

DIN EN 61710

ICS 29.020

**Potenzgesetz-Modell –
Anpassungstests und Schätzverfahren
(IEC 61710:2013);
Deutsche Fassung EN 61710:2013**

Power law model –
Goodness-of-fit tests and estimation methods
(IEC 61710:2013);
German version EN 61710:2013

Modèle de loi en puissance –
Essais d'adéquation et méthodes d'estimation des paramètres
(CEI 61710:2013);
Version allemande EN 61710:2013

Gesamtumfang 54 Seiten

DKE Deutsche Kommission Elektrotechnik Elektronik Informationstechnik im DIN und VDE

Anwendungsbeginn

Anwendungsbeginn für die von CENELEC am 2013-06-26 angenommene Europäische Norm als DIN-Norm ist 2014-03-01.

Nationales Vorwort

Vorausgegangener Norm-Entwurf: E DIN IEC 61710:2010-06.

Für dieses Dokument ist das nationale Arbeitsgremium K 132 „Zuverlässigkeit“ der DKE Deutsche Kommission Elektrotechnik Elektronik Informationstechnik im DIN und VDE (www.dke.de) zuständig.

Die enthaltene IEC-Publikation wurde vom TC 56 „Dependability“ erarbeitet.

Das IEC-Komitee hat entschieden, dass der Inhalt dieser Publikation bis zu dem Datum (stability date) unverändert bleiben soll, das auf der IEC-Website unter „<http://webstore.iec.ch>“ zu dieser Publikation angegeben ist. Zu diesem Zeitpunkt wird entsprechend der Entscheidung des Komitees die Publikation

- bestätigt,
- zurückgezogen,
- durch eine Folgeausgabe ersetzt oder
- geändert.

Für den Fall einer undatierten Verweisung im normativen Text (Verweisung auf eine Norm ohne Angabe des Ausgabedatums und ohne Hinweis auf eine Abschnittsnummer, eine Tabelle, ein Bild usw.) bezieht sich die Verweisung auf die jeweils neueste gültige Ausgabe der in Bezug genommenen Norm.

Für den Fall einer datierten Verweisung im normativen Text bezieht sich die Verweisung immer auf die in Bezug genommene Ausgabe der Norm.

Der Zusammenhang der zitierten Normen mit den entsprechenden Deutschen Normen ergibt sich, soweit ein Zusammenhang besteht, grundsätzlich über die Nummer der entsprechenden IEC-Publikation. Beispiel: IEC 60068 ist als EN 60068 als Europäische Norm durch CENELEC übernommen und als DIN EN 60068 ins Deutsche Normenwerk aufgenommen.

Potenzgesetz-Modell –
Anpassungstests und Schätzverfahren
(IEC 61710:2013)

Power law model –
Goodness-of-fit tests and estimation methods
(IEC 61710:2013)

Modèle de loi en puissance –
Essais d'adéquation et méthodes d'estimation
des paramètres
(CEI 61710:2013)

Diese Europäische Norm wurde von CENELEC am 2013-06-26 angenommen. CENELEC-Mitglieder sind gehalten, die CEN/CENELEC-Geschäftsordnung zu erfüllen, in der die Bedingungen festgelegt sind, unter denen dieser Europäischen Norm ohne jede Änderung der Status einer nationalen Norm zu geben ist.

Auf dem letzten Stand befindliche Listen dieser nationalen Normen mit ihren bibliographischen Angaben sind beim CEN-CENELEC Management Centre oder bei jedem CENELEC-Mitglied auf Anfrage erhältlich.

Diese Europäische Norm besteht in drei offiziellen Fassungen (Deutsch, Englisch, Französisch). Eine Fassung in einer anderen Sprache, die von einem CENELEC-Mitglied in eigener Verantwortung durch Übersetzung in seine Landessprache gemacht und dem CEN-CENELEC Management Centre mitgeteilt worden ist, hat den gleichen Status wie die offiziellen Fassungen.

CENELEC-Mitglieder sind die nationalen elektrotechnischen Komitees von Belgien, Bulgarien, Dänemark, Deutschland, der ehemaligen jugoslawischen Republik Mazedonien, Estland, Finnland, Frankreich, Griechenland, Irland, Island, Italien, Kroatien, Lettland, Litauen, Luxemburg, Malta, den Niederlanden, Norwegen, Österreich, Polen, Portugal, Rumänien, Schweden, der Schweiz, der Slowakei, Slowenien, Spanien, der Tschechischen Republik, der Türkei, Ungarn, dem Vereinigten Königreich und Zypern.

CENELEC

Europäisches Komitee für Elektrotechnische Normung
European Committee for Electrotechnical Standardization
Comité Européen de Normalisation Electrotechnique

Management Centre: Avenue Marnix 17, B-1000 Brüssel

Vorwort

Der Text des Dokuments 56/1500/FDIS, zukünftige 2. Ausgabe der IEC 61710, erarbeitet vom IEC/TC 56 „Dependability“, wurde zur parallelen IEC-CENELEC-Abstimmung vorgelegt und von CENELEC als EN 61710:2013 angenommen.

Nachstehende Daten wurden festgelegt:

- spätestes Datum, zu dem dieses Dokument auf nationaler Ebene durch Veröffentlichung einer identischen nationalen Norm oder durch Anerkennung übernommen werden muss (dop): 2014-03-26
- spätestes Datum, zu dem nationale Normen, die diesem Dokument entgegenstehen, zurückgezogen werden müssen (dow): 2016-06-26

Es wird auf die Möglichkeit hingewiesen, dass einige Elemente dieses Dokuments Patentrechte berühren können. CENELEC [und/oder CEN] sind nicht dafür verantwortlich, einige oder alle diesbezüglichen Patentrechte zu identifizieren.

Anerkennungsnotiz

Der Text der Internationalen Norm IEC 61710:2013 wurde von CENELEC ohne irgendeine Abänderung als Europäische Norm angenommen.

In der offiziellen Fassung sind unter „Literaturhinweise“ zu den aufgelisteten Normen die nachstehenden Anmerkungen einzutragen:

IEC 61703	ANMERKUNG	Harmonisiert als EN 61703.
IEC 61164:2004	ANMERKUNG	Harmonisiert als EN 61164:2004 (nicht modifiziert).

Inhalt

	Seite
Vorwort	2
Einleitung	5
1 Anwendungsbereich	5
2 Normative Verweisungen	5
3 Begriffe	5
4 Formelzeichen und Abkürzungen	5
5 Potenzgesetz-Modell	7
6 Anforderungen an die Daten	7
6.1 Allgemeines	7
6.2 Fall 2 – Zeitangaben für Gruppen von relevanten Ausfällen für ein oder mehrere instand zu setzende Exemplare aus derselben Gesamtheit	9
6.3 Fall 3 – Zeitangaben für die relevanten Ausfälle von mehr als einer instand zu setzenden Einheit aus verschiedenen Gesamtheiten	9
7 Statistische Schätzung und Testverfahren	10
7.1 Überblick	10
7.2 Punktschätzung	10
7.3 Anpassungstests	13
7.4 Vertrauensbereiche für den Formparameter	15
7.5 Vertrauensbereiche für die Ausfalldichte	17
7.6 Prognosebereiche für die Dauer bis zu zukünftigen Ausfällen einer einzelnen Einheit	18
7.7 Test auf die Gleichheit der Werte der Formparameter $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$	20
Anhang A (informativ) Das Potenzgesetz-Modell – Hintergrundinformationen	26
Anhang B (informativ) Numerische Beispiele	27
Anhang C (informativ) Bayes-Schätzung für das Potenzgesetz-Modell	37
Literaturhinweise	51
Anhang ZA (normativ) Normative Verweisungen auf internationale Publikationen mit ihren entsprechenden europäischen Publikationen	52
 Bilder	
Bild 1 – Eine einzelne instand zu setzende Einheit	8
Bild 2 – Mehrere für die gleiche Zeitdauer beobachtete Exemplare einer instand zu setzenden Einheit	8
Bild 3 – Mehrere für unterschiedliche Zeitdauern beobachtete Exemplare einer instand zu setzenden Einheit	9
Bild B.1 – Akkumulierte Anzahl der Ausfälle über der Betriebsdauer eines Softwaresystems	28
Bild B.2 – Erwartete Ausfallzeitpunkte über den beobachteten akkumulierten Betriebszeiten bis zum Ausfall eines Softwaresystems	28
Bild B.3 – Akkumulierte Anzahl von Ausfällen über der Betriebsdauer für fünf Exemplare eines Systems	31
Bild B.4 – Akkumulierte Anzahl von Ausfällen über der Betriebsdauer für ein OEM-Produkt von den Lieferanten A und B	33

	Seite
Bild B.5 – Akkumulierte Anzahl von Ausfällen über der Betriebsdauer von Generatoren.....	34
Bild B.6 – Erwartete über der beobachteten akkumulierten Anzahl von Ausfällen von Generatoren	35
Bild C.1 – Diagramm der angepassten Gamma(6,7956; 0,0448)-a-priori-Verteilung für den Wert des Formparameters des Potenzgesetz-Modells.....	43
Bild C.2 – Diagramm der angepassten Gamma(17,7566; 1447,408)-a-priori-Verteilung für den Wert des Parameters „erwartete Ausfallanzahl“ des Potenzgesetz-Modells.....	43
Bild C.3 – Subjektive Verteilung der Anzahl von Ausfällen	47
Bild C.4 – Diagramm der A-posteriori-Wahrscheinlichkeitsdichte für die Anzahl <i>M</i> zukünftiger Ausfälle	50
Bild C.5 – Diagramm der A-posteriori-Verteilungsfunktion für die Anzahl <i>M</i> zukünftiger Ausfälle	50
 Tabellen	
Tabelle 1 – Kritische Werte für den Cramer-von-Mises-Anpassungstest bei einem Signifikanzniveau von 10 %.....	21
Tabelle 2 – Fraktile der Chi-Quadrat-Verteilung.....	22
Tabelle 3 – Faktoren für zweiseitige 90 %-Vertrauensbereiche für die Dichtefunktion bei durch Zeitablauf beendeter Prüfung.....	23
Tabelle 4 – Faktoren für zweiseitige 90 %-Vertrauensbereiche für die Dichtefunktion bei durch Ausfallzahl beendeter Prüfung	24
Tabelle 5 – 0,95-Fraktile der <i>F</i> -Verteilung	25
Tabelle B.1 – Alle relevanten Ausfälle und akkumulierten Betriebszeiten eines Softwaresystems	27
Tabelle B.2 – Berechnung der erwarteten akkumulierten Betriebszeiten bis zum Ausfall für Bild B.2	29
Tabelle B.3 – Akkumulierte Betriebszeiten für alle relevanten Ausfälle von fünf Exemplaren eines Systems (bezeichnet mit A, B, C, D, E).....	30
Tabelle B.4 – Zusammengefasste akkumulierte Betriebszeiten für mehrere Exemplare eines Systems	30
Tabelle B.5 – Akkumulierte Betriebsstunden bis zum Ausfall für ein OEM-Produkt von den Lieferanten A und B.....	32
Tabelle B.6 – Gruppierte Ausfalldaten von Generatoren.....	34
Tabelle B.7 – Berechnung der erwarteten Ausfallanzahlen für Bild B.6.....	36
Tabelle C.1 – Stärken und Schwächen von klassischer und von Bayes-Schätzung	38
Tabelle C.2 – Netz zur Erhebung der subjektiven Verteilung der Werte des Formparameters β	42
Tabelle C.3 – Netz zur Erhebung der subjektiven Verteilung der Werte des Parameters „erwartete Ausfallanzahl“ η	42
Tabelle C.4 – Vergleich der angepassten Gamma-Verteilung mit der subjektiven Verteilung des Wertes des Formparameters β	44
Tabelle C.5 – Vergleich der angepassten Gamma-Verteilung mit der subjektiven Verteilung des Wertes des Parameters „erwartete Ausfallanzahl“ η zum Zeitpunkt <i>T</i> = 20 000 h“	44
Tabelle C.6 – Betriebsdauern bis zum Ausfall eines zwei Jahre betriebenen Systems.....	45
Tabelle C.7 – Zusammenstellung der Schätzwerte für die Werte der Parameter des Potenzgesetz-Modells	46
Tabelle C.8 – Betriebsdauern bis zum Ausfall eines technischen Systems.....	49

Einleitung

Diese Internationale Norm beschreibt das Potenzgesetz-Modell und gibt eine schrittweise Anleitung für seine Anwendung. Es gibt mehrere Modelle zur Beschreibung der Funktionsfähigkeit instand zu setzender Einheiten, wobei das Potenzgesetz-Modell eines der am meisten verwendeten ist. Diese Norm liefert Verfahren zur Schätzung der Werte der Parameter des Potenzgesetz-Modells und zum Beurteilen, wie gut das Potenzgesetz-Modell die vorliegenden Daten beschreibt; darüber hinaus liefert sie Verfahren zur Bestimmung von Vertrauensbereichen für die Ausfalldichte und von Prognosebereichen für die Dauer bis zu zukünftigen Ausfällen. Dafür ist ein Datensatz derjenigen Zeitpunkte erforderlich, zu denen relevante Ausfälle an einer instand zu setzenden Einheit oder an mehreren gleichartigen Einheiten auftraten oder erkannt wurden, sowie der Zeitpunkt, zu dem die Beobachtung beendet wurde, wenn dieser sich von dem des letzten Ausfalls unterscheidet. Alle Ergebnisse beziehen sich lediglich auf den betrachteten Typ von Einheiten.

Einige der Verfahren können den Einsatz von Rechnerprogrammen erfordern, aber diese sind nicht über die Maßen kompliziert. Diese Norm stellt Algorithmen vor, auf deren Basis sich leicht Rechnerprogramme erstellen lassen sollten.

1 Anwendungsbereich

Diese Internationale Norm legt Verfahren fest zur Schätzung der Werte der Parameter des Potenzgesetz-Modells, zur Bestimmung von Vertrauensbereichen für die Ausfalldichte, zur Bestimmung von Prognosebereichen für die Dauer bis zu zukünftigen Ausfällen und zum Beurteilen, wie gut das Potenzgesetz-Modell die vorliegenden Daten instand zu setzender Einheiten beschreibt. Es wird davon ausgegangen, dass die Dauer bis zum Ausfall an einer Betrachtungseinheit bzw. an mehreren identischen erfasst wurde, die unter den gleichen Bedingungen arbeiten (z. B. Umwelt und Last).

2 Normative Verweisungen

Die folgenden Dokumente, die in diesem Dokument teilweise oder als Ganzes zitiert werden, sind für die Anwendung dieses Dokuments erforderlich. Bei datierten Verweisungen gilt nur die in Bezug genommene Ausgabe. Bei undatierten Verweisungen gilt die letzte Ausgabe des in Bezug genommenen Dokuments (einschließlich aller Änderungen).

IEC 60050-191:1990, *International Electrotechnical Vocabulary (IEV) – Chapter 191: Dependability and quality of service*

3 Begriffe

Für die Anwendung dieses Dokuments gelten die Begriffe nach IEC 60050-191.

4 Formelzeichen und Abkürzungen

Es gelten die folgenden Formelzeichen und Abkürzungen:

β	Formparameter des Potenzgesetz-Modells
$\hat{\beta}$	geschätzter Wert des Formparameters des Potenzgesetz-Modells
β_{LB}, β_{UB}	untere, obere Vertrauensgrenzen für β
C^2	Prüfgröße des Cramer-von-Mises-Anpassungstests
$C^2_{1-\gamma}(M)$	kritischer Wert für die Prüfgröße des Cramer-von-Mises-Anpassungstests zum Signifikanzniveau γ

χ^2	Prüfgröße des Chi-Quadrat-Anpassungstests
$\chi^2_\gamma(v)$	γ -Fraktile der χ^2 -Verteilung mit v Freiheitsgraden
d	Anzahl der Intervalle für Gruppen von Ausfällen
$E[N(t)]$	Erwartungswert der Ausfallanzahl bis zum Zeitpunkt t
$E[t_j]$	Erwartungswert der akkumulierten Betriebszeit bis zum j -ten Ausfall
$\hat{E}[N[t(i)]]$	Schätzwert für die bis $t(i)$ erwartete akkumulierte Ausfallanzahl
$\hat{E}[t_j]$	Schätzwert für die erwartete akkumulierte Betriebszeit bis zum j -ten Ausfall
$F_\gamma(\nu_1, \nu_2)$	γ -Fraktile der F -Verteilung mit (ν_1, ν_2) Freiheitsgraden
i	allgemeiner Index
j	allgemeiner Index
k	Anzahl Einheiten
L, U	Faktoren, die bei der Berechnung von Vertrauensbereichen für die Ausfalldichte verwendet werden
λ	Maßstabsparameter des Potenzgesetz-Modells
$\hat{\lambda}$	geschätzter Wert des Maßstabsparameters des Potenzgesetz-Modells
M	Parameter des Cramer-von-Mises-Tests
N	Anzahl von relevanten Ausfällen
N_j	Anzahl von Ausfällen der j -ten Einheit
$N(t)$	Ausfallanzahl bis zum Zeitpunkt t
$N[t(i)]$	Ausfallanzahl bis zum Zeitpunkt $t(i)$
R	Differenz zwischen der Ordnungszahl eines zukünftigen (prognostizierten) Ausfalls und der Ordnungszahl des letzten (beobachteten) Ausfalls
T	akkumulierte relevante Betriebszeit
T^*	gesamte akkumulierte relevante Betriebszeit für eine durch Zeitablauf beendete Prüfung
T_j	gesamte akkumulierte relevante Betriebszeit für die j -te Einheit
T_{RL}, T_{RU}	untere, obere Grenze des Prognosebereichs für die Dauer bis zum R -ten zukünftigen Ausfall
$\hat{T}_{N+1}$	geschätzte mittlere Dauer bis zum $(N+1)$ -ten Ausfall
t_i	akkumulierte relevante Betriebszeit bis zum i -ten Ausfall
t_{ij}	Zeitpunkt des i -ten Ausfalls der j -ten Einheit
t_N	gesamte akkumulierte relevante Betriebszeit einer durch Ausfallzahl beendeten Prüfung
t_{Nj}	gesamte akkumulierte relevante Betriebszeit bis zum N -ten Ausfall der j -ten Einheit
$t(i-1), t(i)$	Eckpunkte des i -ten Betriebsdauer-Intervalls bei gruppierten Ausfällen
$z(t)$	Ausfalldichte zum Zeitpunkt t

$\hat{z}(t)$ geschätzte Ausfalldichte zum Zeitpunkt t
 z_{LB}, z_{UB} untere, obere Vertrauensgrenzen für die Ausfalldichte

5 Potenzgesetz-Modell

Die statistischen Verfahren zur Anwendung des Potenzgesetz-Modells verwenden die relevanten Ausfall- und Betriebszeitdaten aus Prüffeld oder Feldversuchen. In diesem Abschnitt werden die grundlegenden Gleichungen für das Potenzgesetz-Modell angegeben. In Anhang A finden sich Hintergrundinformationen zum Modell und in Anhang B Beispiele für seine Anwendung.

Der Erwartungswert der Ausfallanzahl bis zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$E[N(t)] = \lambda t^\beta \text{ mit } \lambda > 0, \beta > 0, t > 0.$$

Dabei ist

λ der Maßstabsparameter;
 β der Formparameter ($0 < \beta < 1$ entspricht einer abnehmenden Ausfalldichte, $\beta = 1$ entspricht einer konstanten Ausfalldichte, $\beta > 1$ entspricht einer zunehmenden Ausfalldichte).

Die Ausfalldichte zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$z(t) = \frac{d}{dt} E[N(t)] = \lambda \beta t^{\beta-1} \text{ mit } t > 0.$$

Also beeinflussen beide Parameter λ und β die Ausfalldichte während einer vorgegebenen Zeit.

In 7.2 werden Verfahren für die Maximum-Likelihood-Schätzung der Werte der Parameter λ und β angegeben. Unterabschnitt 7.3 enthält Anpassungstests für das Modell, und 7.4 sowie 7.5 enthalten Verfahren zur Bestimmung von Vertrauensbereichen. Unterabschnitt 7.6 enthält Verfahren zur Bestimmung von Prognosebereichen, und 7.7 enthält statistische Tests für die Prüfung, ob sich Formparameter unterscheiden oder nicht. Das Modell lässt sich einfach anwenden. Wenn jedoch $\beta < 1$ ist, ist theoretisch $z(0) = \infty$ (d. h. $z(t)$ geht gegen unendlich, wenn t gegen null geht) und $z(\infty) = 0$ (d. h. $z(t)$ geht gegen null, wenn t gegen unendlich geht); aber diese theoretische Einschränkung beeinträchtigt seine praktische Anwendbarkeit im Allgemeinen nicht.

6 Anforderungen an die Daten

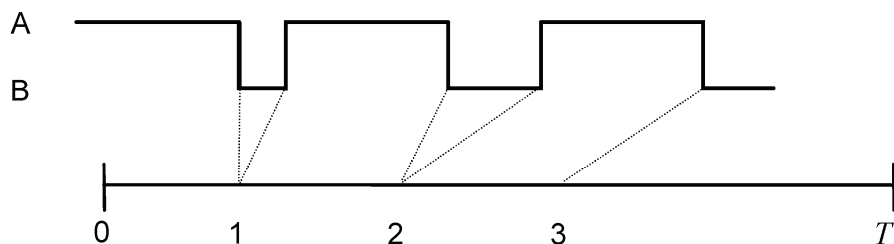
6.1 Allgemeines

6.1.1 Fall 1 – Zeitangaben für jeden relevanten Ausfall für ein oder mehrere Exemplare aus derselben Gesamtheit

Die üblichen Auswerteverfahren gehen davon aus, dass die beobachteten Zeiten die exakten Ausfallzeitpunkte einer einzelnen instand zu setzenden Einheit oder mehrerer gleichartiger instand zu setzender Exemplare sind. Die nachstehenden Bilder veranschaulichen, wie die Ausfallzeitpunkte für drei allgemeine Fälle berechnet werden.

6.1.2 Fall 1a) – Eine instand zu setzende Einheit

Für eine vom Zeitpunkt null bis zum Zeitpunkt T beobachtete instand zu setzende Einheit ist der relevante Ausfallzeitpunkt t_i die bis zum Auftreten des i -ten Ausfalls vergangene Betriebszeit (d. h. ohne Reparaturdauer und andere Unklarzeiten), wie in Bild 1 gezeigt.



Legende

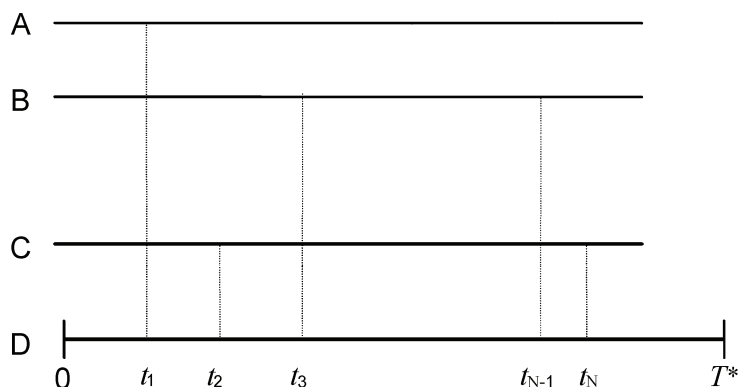
A Betriebszeit B Unklarzeit

Bild 1 – Eine einzelne instand zu setzende Einheit

Bei einer Prüfung, die durch Zeitablauf beendet wird, werden Daten bis zum Zeitpunkt T^* , der kein Ausfallzeitpunkt ist, erfasst, und bei einer Prüfung, die durch Ausfallzahl beendet wird, werden Daten bis zum Zeitpunkt t_N erfasst, welches der Zeitpunkt des N -ten Ausfalls ist. Die Verfahren für durch Zeitablauf und durch Ausfallzahl beendete Prüfungen verwenden etwas unterschiedliche Formeln.

6.1.3 Fall 1b) – Mehrere für die gleiche Zeitdauer beobachtete Exemplare ^{N1)} einer instand zu setzenden Einheit

Es wird angenommen, dass es k Exemplare gibt, die alle aus derselben Gesamtheit stammen. D. h. sie sind dem Namen nach identische Exemplare, die unter den gleichen Bedingungen betrieben werden (z. B. Umwelt und Last). Wenn alle Exemplare bis zum Zeitpunkt T^* beobachtet werden, der kein Ausfallzeitpunkt ist (d. h., es handelt sich um eine durch Zeitablauf beendete Prüfung), dann werden die Daten der Ausfallzeitpunkte zusammengefasst, indem wie in Bild 2 gezeigt alle Ausfallzeitpunkte (t_i , $i = 1, 2, \dots, N$) für alle k Exemplare auf derselben Zeitachse aufgetragen werden.



Legende

A Exemplar 1 C Exemplar k
B Exemplar 2 D überlagerter Prozess

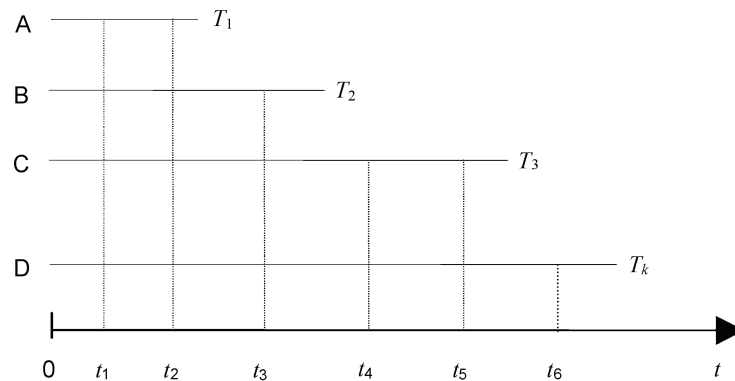
Bild 2 – Mehrere für die gleiche Zeitdauer beobachtete Exemplare einer instand zu setzenden Einheit

6.1.4 Fall 1c) – Mehrere für unterschiedliche Zeitdauern beobachtete Exemplare einer instand zu setzenden Einheit

Wenn die Exemplare nicht alle für die gleiche Zeitdauer betrieben werden, dann wird der Zeitpunkt T_j ($j = 1, 2, \dots, k$) mit $T_1 < T_2 < \dots < T_k$, zu dem die Beobachtung des j -ten Exemplars beendet wird, erfasst.

^{N1)} Nationale Fußnote: Im englischen Original missverständlich „item“; dies wurde in der deutschen Fassung richtiggestellt.

Die Ausfalldaten werden durch Überlagerung der Ausfallzeitpunkte aller k Exemplare auf derselben Zeitachse wie in Bild 3 gezeigt zusammengefasst. Die Betriebsdauern bis zum Ausfall seien t_i ($i = 1, 2, \dots, N$), wobei N die Anzahl der insgesamt an den k Exemplaren beobachteten Ausfälle ist.



Legende

A	Exemplar 1	D	Exemplar k
B	Exemplar 2	t	Zeit
C	Exemplar 3		

Bild 3 – Mehrere für unterschiedliche Zeitdauern beobachtete Exemplare einer instand zu setzenden Einheit

Wenn es sich bei den Einheiten um Softwaresysteme handelt, dann sollte eine Instandsetzungsmaßnahme auch die anderen Systeme, die nicht ausgefallen sind, betreffen.

6.2 Fall 2 – Zeitangaben für Gruppen von relevanten Ausfällen für ein oder mehrere instand zu setzende Exemplare aus derselben Gesamtheit

Dieses alternative Verfahren wird verwendet, wenn es mindestens ein Exemplar einer Einheit gibt und die Daten aus bekannten Zeitintervallen bestehen, von denen jedes eine bekannte Anzahl von Ausfällen enthält.

Der Beobachtungszeitraum erstreckt sich über das Intervall $(0, T)$ und ist an den Zeitpunkten $0 < t(1) < t(2) < \dots < t(d)$ in d Intervalle unterteilt. Das i -te Intervall ist die Zeitspanne zwischen $t(i-1)$ und $t(i)$, $i = 1, 2, \dots, d$, $t(0) = 0$ und $t(d) = T$. Es sollte beachtet werden, dass die Längen der Intervalle und die Anzahl der Ausfälle je Intervall nicht gleich sein müssen.

6.3 Fall 3 – Zeitangaben für die relevanten Ausfälle von mehr als einer instand zu setzenden Einheit aus verschiedenen Gesamtheiten

Es wird angenommen, dass es k Einheiten gibt, die nicht aus der gleichen Gesamtheit stammen und verglichen werden sollen. Es sollte beachtet werden, dass es, wenn jede Einheit einzeln betrachtet werden soll, angebracht ist, Fall 1a) aus 6.1.2 zu verwenden.

Wenn direkte Vergleiche von Einheiten angestellt werden sollen, dann werden als eine Erweiterung von 6.1 die folgenden Bezeichnungen verwendet:

t_{ij} bezeichnet den Zeitpunkt des i -ten Ausfalls für den Prozess, der zur j -ten Einheit gehört;

N_j bezeichnet die Anzahl der an der j -ten Einheit beobachteten Ausfälle;

t_{N_j} ist der Zeitpunkt des N -ten Ausfalls der j -ten Einheit;

mit $i = 0, 1, 2, \dots, N_j$ und $j = 1, 2, \dots, k$.

7 Statistische Schätzung und Testverfahren

7.1 Überblick

Im Fall 1 – Zeitangaben für jeden relevanten Ausfall – gehen die angegebenen Gleichungen für durch Ausfallzahl beendete Prüfungen von einer instand zu setzenden Einheit aus, d. h. $k = 1$. Alle Ergebnisse beziehen sich auf diese Einheit. Die Formeln für durch Zeitablauf beendete Prüfungen gehen von k Exemplaren der Einheit aus, die für dieselbe Zeitspanne beobachtet werden. Wenn es nur ein instand zu setzendes Exemplar gibt, dann gilt $k = 1$. Die Verfahren zur Punktschätzung für alle zuvor erwähnten Fälle finden sich in 7.2.1. Die entsprechenden Verfahren für den Fall, dass alle Exemplare für unterschiedlich lange Zeitspannen beobachtet werden, finden sich in 7.2.2. Verfahren für den Fall von Zeitangaben für Gruppen relevanter Ausfälle finden sich in 7.2.3.

Ein geeigneter Anpassungstest, wie zum Beispiel in 7.3 beschrieben, muss im Anschluss an die Verfahren zur Schätzung der Werte der Parameter aus 7.2 durchgeführt werden. Es ist zu beachten, dass diese Tests und die in 7.4 bis 7.7 angegebenen Verfahren zur Konstruktion von Intervallschätzungen und zur Durchführung statistischer Prüfverfahren nur zwischen den Fällen von Zeitangaben für jeden einzelnen relevanten Ausfall (d. h. alle Beispiele von Daten gemäß Fall 1, also 1a), 1b) und 1c)) und von Zeitangaben für Gruppen von relevanten Ausfällen (d. h. Fall 2) unterscheiden.

Die folgenden Herleitungen liefern in manchen Fällen näherungsweise Schätzungen, und daher ist Vorsicht geboten, wenn sie auf sehr kleine Stichproben von Daten angewendet werden sollen.

7.2 Punktschätzung

7.2.1 Fall 1a) und Fall 1b) – Zeitangaben für jeden relevanten Ausfall

Diese Methode ist nur anwendbar, wenn der Ausfallzeitpunkt für jeden Ausfall, wie in 6.1.2 und 6.1.3 beschrieben, aufgezeichnet worden ist.

Schritt 1: Berechnung der Summen

$$S_1 = \sum_{j=1}^N \ln \left(\frac{T^*}{t_j} \right) \quad (\text{durch Zeitablauf beendete Prüfung}),$$

$$S_2 = \sum_{j=1}^N \ln \left(\frac{t_N}{t_j} \right) \quad (\text{durch Ausfallzahl beendete Prüfung}).$$

Schritt 2: Berechnung des (erwartungstreuen) Schätzwertes für den Formparameter β mit der Gleichung

$$\hat{\beta} = \frac{N-1}{S_1} \quad (\text{durch Zeitablauf beendete Prüfung}),$$

$$\hat{\beta} = \frac{N-2}{S_2} \quad (\text{durch Ausfallzahl beendete Prüfung}).$$

Schritt 3: Berechnung des Schätzwertes für den Maßstabsparameter λ mit der Gleichung

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{k(T^*)^{\hat{\beta}}} \quad (\text{durch Zeitablauf beendete Prüfung}),$$

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{k(t_N)^{\hat{\beta}}} \quad (\text{durch Ausfallzahl beendete Prüfung}).$$

Schritt 4: Berechnung des Schätzwertes der Ausfalldichte $z(t)$ für jeden Zeitpunkt $t > 0$ mit der Gleichung

$$\hat{z}(t) = \hat{\lambda} \hat{\beta} t^{\hat{\beta}-1}.$$

$\hat{z}(t)$ schätzt die momentane Ausfalldichte für t über dem von den Daten repräsentierten Bereich. „Extrapolierte“ Schätzwerte für einen Zeitpunkt t in der Zukunft können auf ähnliche Weise erhalten werden, sollten aber mit der bei Extrapolation üblichen Vorsicht verwendet werden.

Schritt 5: Wenn N Ausfälle beobachtet worden sind, von denen der letzte zum Zeitpunkt t_N auftrat, dann kann die mittlere Dauer bis zum $(N+1)$ -ten Ausfall mit folgender Gleichung geschätzt werden:

$$\hat{T}_{N+1} = t_N \exp \left[\frac{-1}{N\hat{\beta}/(N-1)} \right] \quad (\text{durch Zeitablauf beendete Prüfung}),$$

$$\hat{T}_{N+1} = t_N \exp \left[\frac{-1}{N\hat{\beta}/(N-2)} \right] \quad (\text{durch Ausfallzahl beendete Prüfung}).$$

7.2.2 Fall 1c) – Zeitangaben für jeden relevanten Ausfall

Diese Methode ist nur anwendbar, wenn der Ausfallzeitpunkt für jeden Ausfall wie in 6.1.4 beschrieben aufgezeichnet worden ist.

Schritt 1: Ermitteln der Betriebsdauern t_i bis zum Ausfall, $i = 1, 2, \dots, N$, aus den erfassten Daten; dabei ist N die über alle k Exemplare summierte Ausfallanzahl, und T_j , $j = 1, 2, \dots, k$, ist der Zeitpunkt, zu dem die Beobachtung des j -ten Exemplars beendet wurde.

Schritt 2: Die Maximum-Likelihood-Schätzung für den Wert des Formparameters β liefert derjenige Wert $\hat{\beta}$, der die folgende Gleichung erfüllt:

$$\frac{N}{\hat{\beta}} + \sum_{i=1}^N \ln t_i - \frac{N \sum_{j=1}^k T_j^{\hat{\beta}} \ln T_j}{\sum_{j=1}^k T_j^{\hat{\beta}}} = 0.$$

Für die Auflösung der Gleichung nach $\hat{\beta}$ muss ein Iterationsverfahren verwendet werden.

Schritt 3: Berechnung des Schätzwertes für den Maßstabsparameter λ mithilfe der Gleichung

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{\sum_{j=1}^k T_j^{\hat{\beta}}}.$$

Schritt 4: Berechnung des Schätzwertes für die Ausfalldichte $z(t)$ für jeden Zeitpunkt $t > 0$ mithilfe der Gleichung

$$\hat{z}(t) = \hat{\lambda} \hat{\beta} t^{\hat{\beta}-1}.$$

$\hat{z}(t)$ schätzt die momentane Ausfalldichte für t über dem von den vorliegenden Daten beschriebenen Bereich. „Extrapolierte“ Schätzwerte für einen Zeitpunkt t in der Zukunft können auf ähnliche Weise erhalten werden, sollten aber mit der bei Extrapolation üblichen Vorsicht verwendet werden.

7.2.3 Fall 2 – Zeitangaben für Gruppen von relevanten Ausfällen

Diese Methode ist anwendbar, wenn der Datensatz aus bekannten Zeitintervallen besteht, von denen jedes eine bekannte Anzahl von Ausfällen enthält, wie in 6.2 beschrieben.

Schritt 1: Zusammenstellen eines Datensatzes, der die Anzahl der relevanten Ausfälle N_i enthält, die im i -ten Intervall $[(t(i-1), t(i)]$, $i = 1, 2, \dots, d$, erfasst wurden. Die Gesamtzahl der relevanten Ausfälle ist

$$N = \sum_{i=1}^d N_i.$$

Schritt 2: Die Maximum-Likelihood-Schätzung für den Formparameter β liefert derjenige Wert $\hat{\beta}$, der die folgende Gleichung erfüllt:

$$\sum_{i=1}^d N_i \left[\frac{[t(i)]^{\hat{\beta}} \ln t(i) - [t(i-1)]^{\hat{\beta}} \ln t(i-1)}{[t(i)]^{\hat{\beta}} - [t(i-1)]^{\hat{\beta}}} - \ln t(d) \right] = 0.$$

Es ist zu beachten, dass $[t(0)]^{\hat{\beta}} = 0$ und $[t(0)]^{\hat{\beta}} \ln t(0) = 0$ gilt. Alle $t(\cdot)$ -Terme können bezüglich $t(d)$ normiert werden, und dann verschwindet der letzte Term $\ln[t(d)]$. Um die Gleichung nach $\hat{\beta}$ aufzulösen, muss ein Iterationsverfahren verwendet werden.

Schritt 3: Berechnung des Schätzwertes für den Maßstabsparameter λ mithilfe der Gleichung

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{t(d)^{\hat{\beta}}}.$$

Schritt 4: Berechnung des Schätzwertes für die Ausfalldichte $z(t)$ für jeden Zeitpunkt $t > 0$ mithilfe der Gleichung

$$\hat{z}(t) = \hat{\lambda} \hat{\beta} t^{\hat{\beta}-1}.$$

Dabei schätzt $\hat{z}(t)$ die momentane Ausfalldichte für t über dem von den vorliegenden Daten beschriebenen Bereich. „Extrapolierte“ Schätzwerte für einen Zeitpunkt t in der Zukunft können auf ähnliche Weise erhalten werden, sollten aber mit der bei Extrapolation üblichen Vorsicht verwendet werden.

7.3 Anpassungstests

7.3.1 Fall 1 – Zeitangaben für jeden relevanten Ausfall

7.3.1.1 Cramer-von-Mises-Test

Schritt 1: Berechnung von $\hat{\beta}$ gemäß Schritt 2 in 7.2.1 oder Schritt 2 in 7.2.2.

Schritt 2: Berechnung der Prüfgröße für den Cramer-von-Mises-Anpassungstest mithilfe der Gleichung

$$C^2 = \frac{1}{12M} + \sum_{j=1}^M \left[\left(\frac{t_j}{T} \right)^{\hat{\beta}} - \left(\frac{2j-1}{2M} \right) \right]^2.$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} M = N \text{ und } T = T^* & \quad (\text{durch Zeitablauf beendete Prüfung}), \\ M = N - 1 \text{ und } T = t_N & \quad (\text{durch Ausfallzahl beendete Prüfung}). \end{aligned}$$

Schritt 3: Aufsuchen des zu M gehörenden kritischen Wertes $C_{0,90}^2(M)$ für den Cramer-von-Mises-Test in Tabelle 1, die die kritischen Werte für das Signifikanzniveau von 10 % enthält.

Schritt 4: Wenn

$$C^2 > C_{0,90}^2(M)$$

gilt, dann wird die Hypothese, dass die Daten mit dem Potenzgesetz-Modell beschrieben werden können, abgelehnt. Im anderen Fall wird auf der Basis der analysierten Daten geschlossen, dass das Potenzgesetz-Modell als Arbeitshypothese verwendet werden kann.^{N2)}

7.3.1.2 Graphisches Verfahren

Wenn die Ausfallzeitpunkte bekannt sind, kann das unten beschriebene graphische Verfahren angewendet werden, um zusätzliche Informationen bezüglich der Übereinstimmung zwischen dem Modell und den Daten zu bekommen. Dies erfordert, dass die erwartete Zeit bis zum j -ten Ausfall $E(t_j)$ gegen die beobachtete Zeit bis zum j -ten Ausfall aufgetragen wird. Weitere Einzelheiten über das Vorgehen finden sich in den Anhängen A und B.

Schritt 1: Berechnung von $\hat{\beta}$ gemäß Schritt 2 in 7.2.1 und von $\hat{\lambda}$ gemäß Schritt 3 in 7.2.1.

Schritt 2: Berechnung des Schätzwertes der erwarteten Zeit bis zum j -ten Ausfall, $j = 1, 2, \dots, N$, mithilfe der Gleichung

$$\hat{E}(t_j) = \left(\frac{j}{\hat{\lambda}} \right)^{\frac{1}{\hat{\beta}}}.$$

^{N2)} Nationale Fußnote: Dieser Schluss, der in der Praxis weit verbreitet ist, ist u. U. voreilig: Wenn eine Hypothese beibehalten wird, heißt das nicht, dass sie aufgrund der vorliegenden Daten bewiesen ist. Beispielsweise kann auch nur der Stichprobenumfang zu gering gewesen sein, die Hypothese abzulehnen.

Schritt 3: Auftragen von $\hat{E}(t_j)$ über t_j auf gleichen linearen Skalen. Die visuelle Übereinstimmung dieser Punkte mit einer Geraden durch den Ursprung mit einer Steigung von 45° ist ein subjektives Maß für die Anwendbarkeit des Modells.

7.3.2 Fall 2 – Zeitangaben für Gruppen von relevanten Ausfällen

7.3.2.1 Chi-Quadrat-Test

Schritt 1: Berechnung von $\hat{\beta}$ gemäß Schritt 2 in 7.2.3 und von $\hat{\lambda}$ gemäß Schritt 3 in 7.2.3.

Schritt 2: Berechnung der erwarteten Ausfallanzahl im Zeitintervall $[t(i-1), t(i)]$, die sich als Näherung wie folgt ergibt:

$$e_i = \hat{\lambda} \left\{ [t(i)]^{\hat{\beta}} - [t(i-1)]^{\hat{\beta}} \right\}.$$

Schritt 3: Für kein Intervall darf e_i kleiner als fünf sein, und falls notwendig, sollten nebeneinanderliegende Intervalle vor dem Test zusammengefasst werden. Für d Intervalle (nach der Zusammenfassung, falls notwendig) und mit N_i wie in 7.2.3 wird die folgende Prüfgröße berechnet:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^d \frac{(N_i - e_i)^2}{e_i}.$$

Schritt 4: Bestimmen des kritischen Wertes einer χ^2 -Verteilung mit $(d-2)$ Freiheitsgraden zu einem Signifikanzniveau von 10 % aus Tabelle 2, d. h. $\chi_{0,90}^2(d-2)$.

Schritt 5: Wenn die Prüfgröße χ^2 den kritischen Wert $\chi_{0,90}^2(d-2)$ übersteigt, dann wird die Hypothese, dass das Potenzgesetz-Modell die gruppierten Daten angemessen beschreibt, abgelehnt. Im anderen Fall kann das Potenzgesetz-Modell auf der Basis der analysierten Daten als Arbeitshypothese verwendet werden.

Der Chi-Quadrat-Test ist eine Prüfung für große Stichprobenumfänge, und es werden daher umfangreiche Datensätze benötigt, um praxisrelevante Abweichungen vom Potenzgesetz-Modell zu erkennen.

7.3.2.2 Graphisches Verfahren

Wenn der Datensatz aus bekannten Zeitintervallen besteht, von denen jedes eine bekannte Anzahl von Ausfällen enthält, kann das unten beschriebene graphische Verfahren angewendet werden, um zusätzliche Informationen bezüglich der Übereinstimmung zwischen dem Modell und den Daten zu bekommen. Dies erfordert, dass die erwartete Anzahl von Ausfällen gegen die an jedem Intervall-Ende beobachtete Ausfallanzahl aufgetragen wird. Weitere Einzelheiten über das Vorgehen finden sich in B.5.

Schritt 1: An jedem Intervallendpunkt $t(i)$ Berechnung der beobachteten Ausfallanzahl von 0 bis $t(i)$ mithilfe der Gleichung

$$N[t(i)] = \sum_{j=1}^i N_j.$$

Schritt 2: Berechnung des Schätzwertes für die entsprechende erwartete Ausfallanzahl $E[N[t(i)]]$ mithilfe der Gleichung

$$\hat{E}[N[t(i)]] = \hat{\lambda}_t(i)^{\hat{\beta}}.$$

Schritt 3: Auftragen von $\hat{E}[N[t(i)]]$ über $N[t(i)]$ auf gleichen linearen Skalen. Die visuelle Übereinstimmung dieser Punkte mit einer Geraden durch den Ursprung mit einer Steigung von 45° ist ein subjektives Maß für die Anwendbarkeit des Modells.

7.4 Vertrauensbereiche für den Formparameter

7.4.1 Fall 1 – Zeitangaben für jeden relevanten Ausfall

Der Wert des Formparameters β im Potenzgesetz-Modell legt fest, ob und wie sich die Ausfalldichte mit der Zeit ändert. Wenn $0 < \beta < 1$ gilt, nimmt die Ausfalldichte ab; wenn $\beta = 1$ gilt, ist die Ausfalldichte konstant; wenn $\beta > 1$ gilt, dann nimmt die Ausfalldichte zu.

Für einen zweiseitigen Vertrauensbereich für β bei bekannten individuellen Ausfallzeitpunkten sind die nachfolgenden Schritte auszuführen, je nachdem, ob es sich um durch Zeitablauf oder durch Ausfallzahl beendete Prüfungen handelt.

Zweiseitiger 90 %-Vertrauensbereich für β – durch Zeitablauf beendete Prüfung

Schritt 1: Berechnung von $\hat{\beta}$ entsprechend Schritt 2 in 7.2.1 oder entsprechend Schritt 2 in 7.2.2.

Schritt 2: Berechnung von

$$D_L = \frac{\chi_{0,05}^2(2N)}{2(N-1)}$$

$$D_U = \frac{\chi_{0,95}^2(2N)}{2(N-1)}$$

mit den in Tabelle 2 enthaltenen Fraktile der χ^2 -Verteilung.

Schritt 3: Berechnung der unteren Vertrauensgrenze für β nach der Gleichung

$$\beta_{LB} = D_L \hat{\beta}$$

und der oberen Vertrauensgrenze für β nach der Gleichung

$$\beta_{UB} = D_U \hat{\beta}.$$

Schritt 4: Der zweiseitige 90 %-Vertrauensbereich für β ist gegeben durch (β_{LB}, β_{UB}) .

ANMERKUNG Einseitige untere bzw. obere 95 %-Vertrauensgrenzen für β sind β_{LB} bzw. β_{UB} .

Zweiseitiger 90 %-Vertrauensbereich für β – durch Ausfallzahl beendete Prüfung

Schritt 1: Berechnung von $\hat{\beta}$ entsprechend Schritt 2 in 7.2.1.

Schritt 2: Berechnung von