

DIN ISO 11453



ICS 03.120.30

**Statistische Auswertung von Daten –
Tests und Vertrauensbereiche für Anteile (ISO 11453:1996 einschließlich
Technisches Korrigendum 1:1999)**

Statistical interpretation of data –
Tests and confidence intervals relating to proportions (ISO 11453:1996 including
Technical Corrigendum 1:1999)

Interprétation statistique des données –
Tests et intervalles de confiance portant sur les proportions (ISO 11453:1996, Rectificatif
Technique 1:1999)

Gesamtumfang 119 Seiten

Normenausschuss Qualitätsmanagement, Statistik und Zertifizierungsgrundlagen (NQSZ) im DIN

Statistische Auswertung von Daten — Tests und Vertrauensbereiche für Anteile

Inhalt

	Seite
Vorwort	4
1 Anwendungsbereich	6
2 Normative Verweisungen	6
3 Begriffe	6
4 Symbole	8
5 Punktschätzfunktion des Anteils p	8
6 Vertrauensgrenzen für den Anteil p	8
7 Signifikanztests für Anteile p	10
7.1 Allgemeines	10
7.2 Vergleich eines Anteils mit einem vorgegebenen Wert p_0	10
7.3 Vergleich zweier Anteile.....	12
8 Formblätter	14
8.1 Formblätter A: Vertrauensbereich für den Anteil p	16
8.2 Formblätter B: Vergleich des Anteils p mit einem vorgegebenen Wert p_0	24
8.3 Formblätter C: Vergleich zweier Anteile.....	36
9 Tabellen und Nomogramme	54
9.1 Interpolation der Quantile der F -Verteilung in Tabelle 4	54
9.2 Beispiel	56
Anhang A (normativ) Berechnung der Operationscharakteristik des Tests nach den Formblättern B	84
Anhang B (informativ) Beispiele für ausgefüllte Formblätter	90
Anhang C (informativ) Literaturhinweise	118

Contents

	Page
1 Scope.....	7
2 Normative reference	7
3 Definitions	7
4 Symbols.....	9
5 Point estimator of the proportion p	9
6 Confidence limits for the proportion p	9
7 Significance tests on proportions p	11
7.1 General	11
7.2 Comparison of a proportion with a given value p_0	11
7.3 Comparison of two proportions.....	13
8 Forms	15
8.1 A Forms: Confidence interval for the proportion p	17
8.2 B Forms: Comparison of the proportion p with a given value p_0	25
8.3 C Forms: Comparison of two proportions	37

Annexes

A Computation of the operating characteristics of the test according to the B forms.....	85
B Examples of completed forms	91
C Bibliography	119

© ISO 1996

All rights reserved. Unless otherwise specified, no part of this publication may be reproduced or utilized in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying and microfilm, without permission in writing from the publisher.

International Organization for Standardization
Case Postale 56 • CH-1211 Genève 20 • Switzerland

Printed in Switzerland

Nationales Vorwort

Diese Norm enthält die deutsche Übersetzung der Internationalen Norm ISO 11453, die vom Technischen Komitee ISO/TC 69, Unterkomitee SC 3, erarbeitet wurde.

Vorwort

Die ISO (Internationale Organisation für Normung) ist die weltweite Vereinigung nationaler Normungsinstitute (ISO-Mitglieds Körperschaften). Die Erarbeitung Internationaler Normen obliegt den Technischen Komitees der ISO. Jede Mitglieds Körperschaft, die sich für ein Thema interessiert, für das ein Technisches Komitee eingesetzt wurde, ist berechtigt, in diesem Komitee mitzuarbeiten. Internationale (staatliche und nichtstaatliche) Organisationen, die mit der ISO in Verbindung stehen, sind an den Arbeiten ebenfalls beteiligt. Die ISO arbeitet bei allen Angelegenheiten der elektrotechnischen Normung eng mit der Internationalen Elektrotechnischen Kommission (IEC) zusammen.

Die von den Technischen Komitees verabschiedeten internationalen Norm-Entwürfe werden den Mitglieds Körperschaften zur Abstimmung vorgelegt. Die Veröffentlichung als Internationale Norm erfordert Zustimmung von mindestens 75 % der abstimmenden Mitglieds Körperschaften.

Die Internationale Norm ISO 11453 wurde vom Technischen Komitee ISO/TC 69 „Anwendungen statistischer Methoden“, Unterkomitee SC 3 „Anwendung statistischer Methoden in der Normung“ erarbeitet.

Anhang A ist integraler Bestandteil dieser Internationalen Norm. Die Anhänge B und C dienen nur zur Information.

Foreword

ISO (the International Organization for Standardization) is a worldwide federation of national standards bodies (ISO member bodies). The work of preparing International Standards is normally carried out through ISO technical committees. Each member body interested in a subject for which a technical committee has been established has the right to be represented on that committee. International organizations, governmental and non-governmental, in liaison with ISO, also take part in the work. ISO collaborates closely with the International Electrotechnical Commission (IEC) on all matters of electrotechnical standardization.

Draft International Standards adopted by the technical committees are circulated to the member bodies for voting. Publication as an International Standard requires approval by at least 75 % of the member bodies casting a vote.

International Standard ISO 11453 was prepared by Technical Committee ISO/TC 69, *Applications of statistical methods*, Subcommittee SC 3, *Application of statistical methods in standardization*.

Annex A forms an integral part of this International Standard. Annexes B and C are for information only.

1 Anwendungsbereich

Diese Internationale Norm beschreibt spezielle statistische Verfahren zur Behandlung der folgenden Fragen:

- a) Gegeben ist eine Grundgesamtheit von Einheiten, aus der eine Stichprobe von n Einheiten entnommen wurde, von denen x der Stichprobeneinheiten ein festgelegtes Merkmal aufweisen. Welcher Anteil der Grundgesamtheit hat dieses Merkmal? (Siehe Formblätter A, Abschnitt 8.1).
- b) Ist der in a) geschätzte Anteil von einem (festgelegten) Nennwert verschieden? (Siehe Formblätter B, Abschnitt 8.2).
- c) Gegeben sind zwei verschiedene Grundgesamtheiten; sind die Anteile mit dem Merkmal in den beiden Grundgesamtheiten verschieden? (siehe Formblätter C, Abschnitt 8.3).
- d) Wie viele Einheiten müssen aus der(den) Grundgesamtheit(en) in b) und c) als Stichprobe entnommen werden, um das Ergebnis mit ausreichender Sicherheit als korrekt ansehen zu können? (Siehe 7.2.3 und 7.3.3).

Es ist wesentlich, dass die Stichprobenentnahme keinen nennenswerten Einfluss auf die Grundgesamtheit hat. Hat die zufällig entnommene Stichprobe eine Größe von weniger als 10 % der Grundgesamtheit, wird dem gewöhnlich entsprochen, ist die Stichprobe jedoch größer als dieser Wert, können zuverlässige Ergebnisse nur dadurch gewonnen werden, dass jede entnommene Einheit zurückgelegt wird, bevor die nächste Einheit zufällig der Grundgesamtheit entnommen wird.

2 Normative Verweisungen

Die folgende Norm enthält Festlegungen, die durch Verweisung in diesem Text Bestandteil dieser Internationalen Norm sind. Zum Zeitpunkt der Veröffentlichung war die im Folgenden genannte Ausgabe gültig. Alle Normen unterliegen Revisionen, und Vertragspartner, deren Vereinbarungen auf dieser Internationalen Norm basieren, werden gebeten, die Möglichkeit zu prüfen, ob die jeweils neueste Ausgabe der im Folgenden genannten Norm angewendet werden kann. Die Mitglieder von IEC und ISO führen Verzeichnisse der gegenwärtig gültigen Internationalen Normen.

ISO 3534-1:1993, *Statistik — Begriffe und Formelzeichen — Teil 1: Wahrscheinlichkeitsverteilungen und allgemeine Statistik*.

3 Begriffe

Für die Anwendung dieser Internationalen Norm gelten die Begriffe nach ISO 3534-1 und der folgende Begriff.

3.1

Zieleinheit

Einheit, in der das festgelegte Merkmal vorkommt.

1 Scope

This International Standard describes specific statistical methods for addressing the following questions.

- a) Given a population of items from which a sample of n items has been drawn, x of the sample items are found to show a specified characteristic. What proportion of the population has that characteristic? (See A forms, subclause 8.1.)
- b) Is the proportion estimated in a) different from a nominal (specified) value? (See B forms, subclause 8.2.)
- c) Given two distinct populations, are the proportions with the characteristic in the two populations different? (See C forms, subclause 8.3.)
- d) In b) and c) how many items must be sampled in the population(s) to be sufficiently sure that the result of the test is correct? (See 7.2.3 and 7.3.3.)

It is essential that the drawing of samples does not have any appreciable effect on the population. If the sample drawn at random is less than 10 % of the population this is usually satisfactory, but if the sample is greater than this, reliable results can be obtained only by replacing each item sampled before drawing the next item at random from the population.

2 Normative reference

The following standard contains provisions which, through reference in this text, constitute provisions of this International Standard. At the time of publication, the edition indicated was valid. All standards are subject to revision, and parties to agreements based on this International Standard are encouraged to investigate the possibility of applying the most recent edition of the standard indicated below. Members of IEC and ISO maintain registers of currently valid International Standards.

ISO 3534-1:1993, *Statistics — Vocabulary and symbols — Part 1: Probability and general statistical terms*.

3 Definitions

For the purposes of this International Standard, the definitions given in ISO 3534-1 and the following definition apply.

3.1 target item: One in which the specified characteristic is found.

4 Symbole

α	Gewähltes Signifikanzniveau
α'	Erreichtes Signifikanzniveau
$1 - \alpha$	Gewähltes Vertrauensniveau
β	Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art
$n; n_1; n_2$	Stichprobenumfang; Umfang der Stichprobe 1; Umfang der Stichprobe 2
X	Anzahl der Zieleinheiten in der Stichprobe (zufällige Variable)
x	Wert von X
p	Anteil der Zieleinheiten in der Grundgesamtheit
$p_{u,o}$	Obergrenze des einseitigen Vertrauensbereichs für p
$p_{l,o}$	Untergrenze des einseitigen Vertrauensbereichs für p
$p_{u,t}$	Obergrenze des zweiseitigen Vertrauensbereichs für p
$p_{l,t}$	Untergrenze des zweiseitigen Vertrauensbereichs für p
T	Wert aus Tabelle 2 zur Bestimmung der Vertrauensgrenzen für $n \leq 30$
$C_{l,o}$	Kritischer Wert für den Test der Nullhypothese $H_0: p \geq p_0$
$C_{u,o}$	Kritischer Wert für den Test der Nullhypothese $H_0: p \leq p_0$
$C_{l,t}$	Unterer kritischer Wert für den Test der Nullhypothese $H_0: p = p_0$
$C_{u,t}$	Oberer kritischer Wert für den Test der Nullhypothese $H_0: p = p_0$
p_0	Gegebener Wert für p
p'	Wert von p , für den die Wahrscheinlichkeit zu bestimmen ist, dass die Nullhypothese (P_a) nicht verworfen wird
P_a	Wahrscheinlichkeit, dass die Nullhypothese nicht verworfen wird
f_1, f_2	Anzahl der Freiheitsgrade der F -Verteilung
F_1, F_2	Teststatistiken
$F_q(f_1, f_2)$	q -Quantil der F -Verteilung mit den Freiheitsgraden f_1 und f_2
z_1, z_2	Teststatistiken
u_q	q -Quantil der standardisierten Normalverteilung
q, η, K	Hilfswerte

5 Punktschätzfunktion des Anteils p

Die Schätzfunktion von p aus einer Stichprobe von n Einheiten, einschließlich von x Zieleinheiten, ist

$$\hat{p} = x/n$$

Diese Schätzfunktion ist eine erwartungstreue Schätzfunktion, sofern die Stichprobe zufällig entnommen ist, unabhängig vom Stichproben- und Grundgesamtheitsumfang, selbst wenn die Stichprobe einen nennenswerten Anteil der Grundgesamtheit darstellt.

6 Vertrauensgrenzen für den Anteil p

Die Berechnung eines Vertrauensbereichs für p ist in den Formblättern A-1 bis A-3 beschrieben.

Die Vertrauensgrenzen hängen vom Stichprobenumfang (n), der Anzahl der Zieleinheiten in der Stichprobe (x) und dem gewünschten Vertrauensniveau ($1 - \alpha$) ab. Es ist im Allgemeinen nicht möglich, das gewünschte Vertrauensniveau exakt zu erreichen, da die Wahrscheinlichkeitsverteilung, die für das Ergebnis x maßgebend ist, diskret ist. Somit führt das Verfahren zum nächstliegenden Vertrauensniveau, das größer oder gleich ($1 - \alpha$) ist.

4 Symbols

α	significance level chosen
α'	achieved significance level
$1-\alpha$	confidence level chosen
β	probability of the error of the second kind
$n; n_1; n_2$	sample size; sample size of sample 1; sample size of sample 2
X	number of target items in the sample (random variable)
x	value of X
p	proportion of target items in the population
$p_{u,o}$	upper limit of the one-sided confidence interval for p
$p_{l,o}$	lower limit of the one-sided confidence interval for p
$p_{u,t}$	upper limit of the two-sided confidence interval for p
$p_{l,t}$	lower limit of the two-sided confidence interval for p
T	value from table 2 for the determination of confidence limits for $n \leq 30$
$C_{l,o}$	critical value of the test of the null hypothesis $H_0: p \geq p_0$
$C_{u,o}$	critical value of the test of the null hypothesis $H_0: p \leq p_0$
$C_{l,t}$	lower critical value of the test of the null hypothesis $H_0: p = p_0$
$C_{u,t}$	upper critical value of the test of the null hypothesis $H_0: p = p_0$
p_0	given value for p
p'	value of p for which the probability of not rejecting the null hypothesis (P_a) is to be determined
P_a	probability of not rejecting the null hypothesis
f_1, f_2	number of degrees of freedom of the F -distribution
F_1, F_2	test statistics
$F_q(f_1, f_2)$	q -quantile of the F -distribution with f_1 and f_2 degrees of freedom
z_1, z_2	test statistics
u_q	q -quantile of the standard normal distribution
q, η, K	auxiliary values

5 Point estimator of the proportion p

The estimator of p from a sample of n items including x target items is

$$\hat{p} = x/n$$

This estimator is unbiased if the sample is drawn at random, whatever the sample size and population size may be, even if the sample forms an appreciable part of the population.

6 Confidence limits for the proportion p

The calculation of a confidence interval for p is described in forms A-1 to A-3.

The confidence limits will depend on sample size (n), the number of target items in the sample (x), and the desired confidence level ($1-\alpha$). It is not possible in general to achieve the desired confidence level exactly because the probability distribution governing the outcome x is discrete. Thus, the procedure yields the nearest confidence level greater than or equal to $(1-\alpha)$.

Das in dieser Internationalen Norm angewendete Verfahren zur Bestimmung der zweiseitigen Vertrauensgrenzen für das gewünschte Vertrauensniveau $(1 - \alpha)$ benutzt jeweils die Grenzen für die einseitige Ober- und Untergrenze für das gewünschte Vertrauensniveau $(1 - \alpha/2)$. Dabei ist sichergestellt, dass die Fehlerwahrscheinlichkeit auf jeder Seite des Bereichs geringer als oder gleich $\alpha/2$ ist.

7 Signifikanztests für Anteile p

7.1 Allgemeines

Für praktische Anwendungen stellen die Formblätter B-1 bis B-3 und C-1 bis C-3 die Nullhypothesen für Anteile und Anleitungen für die Durchführung von Tests dar. Zu Beginn der Verfahren sind die geeignete Nullhypothese und der Stichprobenumfang n (der Stichprobenumfang n_1 und der Stichprobenumfang n_2) zu bestimmen und das Signifikanzniveau ist auszuwählen. Da die zugrunde gelegten Verteilungen der Stichprobenentnahme diskret sind, sind die Verfahren so ausgelegt, dass sie das nächstliegende Signifikanzniveau erreichen, das kleiner als oder gleich dem gewünschten (Nenn-) Niveau ist. In den Formblättern sind die Alternativhypothesen nicht angegeben, weil diese in jeder Anwendung als komplementär zur Nullhypothese implizit angenommen werden.

BEISPIELE

Als Erstes wird in den Formblättern B (Verfahren zum Vergleich eines Anteils mit einem vorgegebenen Wert) eine der drei folgenden Nullhypothesen H_0 (mit der komplementären Alternativhypothese H_1) ausgewählt:

- a) einseitiger Test mit $H_0: p \geq p_0$ $H_1: p < p_0$
- b) einseitiger Test mit $H_0: p \leq p_0$ $H_1: p > p_0$
- c) zweiseitiger Test mit $H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$

wobei p_0 der vorgegebene Wert ist.

Das Ergebnis jedes Tests ist, die Nullhypothese entweder zu verwerfen oder nicht zu verwerfen.

Verwerfen der Nullhypothese bedeutet Nicht-Verwerfen der Alternativhypothese. Nichtverwerfen der Nullhypothese bedeutet nicht notwendigerweise Annahme der Nullhypothese (siehe 7.2.2).

7.2 Vergleich eines Anteils mit einem vorgegebenen Wert p_0

7.2.1 Testverfahren

Die Testverfahren für die Nullhypothesen

$$H_0: p \geq p_0$$

$$H_0: p \leq p_0$$

$$H_0: p = p_0$$

(wobei p_0 der vorgegebene Wert ist) sind in den Formblättern B-1 bis B-3 beschrieben. Sie sind besonders einfach anzuwenden, wenn der(die) kritische(n) Wert(e) für die festgelegten Werte von n , p und α bekannt ist(sind). Der(Die) kritische(n) Wert(e) kann(können) durch wiederholte Durchführung des Tests nach den Formblättern B bestimmt worden sein. Anderenfalls ist das Standardverfahren zur Bestimmung der kritischen Werte das in denselben Formblättern angegebene Verfahren.

7.2.2 Operationscharakteristiken

Die Berechnung der Operationscharakteristiken (einschließlich der Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art, des erreichten Signifikanzniveaus und der Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art) ist in Anhang A beschrieben. Dafür muss(müssen) der(die) kritische(n) Wert(e) (siehe 7.2.1) bekannt sein, und die Alternativhypothese $p = p_1$, für die die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art zu berechnen ist, ist auszuwählen.

The procedure used in this International Standard for determining the two-sided confidence limits for the desired confidence level $(1-\alpha)$ uses the limits for the upper and lower one-sided limits each for the desired confidence level $(1-\alpha/2)$. It thereby guarantees that the error probability is less than or equal to $\alpha/2$ on each side of the interval.

7 Significance tests on proportions p

7.1 General

For practical applications, forms B-1 to B-3 and C-1 to C-3 present the null hypotheses concerning proportions and schemes for carrying out tests. At the beginning of the procedures, the appropriate null hypothesis and the sample size n (the sample sizes n_1 and n_2) are to be determined and the significance level is to be chosen. Because the underlying sampling distributions are discrete, the procedures are designed to achieve the nearest significance level less than or equal to the desired (nominal) level. The alternative hypotheses are not indicated in the forms because in each application the alternative hypothesis is implicitly assumed to be complementary to the null hypothesis.

EXAMPLES

At the beginning of the B forms (procedure for the comparison of a proportion with a given value), one of the following three null hypotheses H_0 (with the complementary alternative hypothesis H_1) is to be chosen:

- a) one-sided test with $H_0: p \geq p_0$ $H_1: p < p_0$
- b) one-sided test with $H_0: p \leq p_0$ $H_1: p > p_0$
- c) two-sided test with $H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$

where p_0 is the given value.

The result of each test is either to reject or not to reject the null hypothesis.

Rejecting the null hypothesis means adopting the alternative hypothesis. Not rejecting the null hypothesis does not necessarily mean accepting the null hypothesis (see 7.2.2).

7.2 Comparison of a proportion with a given value p_0

7.2.1 Test procedure

The test procedures for the null hypotheses

$$H_0: p \geq p_0$$

$$H_0: p \leq p_0$$

$$H_0: p = p_0$$

(where p_0 is the given value) are described in forms B-1 to B-3. They are especially easy to apply if the critical value(s) for the specified values of n , p and α is (are) known. The critical value(s) may have been determined through repeated execution of the test in accordance with the B forms. Otherwise the standard procedure to determine the critical values is the one given in the same forms.

7.2.2 Operating characteristics

The computation of the operating characteristics (including the probability of the error of the first kind, the achieved significance level and the probability of the error of the second kind) is described in annex A. For this purpose the critical value(s) need(s) to be known (see 7.2.1) and the alternative hypothesis, $p = p_1$, for which the probability of the error of the second kind is to be computed has to be chosen.

7.2.3 Bestimmung des Stichprobenumfangs n

Wenn der Stichprobenumfang nicht bereits festgelegt ist (zum Beispiel aus ökonomischen oder technischen Gründen), ist sein Mindestwert so zu bestimmen, dass für eine gegebene Nullhypothese H_0 (siehe 7.2.1) der erreichte Wert des Signifikanzniveaus α nicht größer als sein gewählter oder vorgegebener Wert ist. Außerdem muss der erreichte Wert des Fehlers 2. Art, die Wahrscheinlichkeit β , etwa gleich ihrem gewählten oder vorgegebenen Wert sein, wenn p gleich einem besonders gewählten oder vorgegebenen Wert p' ist. Hierfür sind p_0 und p' auf der p -Skala, und α , $(1 - \alpha)$, $\alpha/2$, $(1 - \alpha/2)$ auf der P -Skala zu markieren, und die Geraden 1 und 2, die durch das in Tabelle 1 dargestellte Verfahren definiert sind, werden in das Larson-Nomogramm eingezeichnet (Bild 2).

Tabelle 1 — Verfahren zur Bestimmung des Stichprobenumfangs aus dem Larson-Nomogramm (Bild 2)

Fall	Vorgegebener Wert	Gerade 1 von p_0 zu	Gerade 2 von p' zu
$H_0: p \geq p_0$	$p' < p_0$	α	$1 - \beta$
$H_0: p \leq p_0$	$p' > p_0$	$1 - \alpha$	β
$H_0: p = p_0$	$p' > p_0$	$1 - \alpha/2$	β
$H_0: p = p_0$	$p' < p_0$	$\alpha/2$	$1 - \beta$

Der Schnittpunkt der beiden Geraden ergibt die Werte $C_{l,o}(C_{u,o})$ auf der x -Skala. Wenn x keine ganze Zahl ist, ist auf die nächste ganze Zahl auf- oder abzurunden.

7.3 Vergleich zweier Anteile

7.3.1 Testverfahren

Das Testverfahren für die Nullhypothesen

$$H_0: p_1 \geq p_2$$

$$H_0: p_1 \leq p_2$$

$$H_0: p_1 = p_2$$

(Dabei sind p_1 der Anteil der Zieleinheiten in Grundgesamtheit 1 und p_2 der Anteil der Zieleinheiten in Grundgesamtheit 2) werden in den Formblättern C-1 bis C-3 beschrieben. Diese Verfahren sind auch zum Testen der Unabhängigkeit zweier Attribute (Alternativmerkmale) der Einheiten in einer Grundgesamtheit geeignet.

7.3.2 Operationscharakteristiken

Es wird angenommen,

- dass für einen einseitigen Test von $H_0: p_1 \leq p_2$ die Schärfe $(1 - \beta)$ für ein gegebenes Paar von Anteilen p_1 und p_2 mit $p_1 > p_2$ bestimmt werden muss;
- dass der Test mit zwei Stichproben gleichen Umfangs, d. h. $n_1 = n_2 = n$, durchgeführt wird.

Das Signifikanzniveau ist α . Dann kann mittels der arcsin-Transformation (vorgeschlagen von Walters [1]) ein sehr genauer Näherungswert der Schärfe wie folgt bestimmt werden:

$$1 - \beta = \Phi(z - u_{1-\alpha})$$

7.2.3 Determination of sample size n

If the sample size is not already specified (for example for economic or technical reasons), its minimum value shall be determined such that for a given null hypothesis H_0 (see 7.2.1), the achieved value of the significance level α is not greater than its chosen or given value. In addition, the achieved value of the type II error, probability β , shall be approximately equal to its chosen or given value if p equals a particular chosen or given value p' . For this purpose, p_0 and p' are to be marked on the p -scale and α , $(1-\alpha)$, $\alpha/2$, $(1-\alpha/2)$ on the P -scale and the straight lines 1 and 2 as defined through the procedure shown in table 1 are drawn in the Larson nomograph (figure 2).

Table 1 — Procedure for determining the sample size from the Larson nomograph (figure 2)

Case	Given value	Straight line 1 from p_0 to	Straight line 2 from p' to
$H_0: p \geq p_0$	$p' < p_0$	α	$1-\beta$
$H_0: p \leq p_0$	$p' > p_0$	$1-\alpha$	β
$H_0: p = p_0$	$p' > p_0$	$1-\alpha/2$	β
$H_0: p = p_0$	$p' < p_0$	$\alpha/2$	$1-\beta$

The point of intersection of the two lines leads to the values $C_{l,0}(C_{u,0})$ on the x -scale. If x is not an integer, round up or down to the next integer.

7.3 Comparison of two proportions

7.3.1 Test procedure

The test procedures for the null hypothesis

$$H_0: p_1 \geq p_2$$

$$H_0: p_1 \leq p_2$$

$$H_0: p_1 = p_2$$

(where p_1 is the proportion of target items in population 1 and p_2 is the proportion of target items in population 2) are described in forms C-1 to C-3. These procedures are also suitable for testing the independence of two attributes (dichotomous characteristics) of items in a population.

7.3.2 Operating characteristics

It is assumed:

- that for a one-sided test of $H_0: p_1 \leq p_2$, the power $(1-\beta)$ must be determined for a given pair of proportions p_1 and p_2 , with $p_1 > p_2$;
- that the test is carried out with two samples of the same size, i.e. $n_1 = n_2 = n$.

The significance level is α . Then a very accurate approximate value of the power can be obtained by the arc sine transformation (proposed by Walters ^[1]) as follows:

$$1-\beta = \Phi(z - u_{1-\alpha})$$

Dabei ist

Φ die Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung;

$u_{1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$ -Quantil dieser Normalverteilung und

$$z = \sqrt{2n} \left[\arcsin \sqrt{p_1 - (1/2n)} - \arcsin \sqrt{p_2 - (1/2n)} \right]$$

Die Näherung kann auch für den zweiseitigen Fall verwendet werden: $H_0: p_1 = p_2$ mit der Alternativhypothese $H_1: p_1 > p_2$, sofern in der Gleichung α durch $\alpha/2$ ersetzt wird.

7.3.3 Bestimmung des Stichprobenumfangs n

Sofern der Stichprobenumfang n_1 und n_2 nicht vorbestimmt ist, sind ihre Mindestwerte so zu bestimmen, dass die Schärfe der Prüfung mindestens $(1 - \beta)$ beträgt, während das Signifikanzniveau α ist.

Es wird angenommen, dass die Nullhypothese $H_0: p_1 \leq p_2$ ist. Die folgenden Verfahren gelten jedoch auch für den zweiseitigen Fall $H_0: p_1 = p_2$ mit der eingeschränkten Alternativhypothese $H_1: p_1 > p_2$, sofern α durch $\alpha/2$ ersetzt wird.

Exakte Werte des Stichprobenumfangs sind in den Tabellen 5 und 6 (ursprünglich von Haseman [2] veröffentlicht) für ausgewählte Werte von α und β angegeben. Diese Tabellen setzen einen üblichen Stichprobenumfang von $n = n_1 = n_2$ voraus.

Für Konfigurationen von α , p_1 , p_2 und $(1 - \beta)$, die nicht von diesen Tabellen erfasst werden, kann die folgende Näherung angewendet werden, die auch für ungleichen Stichprobenumfang zulässig ist. Sie setzt voraus, dass das Verhältnis r des Stichprobenumfangs n_1/n_2 im Voraus ausgewählt worden ist.

$$n_1 = \frac{n'}{4} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2(r+1)}{rn'(p_1 - p_2)}} \right]^2$$

$$n_2 = n_1/r$$

Dabei ist

$$n' = \frac{\left\{ u_{1-\alpha} \sqrt{(r+1) \bar{p} \bar{q}} + u_{1-\beta} \sqrt{[rp_1(1-p_1) + p_2(1-p_2)]} \right\}^2}{r(p_1 - p_2)^2}$$

$$\bar{p} = \frac{rp_1 + p_2}{r+1}$$

$$\bar{q} = 1 - \bar{p}$$

8 Formblätter

Um die Anwendung zu erleichtern, ist in dem Kästchen ein Häkchen anzubringen, das den aktivierten Teil des Formblatts darstellt (Die horizontale Stellung des Kästchens kennzeichnet die Stellung des betreffenden Teils in der Rangordnung des Formblatts, die von rechts nach links abnimmt). Dann ist dem Verfahren zu folgen, indem die notwendigen Daten eingegeben und die erforderlichen Handlungen ausgeführt werden.

where

Φ is the distribution function of the standard normal distribution,

$u_{1-\alpha}$ is the $(1-\alpha)$ -quantile of that normal distribution, and

$$z = \sqrt{2n} \left[\arcsin \sqrt{p_1 - (1/2n)} - \arcsin \sqrt{p_2 - (1/2n)} \right]$$

This approximation can also be used for the two-sided case: $H_0: p_1 = p_2$ with the alternative hypothesis $H_1: p_1 > p_2$ if α is replaced by $\alpha/2$ in the formula.

7.3.3 Determination of sample size n

If the sample sizes n_1 and n_2 are not predetermined, their minimum values shall be determined such that the power of the test is at least $(1 - \beta)$ while the significance level is α .

It is assumed that the null hypothesis is $H_0: p_1 \leq p_2$. The following procedures, however, also apply in the two-sided case $H_0: p_1 = p_2$, with the restricted alternative hypothesis $H_1: p_1 > p_2$ if α is replaced by $\alpha/2$.

Exact values of the sample size are given in tables 5 and 6 (originally published by Haseman^[2]) for selected values of α and β . These tables assume a common sample size $n = n_1 = n_2$.

For configurations of α , p_1 , p_2 and $(1-\beta)$ not covered by these tables, the following approximation can be used which also allows for unequal sample sizes. It requires that the ratio r of sample sizes n_1/n_2 has been chosen in advance.

$$n_1 = \frac{n'}{4} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2(r+1)}{rn'(p_1 - p_2)}} \right]^2$$

$$n_2 = n_1 / r$$

where

$$n' = \frac{\left\{ u_{1-\alpha} \sqrt{(r+1) \bar{p} \bar{q}} + u_{1-\beta} \sqrt{[rp_1(1-p_1) + p_2(1-p_2)]} \right\}^2}{r(p_1 - p_2)^2}$$

$$\bar{p} = \frac{rp_1 + p_2}{r+1}$$

$$\bar{q} = 1 - \bar{p}$$

8 Forms

For ease of application, make a tick in the box representing the activated part of the form. (The horizontal position of the box symbolizes the position of the respective part in the hierarchy of the form, decreasing from the right to the left.) Then follow the procedure by entering the necessary data and carrying out the actions required.

8.1 Formblätter A: Vertrauensbereich für den Anteil p 8.1.1 Formblatt A-1: Einseitig nach oben begrenzter Vertrauensbereich für den Anteil p

Merkmal:

Verfahren zur Ermittlung:

Einheiten:

Kriterium für die Identifizierung der Zieleinheiten:

Anmerkungen:

Gewähltes Vertrauensniveau: $1 - \alpha =$ Stichprobenumfang: $n =$ Anzahl der Zieleinheiten in der Stichprobe: $x =$

Ermittlung der Vertrauensgrenzen:

a) Verfahren für $n \leq 30$ ☐1) Fall $x = n$ ☐

$$p_{u,o} = 1$$

2) Fall $x < n$ ☐Ablesen des Werts aus Tabelle 2 für die bekannten Werte n , $X = x$ und $q = 1 - \alpha$
(Dieser Wert ist die Vertrauensgrenze)

$$T_{(1-\alpha)}(n, x) = p_{u,o} =$$

b) Verfahren für $n > 30$ ☐1) Fall $x = 0$ ☐

Berechnung:

$$p_{u,o} = 1 - \alpha^{1/n} =$$

2) Fall $x = n$ ☐

$$p_{u,o} = 1$$

3) Fall $0 < x < n$ ☐Ablesen des Werts aus Tabelle 3 für $q = 1 - \alpha$: $u_{1-\alpha} =$ Ablesen des Werts d entsprechend dem gewählten Vertrauensniveau:

$1 - \alpha$	0,90	0,95	0,99
d	0,411	0,677	1,353

Berechnung:

$$p_{u,o} = p_* + (1 - 2p_*)d/(n+1) + u_{1-\alpha}\sqrt{p_*(1-p_*)[1 - d/(n+1)]/(n+1)} =$$

$$\text{mit } p_* = (x+1)/(n+1)$$

Ergebnis:

$$p \leq p_{u,o} =$$

8.1 A forms: Confidence interval for the proportion p

8.1.1 Form A-1: One-sided, with upper limit confidence interval for the proportion p

Characteristic: Determination procedure: Items: Criterion for the identification of target items: Notes:								
Confidence level chosen: $1 - \alpha =$ Sample size: $n =$ Number of target items in the sample: $x =$								
Determination of confidence limits: a) Procedure for $n \leq 30$ ☐ 1) Case $x = n$ ☐ $p_{u,0} = 1$ 2) Case $x < n$ ☐ Read the value from table 2 for the known values n, $X = x$ and $q = 1 - \alpha$ (this value is the confidence limit): $T_{(1-\alpha)}(n, x) = p_{u,0} =$ b) Procedure for $n > 30$ ☐ 1) Case $x = 0$ ☐ Computation: $p_{u,0} = 1 - \alpha^{1/n} =$ 2) Case $x = n$ ☐ $p_{u,0} = 1$ 3) Case $0 < x < n$ ☐ Read the value from table 3 for $q = 1 - \alpha$: $u_{1-\alpha} =$ Read the value d corresponding to the confidence level chosen: <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto; border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr> <td style="padding: 5px;">$1 - \alpha$</td> <td style="padding: 5px;">0,90</td> <td style="padding: 5px;">0,95</td> <td style="padding: 5px;">0,99</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">d</td> <td style="padding: 5px;">0,411</td> <td style="padding: 5px;">0,677</td> <td style="padding: 5px;">1,353</td> </tr> </table> Computation: $p_{u,0} = p_* + (1 - 2p_*)d/(n+1) + u_{1-\alpha} \sqrt{p_*(1-p_*)[1-d/(n+1)]/(n+1)} =$ with $p_* = (x+1)/(n+1)$	$1 - \alpha$	0,90	0,95	0,99	d	0,411	0,677	1,353
$1 - \alpha$	0,90	0,95	0,99					
d	0,411	0,677	1,353					
Result: $p \leq p_{u,0} =$								

8.1.2 Formblatt A-2: Einseitig nach unten begrenzter Vertrauensbereich für den Anteil p

Merkmal:
 Verfahren zur Ermittlung:
 Einheiten:
 Kriterium für die Identifizierung der Zieleinheiten:
 Anmerkungen:

Gewähltes Vertrauensniveau: $1 - \alpha =$

Stichprobenumfang: $n =$

Anzahl der Zieleinheiten in der Stichprobe: $x =$

Ermittlung der Vertrauensgrenzen:

a) Verfahren für $n \leq 30$ ☐

1) Fall $x = 0$ ☐

$$p_{l,0} = 0$$

2) Fall $x > 0$ ☐

Ablezen des Werts aus Tabelle 2 für die bekannten Werte n , $X = n - x$ und $q = 1 - \alpha$:

$$T_{(1-\alpha)}(n, n-x) =$$

Berechnung:

$$p_{l,0} = 1 - T_{(1-\alpha)}(n, n-x) =$$

b) Verfahren für $n > 30$ ☐

1) Fall $x = 0$ ☐

$$p_{l,0} = 0$$

2) Fall $x = n$ ☐

Berechnung:

$$p_{l,0} = \alpha^{1/n} =$$

3) Fall $0 < x < n$ ☐

Ablezen des Werts aus Tabelle 3 für $q = 1 - \alpha$: $u_{1-\alpha} =$

Ablezen des Werts d entsprechend dem gewählten Vertrauensniveau:

$1 - \alpha$	0,90	0,95	0,99
d	0,411	0,677	1,353

Berechnung:

$$p_{l,0} = p_* + (1 - 2p_*)d/(n+1) - u_{1-\alpha}\sqrt{p_*(1-p_*)[1-d/(n+1)]/(n+1)} =$$

mit $p_* = x/(n+1)$

Ergebnis:

$$p_{l,0} = \leq p$$

8.1.2 Form A-2: One-sided, with lower limit confidence interval for the proportion p

Characteristic: Determination procedure: Items: Criterion for the identification of target items: Notes:									
Confidence level chosen: $1 - \alpha =$ Sample size: $n =$ Number of target items in the sample: $x =$									
Determination of confidence limits:									
a) Procedure for $n \leq 30$	☐								
1) Case $x = 0$ $p_{l,0} = 0$	☐								
2) Case $x > 0$	☐								
Read the value from table 2 for the known values n , $X = n - x$ and $q = 1 - \alpha$: $T_{(1-\alpha)}(n, n - x) =$ Computation: $p_{l,0} = 1 - T_{(1-\alpha)}(n, n - x) =$									
b) Procedure for $n > 30$	☐								
1) Case $x = 0$ $p_{l,0} = 0$	☐								
2) Case $x = n$ Computation: $p_{l,0} = \alpha^{1/n} =$	☐								
3) Case $0 < x < n$	☐								
Read the value from table 3 for $q = 1 - \alpha$: $u_{1-\alpha} =$ Read the value of d corresponding to the confidence level chosen:									
<table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="padding: 5px;">$1 - \alpha$</td> <td style="padding: 5px;">0,90</td> <td style="padding: 5px;">0,95</td> <td style="padding: 5px;">0,99</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">d</td> <td style="padding: 5px;">0,411</td> <td style="padding: 5px;">0,677</td> <td style="padding: 5px;">1,353</td> </tr> </table>		$1 - \alpha$	0,90	0,95	0,99	d	0,411	0,677	1,353
$1 - \alpha$	0,90	0,95	0,99						
d	0,411	0,677	1,353						
Computation: $p_{l,0} = p_* + (1 - 2p_*)d/(n + 1) - u_{1-\alpha} \sqrt{p_*(1 - p_*)[1 - d/(n + 1)]/(n + 1)} =$ with $p_* = x/(n + 1)$									
Result: $p_{l,0} = \leq p$									

8.1.3 Formblatt A-3: Zweiseitiger Vertrauensbereich für den Anteil p

Merkmal:
 Verfahren zur Ermittlung:
 Einheiten:
 Kriterium für die Identifizierung der Zieleinheiten:
 Anmerkungen:

Gewähltes Vertrauensniveau: $1 - \alpha =$
 Stichprobenumfang: $n =$
 Anzahl der Zieleinheiten in der Stichprobe: $x =$

Ermittlung der Vertrauensgrenzen:

a) Verfahren für $n \leq 30$ ☐

1) Obere Vertrauensgrenze

— Fall $x = n$ ☐

$$p_{u,t} = 1$$

— Fall $x < n$ ☐

Ablesen des Werts aus Tabelle 2 für die bekannten Werte n , $X = x$ und $q = 1 - \alpha/2$
 (Dieser Wert ist die Vertrauensgrenze):

$$T_{(1-\alpha/2)}(n, x) = p_{u,t} =$$

2) Untere Vertrauensgrenze

— Fall $x = 0$ ☐

— Fall $x > 0$ ☐

Ablesen des Werts aus Tabelle 2 für die bekannten Werte n , $X = n - x$ und $q = 1 - \alpha/2$:

$$T_{(1-\alpha/2)}(n, n - x) =$$

Berechnung:

$$p_{l,t} = 1 - T_{(1-\alpha/2)}(n, n - x) =$$

b) Verfahren für $n > 30$ ☐

1) Obere Vertrauensgrenze

— Fall $x = 0$ ☐

Berechnung:

$$p_{u,t} = 1 - (\alpha/2)^{1/n} =$$

— Fall $x = n$ ☐

$$p_{u,t} = 1$$

8.1.3 Form A-3: Two-sided confidence interval for the proportion p

Characteristic: Determination procedure: Items: Criterion for the identification of target items: Notes:
Confidence level chosen: $1 - \alpha =$ Sample size: $n =$ Number of target items in the sample: $x =$
Determination of confidence limits: a) Procedure for $n \leq 30$ ☐ 1) Upper confidence limit — Case $x = n$ ☐ $p_{u,t} = 1$ — Case $x < n$ ☐ Read the value from table 2 for the known values n, $X - x$ and $q = 1 - \alpha/2$ (this value is the confidence limit): $T_{(1-\alpha/2)}(n, x) = p_{u,t} =$ 2) Lower confidence limit — Case $x = 0$ ☐ — Case $x > 0$ ☐ Read the value from table 2 for the known values n, $X = n - x$ and $q = 1 - \alpha/2$: $T_{(1-\alpha/2)}(n, n - x) =$ Computation: $p_{l,t} = 1 - T_{(1-\alpha/2)}(n, n - x) =$ b) Procedure for $n > 30$ ☐ 1) Upper confidence limit — Case $x = 0$ ☐ Computation: $p_{u,t} = 1 - (\alpha/2)^{1/n} =$ — Case $x = n$ ☐ $p_{u,t} = 1$

- Fall $0 < x < n$ ☐

Ablesen des Werts aus Tabelle 3 für $q = 1 - \alpha/2$: $u_{1-\alpha/2} =$

Ablesen des Werts d entsprechend dem gewählten Vertrauensniveau:

$1 - \alpha$	0,90	0,95	0,99
d	0,677	0,960	1,659

Berechnung:

$$p_{u,t} = p_* + (1 - 2p_*)d/(n+1) + u_{1-\alpha/2} \sqrt{p_*(1-p_*)[1-d/(n+1)]/(n+1)} =$$

mit $p_* = (x+1)/(n+1)$

2) Untere Vertrauensgrenze

- Fall $x = 0$ ☐

$$p_{l,t} = 0$$

- Fall $x = n$ ☐

Berechnung:

$$p_{l,t} = (\alpha/2)^{1/n}$$

- Fall $0 < x < n$ ☐

Ablesen des Werts aus Tabelle 3 für $q = 1 - \alpha/2$: $u_{1-\alpha/2} =$

Ablesen des Werts d entsprechend dem gewählten Vertrauensniveau:

$1 - \alpha$	0,90	0,95	0,99
d	0,677	0,960	1,659

Berechnung:

$$p_{l,t} = p_* + (1 - 2p_*)d/(n+1) - u_{1-\alpha/2} \sqrt{p_*(1-p_*)[1-d/(n+1)]/(n+1)} =$$

mit $p_* = x/(n+1)$

Ergebnisse:

$$p_{l,t} = \quad ; \quad p_{u,t} = \quad ; \quad p_{l,t} \leq p \leq p_{u,t}$$

— Case $0 < x < n$ ☐

Read the value from table 3 for $q = 1 - \alpha/2$: $u_{1-\alpha/2} =$

Read the value of d corresponding to the confidence level chosen:

$1 - \alpha$	0,90	0,95	0,99
d	0,677	0,960	1,659

Computation:

$$p_{u,t} = p_* + (1 - 2p_*)d/(n+1) + u_{1-\alpha/2} \sqrt{p_*(1-p_*)[1 - d/(n+1)]/(n+1)} =$$

with $p_* = (x+1)/(n+1)$

2) Lower confidence limit

— Case $x = 0$ ☐

$$p_{l,t} = 0$$

— Case $x = n$ ☐

Computation:

$$p_{l,t} = (\alpha/2)^{1/n} =$$

— Case $0 < x < n$ ☐

Read the value from table 3 for $q = 1 - \alpha/2$: $u_{1-\alpha/2} =$

Read the value of d corresponding to the confidence level chosen:

$1 - \alpha$	0,90	0,95	0,99
d	0,677	0,960	1,659

Computation:

$$p_{l,t} = p_* - (1 - 2p_*)d/(n+1) - u_{1-\alpha/2} \sqrt{p_*(1-p_*)[1 - d/(n+1)]/(n+1)} =$$

with $p_* = x/(n+1)$

Results:

$$p_{l,t} = \quad ; \quad p_{u,t} = \quad ; \quad p_{l,t} \leq p \leq p_{u,t}$$

8.2 Formblätter B: Vergleich des Anteils p mit einem vorgegebenen Wert p_0

8.2.1 Formblatt B-1: Vergleich des Anteils p mit einem vorgegebenen Wert p_0 bei einseitigem Test mit $H_0: p \geq p_0$

Merkmal: Verfahren zur Ermittlung: Einheiten: Kriterium für die Identifizierung der Zieleinheiten: Anmerkungen:	
Vorgegebener Wert $p_0 =$ Gewähltes Signifikanzniveau: $\alpha =$ Stichprobenumfang: $n =$ Anzahl der in der Stichprobe gefundenen Zieleinheiten: $x =$	
Testverfahren:	
I	Der(Die) kritische(n) Wert(e) ist(sind) bereits bekannt (siehe 7.2.1 und, sofern anwendbar, die Ermittlung der kritischen Werte unten): ☐ $C_{l,o} =$ H_0 wird verworfen, wenn $x < C_{l,o}$; anderenfalls wird H_0 nicht verworfen.
II	Der(Die) kritische(n) Wert(e) ist(sind) nicht bekannt: ☐ a) Fall $x \geq p_0 n$ ☐ H_0 wird nicht verworfen b) Fall $x < p_0 n$ ☐ 1) Verfahren für $n \leq 30$ ☐ Ermitteln der einseitigen oberen Vertrauensgrenze für n , x und das Vertrauensniveau $(1 - \alpha)$ nach Formblatt A-1 $p_{u,o} =$ H_0 wird verworfen, wenn $p_{u,o} < p_0$; anderenfalls wird H_0 nicht verworfen. 2) Verfahren für $n > 30$ ☐ — Fall $x = 0$ ☐ Berechnung: $p_{u,o} = 1 - \alpha^{1/n} =$ [siehe Formblatt A-1 b) 1)] H_0 wird verworfen, wenn $p_{u,o} < p_0$; anderenfalls wird H_0 nicht verworfen. — Fall $0 < x < n$ ☐ Ablezen des Werts aus Tabelle 3 für $q = 1 - \alpha$: $u_{1-\alpha} =$ Berechnung: $u_1 = 2 \left[\sqrt{(n-x)p_0} - \sqrt{(x+1)(1-p_0)} \right] =$ H_0 wird verworfen, wenn $u_1 > u_{1-\alpha}$; anderenfalls wird H_0 nicht verworfen.
Testergebnis:	
H_0 wird verworfen ☐ H_0 wird nicht verworfen ☐	

8.2 B Forms: Comparison of the proportion p with a given value p_0

8.2.1 Form B-1: Comparison of the proportion p with a given value p_0 and with one-sided test with $H_0: p \geq p_0$

Characteristic: Determination procedure: Items: Criterion for the identification of target items: Notes:	
Given value $p_0 =$ Significance level chosen: $\alpha =$ Sample size: $n =$ Number of target items found in the sample: $x =$	
Test procedure:	
I The critical value(s) is (are) already known (see 7.2.1 and, if applicable, the determination of the critical values below): $C_{l,0} =$ H_0 is rejected if $x < C_{l,0}$; otherwise it is not rejected.	☐
II The critical value(s) is(are) not known:	☐
a) Case $x \geq p_0 n$ H_0 is not rejected	☐
b) Case $x < p_0 n$	☐
1) Procedure for $n \leq 30$ Determine according to form A-1 the one-sided upper confidence limit for n, x and the confidence level $(1 - \alpha)$: $p_{u,0} =$ H_0 is rejected if $p_{u,0} < p_0$; otherwise it is not rejected.	☐
2) Procedure for $n > 30$	☐
— Case $x = 0$ Computation: $p_{u,0} = 1 - \alpha^{1/n} =$ [see form A-1 b) 1)] H_0 is rejected if $p_{u,0} < p_0$; otherwise it is not rejected.	☐
— Case $0 < x < n$ Read the value from table 3 for $q = 1 - \alpha$: $u_{1-\alpha} =$ Computation: $u_1 = 2 \left[\sqrt{(n-x)p_0} - \sqrt{(x+1)(1-p_0)} \right] =$ H_0 is rejected if $u_1 > u_{1-\alpha}$; otherwise it is not rejected.	☐
Test result: H_0 is rejected	☐ H_0 is not rejected ☐

Ermittlung der kritischen Werte:

$C_{l,o}$ ist die kleinste nicht negative ganze Zahl x , für die der Test nach Formblatt B-1-II nicht zum Verwerfen von H_0 führt. $C_{l,o}$ wird iterativ durch wiederholte Anwendung von Formblatt B-1-II mit verschiedenen Werten von x ¹⁾ ermittelt. Dabei sind solche Werte von x zu ermitteln, die voneinander um 1 abweichen, und von denen einer zum Verwerfen der Nullhypothese führt, während der andere das nicht tut. Sofern erwünscht, kann ein Anfangswert für x , x_{start} wie folgt ermittelt werden.

Berechnungen:

np_0 , auf die nächste ganze Zahl gerundet, ist $x^* =$

$p_{l,o|x=x^*} =$ ($p_{l,o|x=x^*}$ aus Formblatt A-2)

$np_{l,o|x=x^*}$, gerundet auf die nächste ganze Zahl, ist $x_{\text{start}} =$

Auswertung der Testergebnisse aus Formblatt B-1-II:

für $x \leq C_{l,o} - 1 =$ H_0 wird verworfen

für $x \geq C_{l,o} =$ H_0 wird nicht verworfen ^{N1)}

Ergebnis:

$C_{l,o} =$

1) Der kritische Wert bzw. einer der kritischen Werte existiert gegebenenfalls nicht für Extremwerte von p_0 und/oder für einen sehr kleinen Stichprobenumfang n .

N1) Nationale Fußnote: Der Text „ H_0 is rejected“ in ISO 11453 müsste lauten: „ H_0 is not rejected“. Dieses ist in der deutschsprachigen Fassung korrigiert worden.

Determination of the critical values: $C_{l,0}$ is the smallest non-negative integer x for which the test according to form B-1-II does not lead to the rejection of H_0. $C_{l,0}$ is to be determined iteratively through repeated application of form B-1-II with different values of x ¹⁾. Thereby those values of x are to be determined which differ from each other by 1 and one of which leads to the rejection of the null hypothesis while the other does not. If desired a start value for x, x_{start} can be obtained as follows.	
Computations: np_0, rounded to the next integer, is $x^* =$ $p_{l,0} _{x=x^*} =$ $(p_{l,0} _{x=x^*}$ from form A-2) $np_{l,0} _{x=x^*}$, rounded to the next integer, is $x_{\text{start}} =$	
Interpretation of the test results from form B-1-II: for $x \leq C_{l,0} - 1 =$ H_0 is rejected for $x \geq C_{l,0} =$ H_0 is rejected ^{N1)}	
Result: $C_{l,0} =$	
1) The critical value or one of the critical values, respectively, may not exist for extreme values of p_0 and/or for very small sample sizes n.	

N1) Nationale Fußnote: Der Text „ H_0 is rejected“ in ISO 11453 müsste lauten: „ H_0 is not rejected“. Dieses ist in der deutschsprachigen Fassung korrigiert worden.

8.2.2 Formblatt B-2: Vergleich des Anteils p mit einem vorgegebenen Wert p_0 bei einseitigem Test mit $H_0: p \leq p_0$

Merkmal: Verfahren zur Ermittlung: Einheiten: Kriterium für die Identifizierung der Zieleinheiten: Anmerkungen:	
Vorgegebener Wert $p_0 =$ Gewähltes Signifikanzniveau: $\alpha =$ Stichprobenumfang: $n =$ Anzahl der in der Stichprobe gefundenen Zieleinheiten: $x =$	
Testverfahren:	
I	Der(Die) kritische(n) Wert(e) ist(sind) bereits bekannt (siehe 7.2.1 und, sofern anwendbar, die Ermittlung der kritischen Werte unten): ☐ $C_{u,0} =$ H_0 wird verworfen, wenn $x > C_{u,0}$; anderenfalls wird H_0 nicht verworfen.
II	Der(Die) kritische(n) Wert(e) ist(sind) nicht bekannt: ☐ a) Fall $x \leq p_0 n$ ☐ H_0 wird nicht verworfen b) Fall $x > p_0 n$ ☐ 1) Verfahren für $n \leq 30$ ☐ Ermitteln der einseitigen unteren Vertrauensgrenze für n , x und das Vertrauensniveau $(1 - \alpha)$ nach Formblatt A-2 $p_{l,0} =$ H_0 wird verworfen, wenn $p_{l,0} > p_0$; anderenfalls wird H_0 nicht verworfen. 2) Verfahren für $n > 30$ ☐ — Fall $x = n$ ☐ Berechnung: $p_{l,0} = \alpha^{1/n} =$ [siehe Formblatt A-2 b) 2)] H_0 wird verworfen, wenn $p_{l,0} > p_0$; anderenfalls wird H_0 nicht verworfen. — Fall $0 < x < n$ ☐ Ablesen des Werts aus Tabelle 3 für $q = 1 - \alpha$: $u_{1-\alpha} =$ Berechnung: $u_2 = 2 \left[\sqrt{x(1-p_0)} - \sqrt{(n-x+1)p_0} \right] =$ H_0 wird verworfen, wenn $u_2 > u_{1-\alpha}$; anderenfalls wird H_0 nicht verworfen.

8.2.2 Form B-2: Comparison of the proportion p with a given value p_0 and with one-sided test with $H_0: p \leq p_0$

Characteristic: Determination procedure: Items: Criterion for the identification of target items: Notes:
Given value $p_0 =$ Significance level chosen: $\alpha =$ Sample size: $n =$ Number of target items found in the sample: $x =$
Test procedure:
I The critical value(s) is (are) already known (see 7.2.1 and, if applicable, the determination of the critical values below): ☐ $C_{u,0} =$ H_0 is rejected, if $x > C_{u,0}$; otherwise it is not rejected.
II The critical value(s) is (are) not known: ☐ a) Case $x \leq p_0 n$ ☐ H_0 is not rejected. b) Case $x > p_0 n$ ☐ 1) Procedure for $n \leq 30$ ☐ Determine according to form A-2 the one-sided lower confidence limit for n, x and the confidence level $(1-\alpha)$: $p_{l,0} =$ H_0 is rejected if $p_{l,0} > p_0$; otherwise it is not rejected. 2) Procedure for $n > 30$ ☐ — Case $x = n$ ☐ Computation : $p_{l,0} = \alpha^{1/n} =$ [see form A-2 b) 2)] H_0 is rejected if $p_{l,0} > p_0$; otherwise it is not rejected. — Case $0 < x < n$ ☐ Read the value from table 3 for $q = 1-\alpha$: $u_{1-\alpha} =$ Computation: $u_2 = 2 \left[\sqrt{x(1-p_0)} - \sqrt{(n-x+1)p_0} \right] =$ H_0 is rejected if $u_2 > u_{1-\alpha}$; otherwise it is not rejected.

Testergebnis:

 H_0 wird verworfen ☐ H_0 wird nicht verworfen ☐

Ermittlung der kritischen Werte:

$C_{u,o}$ ist die größte ganze Zahl x , für die der Test nach Formblatt B-2-II nicht zum Verwerfen der Nullhypothese führt. $C_{u,o}$ wird iterativ durch wiederholte Anwendung von Formblatt B-2-II mit verschiedenen Werten von x ¹⁾ ermittelt. Dabei sind solche Werte von x zu ermitteln, die voneinander um 1 abweichen, und von denen einer zum Verwerfen der Nullhypothese führt, während der andere das nicht tut. Sofern erwünscht, kann ein Anfangswert für x , x_{start} wie folgt ermittelt werden.

Berechnung:

 np_0 , auf die nächste ganze Zahl gerundet, ist $x^* =$ $p_{u,o|x=x^*} = (p_{u,o|x=x^*} \text{ aus Formblatt A-1})$ $np_{u,o|x=x^*}$, gerundet auf die nächste ganze Zahl, ist $x_{\text{start}} =$

Auswertung der Testergebnisse aus Formblatt B-2-II:

für $x \leq C_{u,o} = H_0$ wird nicht verworfenfür $x \geq C_{u,o} + 1 = H_0$ wird verworfen

Ergebnis:

 $C_{u,o} =$

1) Der kritische Wert bzw. einer der kritischen Werte existiert gegebenenfalls nicht für Extremwerte von p_0 und/oder für einen sehr kleinen Stichprobenumfang n .

Test result:	
H_0 is rejected	☐
H_0 is not rejected	☐
Determination of the critical values: $C_{u,0}$ is the largest integer x for which the test according to form B-2-II does not lead to the rejection of the null hypothesis. $C_{u,0}$ is to be determined iteratively through repeated application of form B-2-II with different values of x ¹⁾ . Thereby those values of x are to be determined which differ from each other by 1 and one of which leads to the rejection of the null hypothesis while the other does not. If desired, a start value for x , x_{start} can be obtained as follows.	
Computations: np_0 , rounded to the next integer, is $x^* =$ $p_{u,0} _{x=x^*} =$ $(p_{u,0} _{x=x^*} \text{ from form A-1})$ $np_{u,0} _{x=x^*}$, rounded to the next integer, is $x_{\text{start}} =$	
Interpretation of the test results from form B-2-II: for $x \leq C_{u,0} =$ H_0 is not rejected for $x \geq C_{u,0}+1 =$ H_0 is rejected	
Result: $C_{u,0} =$	
1) The critical value or one of the critical values, respectively, may not exist for extreme values of p_0 and/or for very small sample sizes n .	

8.2.3 Formblatt B-3: Vergleich des Anteils p mit einem vorgegebenen Wert p_0 bei zweiseitigem Test mit $H_0: p = p_0$

Merkmal: Verfahren zur Ermittlung: Einheiten: Kriterium für die Identifizierung der Zieleinheiten: Anmerkungen:	
Vorgegebener Wert $p_0 =$ Gewähltes Signifikanzniveau: $\alpha =$ Stichprobenumfang: $n =$ Anzahl der in der Stichprobe gefundenen Zieleinheiten: $x =$	
Testverfahren:	
I	Der(Die) kritische(n) Wert(e) ist(sind) bereits bekannt (siehe 7.2.1 und, sofern anwendbar, die Ermittlung der kritischen Werte unten): ☐ $C_{l,t} =$ $C_{u,t} =$ H_0 wird verworfen, wenn $x < C_{l,t}$ oder wenn $x > C_{u,t}$; anderenfalls wird H_0 nicht verworfen.
II	Der(Die) kritische(n) Wert(e) ist(sind) nicht bekannt: ☐ a) Verfahren für $n \leq 30$ ☐ Ermitteln der zweiseitigen Vertrauensgrenzen für n , x und das Vertrauensniveau $(1 - \alpha)$ nach Formblatt A-3: $p_{l,t} =$ und $p_{u,t} =$ H_0 wird verworfen, wenn $p_{l,t} > p_0$ oder wenn $p_{u,t} < p_0$; anderenfalls wird H_0 nicht verworfen. b) Verfahren für $n > 30$ ☐ 1) Fall $x = 0$ ☐ Berechnung: $p_{u,t} = 1 - (\alpha / 2)^{1/n} =$ H_0 wird verworfen, wenn $p_{u,t} < p_0$; anderenfalls wird H_0 nicht verworfen. 2) Fall $x = n$ ☐ Berechnung: $p_{l,t} = (\alpha / 2)^{1/n} =$ H_0 wird verworfen, wenn $p_{l,t} > p_0$; anderenfalls wird H_0 nicht verworfen.

8.2.3 Form B-3: Comparison of the proportion p with a given value p_0 and with two-sided test with $H_0: p = p_0$

Characteristic: Determination procedure: Items: Criterion for the identification of target items: Notes:
Given value $p_0 =$ Significance level chosen: $\alpha =$ Sample size: $n =$ Number of target items found in the sample: $x =$
Test procedure:
I The critical value(s) is (are) already known (see 7.2.1 and, if applicable, the determination of the critical values below): ☐ $C_{l,t} =$ $C_{u,t} =$ H_0 is rejected if $x < C_{l,t}$ or $x > C_{u,t}$; otherwise, it is not rejected.
II The critical value(s) is (are) not known: ☐ a) Procedure for $n \leq 30$ ☐ Determine according to form A-3 the two-sided confidence limits for n, x, and the confidence level $(1 - \alpha)$: $p_{l,t} =$ and $p_{u,t} =$ H_0 is rejected if $p_{l,t} > p_0$ or $p_{u,t} < p_0$; otherwise, it is not rejected. b) Procedure for $n > 30$ ☐ 1) Case $x = 0$ ☐ Computation: $p_{u,t} = 1 - (\alpha/2)^{1/n} =$ H_0 is rejected if $p_{u,t} < p_0$; otherwise, it is not rejected. 2) Case $x = n$ ☐ Computation: $p_{l,t} = (\alpha/2)^{1/n} =$ H_0 is rejected if $p_{l,t} > p_0$; otherwise, it is not rejected.

3) Fall $0 < x < n$ Ablesen des Werts aus Tabelle 3 für $q = 1 - \alpha/2$: $u_{1-\alpha/2} =$

Berechnungen:

$$u_1 = 2 \left[\sqrt{(n-x)p_0} - \sqrt{(x+1)(1-p_0)} \right] =$$

$$u_2 = 2 \left[\sqrt{x(1-p_0)} - \sqrt{(n-x+1)p_0} \right] =$$

 H_0 wird verworfen, wenn $u_1 > u_{1-\alpha/2}$ oder wenn $u_2 > u_{1-\alpha/2}$; anderenfalls wird H_0 nicht verworfen.

Testergebnis:

 H_0 wird verworfen H_0 wird nicht verworfen

Ermittlung der kritischen Werte:

$C_{l,t}$ ist die kleinste nicht negative ganze Zahl x , und $C_{u,t}$ ist die größte ganze Zahl x , für die der Test nach Formblatt B-3-II nicht zum Verwerfen von H_0 führt. $C_{l,t}$ und $C_{u,t}$ werden iterativ durch wiederholte Anwendung von Formblatt B-3-II mit verschiedenen Werten von x ¹⁾ ermittelt. Dabei sind zwei Wertepaare so zu ermitteln, dass in jedem Paar die Werte voneinander um 1 abweichen, und von denen einer der Werte zum Verwerfen der Nullhypothese führt, während der andere das nicht tut. Sofern erwünscht, können Anfangswerte für x , x_{start} wie folgt ermittelt werden.

Berechnungen:

 np_0 , auf die nächste ganze Zahl gerundet, ist $x^* =$ $p_{l,t|x=x^*} =$ $p_{u,t|x=x^*} =$ $p_{l,t|x=x^*}$ und $p_{u,t|x=x^*}$ aus Formblatt A-3 $np_{l,t|x=x^*}$ gerundet auf die nächste ganze Zahl, ist x_{start} (unterer Wert) = $np_{u,t|x=x^*}$ gerundet auf die nächste ganze Zahl, ist x_{start} (oberer Wert) =

Auswertung der Testergebnisse aus Formblatt B-3-II:

für $x \leq C_{l,t} - 1 =$ H_0 wird verworfenfür $x = C_{l,t} =$ bis $x = C_{u,t} =$ H_0 wird nicht verworfenfür $x \geq C_{u,t} + 1 =$ H_0 wird verworfen

Ergebnisse:

 $C_{l,t} =$ $C_{u,t} =$

1) Der kritische Wert bzw. einer der kritischen Werte existiert gegebenenfalls nicht für Extremwerte von p_0 und/oder für einen sehr kleinen Stichprobenumfang n .

3) Case $0 < x < n$ ☐

Read the value from table 3 for $q = 1 - \alpha/2$: $u_{1-\alpha/2} =$

Computations:

$$u_1 = 2 \left[\sqrt{(n-x)p_0} - \sqrt{(x+1)(1-p_0)} \right] =$$

$$u_2 = 2 \left[\sqrt{x(1-p_0)} - \sqrt{(n-x+1)p_0} \right] =$$

H_0 is rejected if $u_1 > u_{1-\alpha/2}$ or $u_2 > u_{1-\alpha/2}$; otherwise, it is not rejected.

Test result:

H_0 is rejected ☐

H_0 is not rejected ☐

Determination of the critical values:

$C_{l,t}$ is the smallest non-negative integer x and $C_{u,t}$ is the largest integer x for which the test according to form B-3-II does not lead to the rejection of H_0 . $C_{l,t}$ and $C_{u,t}$ are to be determined iteratively through repeated application of form B-3-II with different values of x ¹⁾. Thereby two pairs of values are to be determined such that in each pair the values differ from each other by 1 and one of the values leads to the rejection of the null hypothesis while the other does not. If desired, start values for x , x_{start} can be obtained as follows.

Computations:

np_0 , rounded to the next integer, is $x^* =$

$p_{l,t}|_{x=x^*} =$ $p_{u,t}|_{x=x^*} =$

$p_{l,t}|_{x=x^*}$ and $p_{u,t}|_{x=x^*}$ from form A-3

$np_{l,t}|_{x=x^*}$, rounded to the next integer, is x_{start} (lower) =

$np_{u,t}|_{x=x^*}$, rounded to the next integer, is x_{start} (upper) =

Interpretation of the test results from form B-3-II:

for $x \leq C_{l,t} - 1 =$

for $x = C_{l,t} =$

for $x \geq C_{u,t} + 1 =$

H_0 is rejected

H_0 is not rejected

H_0 is rejected

Results:

$C_{l,t} =$ $C_{u,t} =$

1) The critical value or one of the critical values, respectively, may not exist for extreme values of p_0 and/or for very small sample sizes n .

8.3 Formblätter C: Vergleich zweier Anteile

8.3.1 Formblatt C-1: Vergleich zweier Anteile bei einseitigem Test mit $H_0: p_1 \geq p_2$

Merkmal: Verfahren zur Ermittlung: Einheiten: Kriterium für die Identifizierung der Zieleinheiten: Anmerkungen:
Gewähltes Signifikanzniveau: $\alpha =$ Stichprobenumfang 1: $n_1 =$ Stichprobenumfang 2: $n_2 =$ Anzahl der Zieleinheiten in Stichprobe 1: $x_1 =$ Anzahl der Zieleinheiten in Stichprobe 2: $x_2 =$
Überprüfung für den Trivialfall: $\frac{x_1}{n_1} \geq \frac{x_2}{n_2}$ ist wahr ☐ ist nicht wahr ☐ Im Fall "wahr" wird die Nullhypothese nicht verworfen, und das Testergebnis kann sofort angegeben werden. Anderenfalls ist das folgende Verfahren anzuwenden, das schließlich zum Verwerfen oder Nichtverwerfen von H_0 führen kann.
Testverfahren für Nichttrivialfälle: Wenn mindestens einer der vier Werte n_1 , n_2 , $(x_1 + x_2)$, $(n_1 + n_2 - x_1 - x_2)$ kleiner als oder gleich $(n_1 + n_2)/4$ ist, ist die Binomialapproximation I anzuwenden; anderenfalls die Normalapproximation II. Es kann jedoch, selbst wenn obige Bedingung erfüllt ist, die Normalapproximation angewendet werden, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind: — bei Anwendung der Binomialapproximation ist eine Interpolation in der Tabelle der F-Verteilung notwendig; — n_1 und n_2 sind von gleicher Größenordnung oder $(x_1 + x_2)$ und $(n_1 + n_2 - x_1 - x_2)$ sind von gleicher Größenordnung. Entscheidung: Die Binomialapproximation ist anzuwenden (Fortsetzung mit I) ☐ Die Normalapproximation ist anzuwenden (Fortsetzung mit II) ☐