}(\hat{x}_1)$ ermittelt, wobei $\hat{x}_1$ etwa an der unteren Grenze des experimentell erfaßten Bereiches von x liegen soll. Man erhält die Vertrauensgrenzen $G_{\text{ob};z}(\hat{x}_1)$ und $G_{\text{un};z}(\hat{x}_1)$. Die Grenzen des Vertrauensbereichs für x bei vorgegebenem G werden dann nach folgenden Gleichungen berechnet:

$$x_{2;\text{ob};z} = \hat{x}_1 \left[\frac{\ln(1-G)}{\ln(1-G_{\text{un};z}(\hat{x}_1))} \right]^{1/\beta_{\text{ob};z}} \quad (19)$$

$$x_{2;\text{un};z} = \hat{x}_1 \left[\frac{\ln(1-G)}{\ln(1-G_{\text{ob};z}(\hat{x}_1))} \right]^{1/\beta_{\text{un};z}} \quad (20)$$

7.4.2 Vereinfachte Berechnung

Für $G \leq 0,632$ kann auch folgende Beziehung verwendet werden:

$$x_{3;\text{ob};z} = \theta_{\text{ob};z} \left[\ln \left(\frac{1}{1-G} \right) \right]^{1/\beta_{\text{ob};z}} \quad (21)$$

$$x_{3;\text{un};z} = \theta_{\text{un};z} \left[\ln \left(\frac{1}{1-G} \right) \right]^{1/\beta_{\text{un};z}} \quad (22)$$

$\theta_{\text{ob};z}$ und $\theta_{\text{un};z}$ siehe Abschnitt 7.3.