

DIN ISO 16269-8

ICS 03.120.30

**Statistische Auswertung von Daten –
Teil 8: Ermittlung von Prognosebereichen (ISO 16269-8:2004);
Text Deutsch und Englisch**

Statistical interpretation of data –
Part 8: Determination of prediction intervals (ISO 16269-8:2004);
Text in German and English

Interprétation statistique des données –
Partie 8: Détermination des intervalles de prédiction (ISO 16269-8:2004);
Texte en allemand et anglais

Gesamtumfang 150 Seiten

Normenausschuss Qualitätsmanagement, Statistik und Zertifizierungsgrundlagen (NQSZ) im DIN

Inhalt

Seite

Nationales Vorwort	6
Einleitung	8
1 Anwendungsbereich	10
2 Normative Verweisungen	10
3 Begriffe und Formelzeichen	12
3.1 Begriffe	12
3.2 Formelzeichen	12
4 Prognosebereiche	14
4.1 Allgemeines	14
4.2 Vergleich mit anderen Arten statistischer Bereiche	16
4.2.1 Wahl des richtigen Bereichs	16
4.2.2 Vergleich mit statistischen Anteilsbereichen	16
4.2.3 Vergleich mit Vertrauensbereichen für Mittelwerte	18
5 Prognosebereiche für die in einer weiteren Stichprobe zu erwartenden Werte aus einer normalverteilten Grundgesamtheit mit unbekannter Standardabweichung	18
5.1 Einseitig begrenzte Bereiche	18
5.2 Symmetrische zweiseitig begrenzte Bereiche	18
5.3 Prognosebereiche für nicht normalverteilte, aber in eine Normalverteilung transformierbare Grundgesamtheiten	20
5.4 Ermittlung des erforderlichen Ausgangsstichprobenumfangs n für einen vorgegebenen Höchstwert des Prognosebereichsfaktors k	20
5.5 Ermittlung des Vertrauensniveaus zu einem vorgegebenen Prognosebereich	22
6 Prognosebereiche für die in einer weiteren Stichprobe zu erwartenden Werte aus einer normalverteilten Grundgesamtheit mit bekannter Standardabweichung	22
6.1 Einseitige Bereiche	22
6.2 Symmetrische zweiseitige Bereiche	22
6.3 Prognosebereiche für nicht normalverteilte, aber in eine Normalverteilung transformierbare Grundgesamtheiten	24
6.4 Ermittlung des erforderlichen Ausgangsstichprobenumfangs n für einen vorgegebenen Höchstwert des Prognosebereichsfaktors k	24
6.5 Ermittlung des Vertrauensniveaus zu einem vorgegebenen Prognosebereich	24
7 Prognosebereiche für den Mittelwert einer weiteren Stichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit	26
8 Verteilungsfreie Prognosebereiche	26
8.1 Allgemeines	26
8.2 Einseitige Bereiche	26
8.3 Zweiseitige Bereiche	28
Anhang A (normativ) Tabellen für Prognosebereichsfaktoren k für einseitig begrenzte Prognosebereiche bei unbekannter Standardabweichung der Grundgesamtheit	36
Anhang B (normativ) Tabellen für Prognosebereichsfaktoren k für zweiseitig begrenzte Prognosebereiche bei unbekannter Standardabweichung der Grundgesamtheit	55
Anhang C (normativ) Tabellen für Prognosebereichsfaktoren k für einseitig begrenzte Prognosebereiche bei bekannter Standardabweichung der Grundgesamtheit	74
Anhang D (normativ) Tabellen für Prognosebereichsfaktoren k für zweiseitig begrenzte Prognosebereiche bei bekannter Standardabweichung der Grundgesamtheit	93
Anhang E (normativ) Tabellen für Stichprobenumfänge für einseitig begrenzte verteilungsfreie Prognosebereiche	112

**Anhang F (normativ) Tabellen für Stichprobenumfänge für zweiseitig begrenzte verteilungsfreie
Prognosebereiche 119**

Anhang G (normativ) Interpolation von Tabellenwerten 126

Anhang H (informativ) Den Tabellen zugrunde liegende statistische Theorie 134

Literaturhinweise 150

Contents

	Page
Introduction	9
1 Scope	11
2 Normative references	11
3 Terms, definitions and symbols	13
3.1 Terms and definitions	13
3.2 Symbols	13
4 Prediction intervals	15
4.1 General	15
4.2 Comparison with other types of statistical interval	17
4.2.1 Choice of type of interval	17
4.2.2 Comparison with a statistical tolerance interval	17
4.2.3 Comparison with a confidence interval for the mean	19
5 Prediction intervals for all observations in a further sample from a normally distributed population with unknown population standard deviation	19
5.1 One-sided intervals	19
5.2 Symmetric two-sided intervals	19
5.3 Prediction intervals for non-normally distributed populations that can be transformed to normality	21
5.4 Determination of a suitable initial sample size, n , for a given maximum value of the prediction interval factor, k	21
5.5 Determination of the confidence level corresponding to a given prediction interval	23
6 Prediction intervals for all observations in a further sample from a normally distributed population with known population standard deviation	23
6.1 One-sided intervals	23
6.2 Symmetric two-sided intervals	23
6.3 Prediction intervals for non-normally distributed populations that can be transformed to normality	25
6.4 Determination of a suitable initial sample size, n , for a given value of k	25
6.5 Determination of the confidence level corresponding to a given prediction interval	25
7 Prediction intervals for the mean of a further sample from a normally distributed population	27
8 Distribution-free prediction intervals	27
8.1 General	27
8.2 One-sided intervals	27
8.3 Two-sided intervals	29
Annex A (normative) Tables of one-sided prediction interval factors, k , for unknown population standard deviation	36
Annex B (normative) Tables of two-sided prediction interval factors, k , for unknown population standard deviation	55
Annex C (normative) Tables of one-sided prediction interval factors, k , for known population standard deviation	74
Annex D (normative) Tables of two-sided prediction interval factors, k , for known population standard deviation	93
Annex E (normative) Tables of sample sizes for one-sided distribution-free prediction intervals	112

Annex F (normative) **Tables of sample sizes for two-sided distribution-free prediction intervals** **119**

Annex G (normative) **Interpolating in the tables**..... **127**

Annex H (informative) **Statistical theory underlying the tables** **135**

Bibliography..... **150**

Nationales Vorwort

Dieses Dokument wurde vom Technischen Komitee ISO/TC 69, *Applications of statistical methods*, erarbeitet. Der zuständige nationale Normenausschuss ist der NA 147, *Qualitätsmanagement, Statistik und Zertifizierungsgrundlagen (NQSZ)*, Arbeitsausschuss *Angewandte Statistik*.

Es wird auf die Möglichkeit hingewiesen, dass für Teile dieses Teils von ISO 16269 Patentrechte bestehen können. Das DIN übernimmt keine Verantwortung für die Kennzeichnung solcher Rechte.

Die Normenreihe ISO 16269 umfasst unter dem Haupttitel *Statistical interpretation of data* die folgenden Teile, von denen sich einige noch in Erarbeitung befinden:

- *Part 4: Detection and treatment of outliers*
- *Part 6: Determination of statistical tolerance intervals*
- *Part 7: Median; Estimation and confidence intervals*
- *Part 8: Determination of prediction intervals*

Für die in diesem Dokument zitierten Internationalen Normen wird im Folgenden auf die entsprechenden Deutschen Normen hingewiesen:

ISO 3534-1 siehe DIN ISO 3534-1

Nationaler Anhang NA (informativ)

Literaturhinweise

DIN ISO 3534-1, *Statistik — Begriffe und Formelzeichen — Teil 1: Wahrscheinlichkeit und allgemeine statistische Begriffe*

Statistische Auswertung von Daten — Teil 8: Ermittlung von Prognosebereichen

Einleitung

Prognosebereiche sind in solchen Fällen hilfreich, wo es wünschenswert oder erforderlich ist, eine Aussage bezüglich der zu erwartenden Ergebnisse einer Stichprobe von diskreten Einheiten und mit vorgegebenem Umfang aus den Ergebnissen einer vorangegangenen Stichprobe von — unter gleichen Bedingungen hergestellten — Einheiten herzuleiten. Sie sind insbesondere nützlich für Ingenieure, die in der Lage sein müssen, Grenzen für die Gesamtstreuung von Merkmalswerten einer verhältnismäßig kleinen Anzahl hergestellter Einheiten festlegen zu müssen. Angesichts der Tendenz zur Fertigung kleinerer Serien in manchen Industriezweigen ist dies von zunehmender Bedeutung.

Obwohl wissenschaftliche Untersuchungen über Prognosebereiche und ihre Anwendungsmöglichkeiten erstmals bereits 1973 publiziert wurden, wird deren Nutzen immer noch in überraschend geringem Maße wahrgenommen. Ursache dafür könnte zum einen die Nichtverfügbarkeit der Untersuchungsergebnisse für den möglichen Anwender, zum anderen die nicht verstandene Abgrenzung zu Vertrauensbereichen und statistischen Anteilsbereichen sein.

Dieser Teil von ISO 16269 verfolgt daher einen doppelten Zweck, nämlich

- den Unterschied zwischen Prognosebereichen, Vertrauensbereichen und statistischen Anteilsbereichen darzustellen;
- Berechnungsverfahren für einige besonders nützliche Arten von Prognosebereichen mit Hilfe umfangreicher, neu berechneter Tabellen bereitzustellen.

Hinsichtlich weiterer Informationen, die über die in diesem Teil von ISO 16269 beschriebenen Anwendungen hinausgehen, sei auf das Literaturverzeichnis verwiesen.

Statistical interpretation of data — Part 8: Determination of prediction intervals

Introduction

Prediction intervals are of value wherever it is desired or required to predict the results of a future sample of a given number of discrete items from the results of an earlier sample of items produced under identical conditions. They are of particular use to engineers who need to be able to set limits on the performance of a relatively small number of manufactured items. This is of increasing importance with the recent shift towards small-scale production in some industries.

Despite the first review article on prediction intervals and their applications being published as long ago as 1973, there is still a surprising lack of awareness of their value, perhaps due in part to the inaccessibility of the research work for the potential user, and also partly due to confusion with confidence intervals and statistical tolerance intervals. The purpose of this part of ISO 16269 is therefore twofold:

- to clarify the differences between prediction intervals, confidence intervals and statistical tolerance intervals;
- to provide procedures for some of the more useful types of prediction interval, supported by extensive, newly-computed tables.

For information on prediction intervals that are outside the scope of this part of ISO 16269, the reader is referred to the Bibliography.

1 Anwendungsbereich

Dieser Teil von ISO 16269 beschreibt Verfahren zur Ermittlung von Prognosebereichen für eine einzelne, kontinuierlich verteilte Zufallsgröße. Es handelt sich dabei um Bereiche von Werten einer Zufallsgröße, die aus einer Zufallsstichprobe vom Umfang n bestimmt werden und die eine Prognose hinsichtlich einer weiteren Zufallsstichprobe vom Umfang m aus der gleichen Grundgesamtheit mit einem vorgegebenen Vertrauensniveau erlauben.

Es werden drei verschiedene Arten von Grundgesamtheiten betrachtet:

- a) normalverteilte Grundgesamtheiten, deren Standardabweichung nicht bekannt ist;
- b) normalverteilte Grundgesamtheiten, deren Standardabweichung bekannt ist;
- c) Grundgesamtheiten, deren Verteilung kontinuierlich, aber von unbekannter Form ist.

Für jede dieser drei Grundgesamtheiten werden einseitige und symmetrisch zweiseitige Prognosebereiche als Berechnungsverfahren dargestellt. In allen Fällen können sechs verschiedene Vertrauensniveaus gewählt werden.

Die Berechnungsverfahren für a) und b) können auch für Grundgesamtheiten verwendet werden, die nicht normalverteilt sind, deren Verteilung aber in eine Normalverteilung transformiert werden kann.

In den Fällen a) und b) können aus den in diesem Teil von ISO 16269 enthaltenen Tabellen nur Prognosebereiche für *alle* m Werte einer weiteren Stichprobe der Zufallsgröße ermittelt werden. Im Fall c) können aus den Tabellen auch Prognosebereiche ermittelt werden, die mindestens $m - r$ der nächsten m Stichprobenwerte enthalten, wobei r ein Wert aus dem kleineren der beiden Intervalle 0 bis 10 beziehungsweise 0 bis $m - 1$ ist.

Für normalverteilte Grundgesamtheiten wird auch ein Berechnungsverfahren für Prognosebereiche des Mittelwerts der m weiteren Stichprobenergebnisse dargestellt.

2 Normative Verweisungen

Die folgenden zitierten Dokumente sind für die Anwendung dieses Dokuments erforderlich. Bei datierten Verweisungen gilt nur die in Bezug genommene Ausgabe. Bei undatierten Verweisungen gilt die letzte Ausgabe des in Bezug genommenen Dokuments (einschließlich aller Änderungen).

ISO 3534-1, *Statistics — Vocabulary and symbols — Part 1: General statistical terms and terms used in probability*^{N1)}

ISO 3534-2, *Statistics — Vocabulary and symbols — Part 2: Applied statistics*^{N1)}

N1) Nationale Fußnote: Der Titel wurde in der englischen Fassung falsch angegeben. Dies ist im deutschen Text korrigiert worden.

1 Scope

This part of ISO 16269 specifies methods of determining prediction intervals for a single continuously distributed variable. These are ranges of values of the variable, derived from a random sample of size n , for which a prediction relating to a further randomly selected sample of size m from the same population may be made with a specified confidence.

Three different types of population are considered, namely:

- a) normally distributed with unknown standard deviation;
- b) normally distributed with known standard deviation;
- c) continuous but of unknown form.

For each of these three types of population, two methods are presented, one for one-sided prediction intervals and one for symmetric two-sided prediction intervals. In all cases, there is a choice from among six confidence levels.

The methods presented for cases a) and b) may also be used for non-normally distributed populations that can be transformed to normality.

For cases a) and b) the tables presented in this part of ISO 16269 are restricted to prediction intervals containing *all* the further m sampled values of the variable. For case c) the tables relate to prediction intervals that contain at least $m - r$ of the next m values, where r takes values from 0 to 10 or 0 to $m - 1$, whichever range is smaller.

For normally distributed populations a procedure is also provided for calculating prediction intervals for the mean of m further observations.

2 Normative references

The following referenced documents are indispensable for the application of this document. For dated references, only the edition cited applies. For undated references, the latest edition of the referenced document (including any amendments) applies.

ISO 3534-1, *Statistics — Vocabulary and symbols — Part 1: Probability and general statistical terms*

ISO 3534-2, *Statistics — Vocabulary and symbols — Part 2: Statistical quality control*

3 Begriffe und Formelzeichen

3.1 Begriffe

Für die Anwendung dieses Dokuments gelten die Begriffe nach ISO 3534-1 und ISO 3534-2 sowie die folgenden Begriffe.

3.1.1

Prognosebereich

durch eine Zufallsstichprobe aus einer Grundgesamtheit ermittelter Wertebereich einer Zufallsgröße, der mit einem bestimmten Vertrauensniveau nicht weniger als eine vorgegebene Anzahl von Werten einer weiteren Zufallsstichprobe mit festgelegtem Umfang und aus der gleichen Grundgesamtheit enthält

ANMERKUNG In diesem Zusammenhang ist das Vertrauensniveau der — langfristig gesehene — Anteil von Fällen, in denen ein auf diese Weise festgelegter Wertebereich die vorgegebene Eigenschaft tatsächlich hat.

3.1.2

Ranggrößen

nach Sortierung in nicht-absteigender Wertefolge durch ihre Position in der Rangfolge gekennzeichnete Stichprobenwerte

ANMERKUNG In diesem Teil von ISO 16269 werden die Stichprobenwerte in der Reihenfolge ihrer Messung mit $x_1, x_2, \dots, x_n$ bezeichnet. Nach Sortierung in nicht-absteigender Wertefolge werden sie mit $x_{[1]}, x_{[2]}, \dots, x_{[n]}$ bezeichnet, wobei gilt: $x_{[1]} \leq x_{[2]} \leq \dots \leq x_{[n]}$. Der Ausdruck „nicht-absteigend“ wird anstelle von „aufsteigend“ verwendet, um den Fall mit einzuschließen, in dem zwei oder mehr Werte — zumindest innerhalb der Messabweichung — gleich sind. Gleiche Stichprobenwerte werden als Ranggrößen mit verschiedenen, aufeinander folgenden ganzen Zahlen in eckigen Klammern indiziert.

3.2 Formelzeichen

- a kleinster möglicher Wert der beobachteten Größe in der Grundgesamtheit
- α angegebene obere Grenze für die Wahrscheinlichkeit, dass mehr als r Werte aus einer weiteren Zufallsstichprobe vom Umfang m außerhalb des Prognosebereichs liegen werden
- b größter möglicher Wert der beobachteten Größe in der Grundgesamtheit
- C Vertrauensniveau in Prozent: $C = 100 (1 - \alpha)$
- k Prognosebereichsfaktor
- m Größe der weiteren Zufallsstichprobe, für die die Prognose gilt
- n Größe der Zufallsstichprobe, aus der der Prognosebereich ermittelt wurde
- s Stichprobenstandardabweichung: $s = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1)}$
- r vorgegebene maximale Anzahl von Werten aus einer weiteren Zufallsstichprobe vom Umfang m , die nicht innerhalb des Prognosebereichs liegen
- T_1 untere Prognosegrenze
- T_2 obere Prognosegrenze

3 Terms, definitions and symbols

3.1 Terms and definitions

For the purposes of this document, the terms and definitions given in ISO 3534-1 and ISO 3534-2 and the following apply.

3.1.1

prediction interval

interval determined from a random sample from a population in such a way that one may have a specified level of confidence that no fewer than a given number of values in a further random sample of a given size from the same population will fall

NOTE In this context, the confidence level is the long-run proportion of intervals constructed in this manner that will have this property.

3.1.2

order statistics

sample values identified by their position after ranking in non-decreasing order of magnitude

NOTE The sample values in order of selection are denoted in this part of ISO 16269 by $x_1, x_2, \dots, x_n$. After arranging in non-decreasing order, they are denoted by $x_{[1]}, x_{[2]}, \dots, x_{[n]}$, where $x_{[1]} \leq x_{[2]} \leq \dots \leq x_{[n]}$. The word “non-decreasing” is used in preference to “increasing” to include the case where two or more values are equal, at least to within measurement error. Sample values that are equal to one another are assigned distinct, contiguous integer subscripts in square brackets when represented as order statistics.

3.2 Symbols

a	lower limit to the values of the variable in the population
α	nominal maximum probability that more than r observations from the further random sample of size m will lie outside the prediction interval
b	upper limit to the values of the variable in the population
C	confidence level expressed as a percentage: $C = 100 (1 - \alpha)$
k	prediction interval factor
m	size of further random sample to which the prediction applies
n	size of random sample from which the prediction interval is derived
s	sample standard deviation: $s = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 / (n - 1)}$
r	specified maximum number of observations from the further random sample of size m that will not lie in the prediction interval
T_1	lower prediction limit
T_2	upper prediction limit

x_i i -ter Messwert aus der Zufallsstichprobe

$x_{[i]}$ i -ter Rangwert aus der Stichprobe

$\bar{x}$ Stichprobenmittelwert: $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n$

4 Prognosebereiche

4.1 Allgemeines

Ein *zweiseitig begrenzter Prognosebereich* ist ein Intervall (T_1, T_2) mit $T_1 < T_2$; T_1 und T_2 werden aus den Werten einer Zufallsstichprobe vom Umfang n berechnet und als *untere beziehungsweise obere Prognosegrenze* bezeichnet.

Sind a beziehungsweise b die untere beziehungsweise obere Grenze der Variablen in der Grundgesamtheit, so hat ein *einseitig begrenzter Prognosebereich* die Form (a, T_1) oder (T_2, b) .

ANMERKUNG 1 Aus praktischen Gründen wird a für Variablen, die nicht negativ sein können, oft als Null angenommen, und b wird für Variablen, die keine natürliche obere Grenze haben, oft als unendlich angenommen.

ANMERKUNG 2 Zur Ermittlung eines Prognosebereichs werden die Werte einer Grundgesamtheit gelegentlich als normalverteilt angenommen, obwohl es für sie natürliche Grenzwerte gibt. Dies erscheint zunächst unangebracht, da sich der Wertebereich der Normalverteilung von minus unendlich bis plus unendlich erstreckt. In der Praxis lassen sich jedoch auch viele Größen einer Grundgesamtheit mit natürlichen Grenzwerten in guter Näherung durch eine Normalverteilung beschreiben.

Die praktische Bedeutung eines Prognosebereichs für Einzelwerte aus einer Stichprobe besteht darin, dass der Beobachter behauptet, dass höchstens r Werte einer weiteren Zufallsstichprobe vom Umfang m aus derselben Grundgesamtheit nicht im Prognosebereich liegen werden, und dabei zugesteht, dass diese Aussage mit einer kleinen nominellen Wahrscheinlichkeit falsch sein könnte. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein solchermaßen festgelegter Prognosebereich tatsächlich die behauptete Eigenschaft hat, wird Vertrauensniveau genannt.

Der Sinn eines Prognosebereichs für Mittelwerte aus einer Stichprobe besteht in der Praxis darin, dass der Beobachter behauptet, dass der *Mittelwert* einer weiteren Zufallsstichprobe vom Umfang m aus derselben Grundgesamtheit im Prognosebereich liegen wird, und dabei zugesteht, dass diese Aussage mit einer kleinen nominellen Wahrscheinlichkeit falsch sein könnte. Auch hier wird die Wahrscheinlichkeit, dass ein solchermaßen festgelegter Prognosebereich tatsächlich die behauptete Eigenschaft hat, Vertrauensniveau genannt.

Dieser Teil von ISO 16269 stellt Verfahren dar, die für eine normalverteilte Grundgesamtheit und $r = 0$ und für den Mittelwert einer weiteren Stichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit anwendbar sind. Außerdem werden Verfahren für Grundgesamtheiten mit unbekannter Verteilungsform und für den kleineren der beiden Bereiche $r = 0, 1, \dots, 10$ beziehungsweise $r = 0$ bis $m - 1$ zur Verfügung gestellt. In allen Fällen enthalten die Tabellen Prognosebereichsfaktoren oder Stichprobenumfänge, die die angegebenen Vertrauensniveaus *mindestens* einhalten. Üblicherweise ist das tatsächliche Vertrauensniveau geringfügig größer als das angegebene.

Die Grenzwerte der Prognosebereiche für normalverteilte Grundgesamtheiten liegen k Stichprobenstandardabweichungen (oder, falls bekannt, Standardabweichungen der Grundgesamtheit) vom Stichprobenmittelwert entfernt, wobei k der Prognosebereichsfaktor ist. Wenn die Standardabweichung der Grundgesamtheit unbekannt ist, nimmt k bei kleinen Werten von n , großen Werten von m und hohem Signifikanzniveau sehr große Werte an. Große Werte von k , die zum Beispiel 10 oder 15 überschreiten, sollten nicht verwendet werden, da die resultierenden Prognosebereiche vermutlich zu groß und ohne praktischen Nutzen sind. Sie zeigen lediglich, dass die Ausgangsstichprobe zu klein war, um daraus nützliche Informationen für zukünftige Ergebnisse zu ziehen. Außerdem ist bei großen Werten von k die Eignung der resultierenden Prognosebereiche schon bei kleinen Abweichungen von der Normalverteilung in Frage gestellt. Werte von k bis zu 250 sind in den Tabellen vor allem deshalb aufgeführt, um zu zeigen, wie schnell k mit steigendem Ausgangsstichprobenumfang n abnimmt.

x_i i th observation in a random sample

$x_{[i]}$ i th order statistic

$\bar{x}$ sample mean: $\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i / n$

4 Prediction intervals

4.1 General

A *two-sided prediction interval* is an interval of the form (T_1, T_2) , where $T_1 < T_2$; T_1 and T_2 are derived from a random sample of size n and are called the *lower* and *upper prediction limits*, respectively.

If a and b are respectively the lower and upper limits of the variable in the population, a *one-sided prediction interval* will be of the form (T_1, b) or (a, T_2) .

NOTE 1 For practical purposes a is often taken to be zero for variables that cannot be negative, and b is often taken to be infinity for variables with no natural upper limit.

NOTE 2 Sometimes a population is treated as normal for the purpose of determining a prediction interval, even when it has a finite limit. This may seem incongruous, as the normal distribution ranges from minus infinity to plus infinity. However, in practice, many populations with a finite limit are closely approximated by a normal distribution.

The practical meaning of a prediction interval relating to individual sample values is that the experimenter claims that a further random sample of m values from the same population will have at most r values not lying in the interval, while admitting a small nominal probability that this assertion may be wrong. The nominal probability that an interval constructed in such a way satisfies the claim is called the confidence level.

The practical meaning of a prediction interval relating to a sample mean is that the experimenter claims that the *mean* of a further random sample of m values from the same population will lie in the interval, while admitting a small nominal probability that this assertion may be wrong. Again, the nominal probability that an interval constructed in such a way satisfies the claim is called the confidence level.

This part of ISO 16269 presents procedures applicable to a normally distributed population for $r = 0$ and procedures applicable to the mean of a further sample from a normally distributed population. It also provides procedures applicable to populations of unknown distributional form for $r = 0, 1, \dots, 10$ or 0 to $m - 1$, whichever range is smaller. In all cases, the tables present prediction interval factors or sample sizes that provide *at least* the stated level of confidence. In general, the actual confidence level is marginally greater than the stated level.

The limits of the prediction intervals for normally distributed populations are at a distance of k times the sample standard deviation (or, where known, the population standard deviation) from the sample mean, where k is the prediction interval factor. In the case of unknown population standard deviation, the value of k becomes very large for small values of n in combination with large values of m and high levels of confidence. Use of large values of k , for example in excess of 10 or 15, should be avoided whenever possible, as the resulting prediction intervals are likely to be too wide to be of any practical use, other than to indicate that the initial sample was too small to yield any useful information about future values. Moreover, for large values of k the integrity of the resulting prediction intervals could be badly compromised by even small departures from normality. Values of k up to 250 are included in the tables primarily to show how rapidly k decreases as the initial sample size n increases.

Für Prognosebereiche für Einzelwerte weiterer Stichproben kann Formblatt A zur Berechnung bei normalverteilten Grundgesamtheiten und Formblatt C zur Berechnung bei Grundgesamtheiten mit unbekannter Verteilungsform benutzt werden. Formblatt B ist als Hilfsmittel zur Berechnung eines Prognosebereichs für den Mittelwert weiterer Stichproben aus normalverteilten Grundgesamtheiten vorgesehen.

Anhänge A bis D enthalten Tabellen für Prognosebereichsfaktoren. Anhänge E und F enthalten Tabellen der notwendigen Stichprobenumfänge, wenn die Verteilungsform der Grundgesamtheit unbekannt ist. Anhang G beschreibt ein Interpolationsverfahren für den Fall, dass die benötigte Kombination aus n , m und dem Vertrauensniveau nicht tabelliert ist. Anhang H stellt die den Tabellen zugrunde liegenden statistischen Theorien dar.

4.2 Vergleich mit anderen Arten statistischer Bereiche

4.2.1 Wahl des richtigen Bereichs

In der Praxis werden häufig — ausgehend von den Ergebnissen einer zufälligen Ausgangsstichprobe — Prognosen für eine *endliche* Anzahl weiterer Beobachtungswerte benötigt. Für solche Fälle ist dieser Teil von ISO 16269 geeignet. Manchmal kommt es zu Verwechslungen mit anderen Arten statistischer Bereiche. Die Unterabschnitte 4.2.2 und 4.2.3 dienen der Klarstellung der Unterschiede.

4.2.2 Vergleich mit statistischen Anteilsbereichen

Ein Prognosebereich für Einzelwerte einer Stichprobe ist ein über eine Zufallsstichprobe aus einer Grundgesamtheit ermittelter Wertebereich, für den eine mit einem Vertrauensniveau verknüpfte Aussage über die in einer weiteren *Zufallsstichprobe* aus der Grundgesamtheit zu erwartende maximale *Anzahl* von Werten außerhalb dieses Bereichs getroffen werden kann. Ein statistischer Anteilsbereich (so wie er in ISO 16269-6 definiert ist) ist ebenfalls ein über eine Zufallsstichprobe aus einer Grundgesamtheit ermittelter Wertebereich, für den eine mit einem Vertrauensniveau verknüpfte Aussage getroffen werden kann. In diesem Fall bezieht sich die Aussage jedoch auf den maximalen *Anteil* von Werten in der *Grundgesamtheit*, die außerhalb dieses Bereichs liegen (oder, was gleichbedeutend ist, auf den *minimalen* Anteil von Werten in der Grundgesamtheit, die *innerhalb* dieses Bereichs liegen).

ANMERKUNG 1 Konstanten für statistische Anteilsbereiche sind Grenzwerte von Konstanten für Prognosebereiche für den Fall, dass der Umfang der weiteren Stichprobe m gegen unendlich geht und dabei das Verhältnis der Anzahl r der zu erwartenden Werte außerhalb des Prognosebereichs zu m konstant bleibt ($r > 0$ vorausgesetzt). Dies ist in Tabelle 1 für ein 95 %-Vertrauensniveau und $r/m = 0,1$ für ein- und zweiseitig begrenzte Bereiche dargestellt.

Für den Fall $r = 0$, auf den sich dieser Teil von ISO 16269 vor allem konzentriert, gibt es allerdings keinen solchen Zusammenhang zwischen den Konstanten für statistische Anteilsbereiche und Prognosebereiche.

Tabelle 1 — Beispiele für Konstanten für Prognosebereiche

r	1	2	5	10	20	50	100	1 000	Konstante für den statistischen Anteilsbereich mit einem Mindestanteil von 0,9 der Grundgesamtheit
m	10	20	50	100	200	500	1 000	10 000	
	Konstanten für Prognosebereiche								
einseitig begrenzt	1,887	1,846	1,767	1,718	1,686	1,663	1,655	1,647	1,646
zweiseitig begrenzt	2,208	2,172	2,103	2,061	2,034	2,014	2,007	2,000	2,000

ANMERKUNG 2 Der Fall $r = 0$ ist vor allem für sicherheitsrelevante Anwendungen wichtig.

For prediction intervals relating to the individual values in a further sample, Form A may be used to organize the calculations for a normally distributed population and Form C when the population is of unknown distributional form. Form B is provided to assist with the calculation of a prediction interval for the mean of a further sample from a normally distributed population.

Annexes A to D provide tables of prediction interval factors. Annexes E and F provide tables of sample sizes required when the population is of unknown distributional form. Annex G gives the procedure for interpolating in the tables when the required combination of n , m and confidence level is not tabulated. Annex H presents the statistical theory underlying the tables.

4.2 Comparison with other types of statistical interval

4.2.1 Choice of type of interval

In practice, it is often the case that predictions are required for a *finite* number of observations based on the results of an initial random sample. These are the circumstances under which this part of ISO 16269 is appropriate. There is sometimes confusion with other types of statistical interval. Subclauses 4.2.2 and 4.2.3 are presented in order to clarify the distinctions.

4.2.2 Comparison with a statistical tolerance interval

A prediction interval for individual sample values is an interval, derived from a random sample from a population, about which a confidence statement may be made concerning the maximum *number* of values in a further random *sample* from the population that will lie outside the interval. A statistical tolerance interval (such as that defined in ISO 16269-6) is also an interval derived from a random sample from a population for which a confidence statement may be made; however, the statement in this case relates to the maximum *proportion* of values in the *population* lying outside the interval (or, equivalently, to the *minimum* proportion of values in the population lying *inside* the interval).

NOTE 1 A statistical tolerance interval constant is the limit of a prediction interval constant as the future sample size, m , tends to infinity while the number, r , of items in the future sample falling outside the interval remains a constant fraction of m , provided $r > 0$. This is illustrated in Table 1 for a 95 % confidence level for one-sided and two-sided intervals when $r/m = 0,1$.

However, there is no such analogy between statistical tolerance interval constants and prediction interval constants for $r = 0$, the case on which this part of ISO 16269 is primarily focussed.

Table 1 — Example of prediction interval constants

r	1	2	5	10	20	50	100	1 000	Statistical tolerance interval constants for a minimum proportion of 0,9 of the population covered
m	10	20	50	100	200	500	1 000	10 000	
	Prediction interval constants								
One-sided intervals	1,887	1,846	1,767	1,718	1,686	1,663	1,655	1,647	1,646
Two-sided intervals	2,208	2,172	2,103	2,061	2,034	2,014	2,007	2,000	2,000

NOTE 2 The case $r = 0$ is particularly important in applications related to safety.

4.2.3 Vergleich mit Vertrauensbereichen für Mittelwerte

Ein Prognosebereich für einen Mittelwert ist ein, über eine Zufallsstichprobe aus einer Grundgesamtheit ermittelter Wertebereich, von dem — mit einem vorgegebenen Vertrauensniveau — behauptet werden kann, dass er den Mittelwert einer weiteren Zufallsstichprobe enthalten wird. Ein Vertrauensbereich für einen Mittelwert (so wie er in ISO 2602 definiert ist) ist ebenfalls ein über eine Zufallsstichprobe aus einer Grundgesamtheit ermittelter Wertebereich, für den eine mit einem Vertrauensniveau verknüpfte Aussage getroffen werden kann. In diesem Fall bezieht sich die Aussage jedoch auf den Mittelwert der *Grundgesamtheit*.

5 Prognosebereiche für die in einer weiteren Stichprobe zu erwartenden Werte aus einer normalverteilten Grundgesamtheit mit unbekannter Standardabweichung

5.1 Einseitig begrenzte Bereiche

Ein einseitig begrenzter Prognosebereich für eine normalverteilte Grundgesamtheit mit unbekannter Standardabweichung hat die Form $(\bar{x} - ks, b)$ oder $(a, \bar{x} + ks)$, wobei der Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ und die Stichprobenstandardabweichung s aus einer der Grundgesamtheit entnommenen Zufallsstichprobe vom Umfang n ermittelt werden. Der Prognosebereichsfaktor k hängt von n , dem Umfang der weiteren Stichprobe m und dem Vertrauensniveau C ab. Werte für k finden sich in Anhang A.

BEISPIEL Der beim Abfeuern von Artilleriegranaten eines bestimmten Typs im Geschützlauf entstehende Druck ist — wie aus bereits gewonnener Erfahrung bekannt — in guter Näherung normalverteilt. Eine Stichprobe mit 20 abgefeuerten Granaten ergibt für den Druck einen Mittelwert von 562,3 Mpa und eine Standardabweichung von 8,65 Mpa. Eine Serie von insgesamt 5 000 weiteren Granaten soll unter gleichen Fertigungsbedingungen hergestellt werden. Welcher Druck im Geschützlauf wird beim — unter gleichen Bedingungen vorgenommenen — Abschuss dieser 5 000 Granaten mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % bei keinem Abschuss überschritten?

Tabelle A.2 enthält Prognosebereichsfaktoren für ein Vertrauensniveau von 95 %. In Tabelle A.2 ist als entsprechender Prognosebereichsfaktor $k = 5,251$ zu finden. Die obere Grenze des einseitigen Prognosebereichs mit einem Vertrauensniveau von 95 % ist also

$$\bar{x} + ks = 562,3 + 5,251 \times 8,65 = 607,7 \text{ MPa}$$

Es wird also mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % keine der Granaten aus der Serie von 5 000 Stück einen Druck im Geschützlauf von mehr als 607,7 Mpa erzeugen.

Anhand dieses Beispiels wird auch die Anwendung von Formblatt A erläutert.

5.2 Symmetrische zweiseitig begrenzte Bereiche

Ein symmetrischer zweiseitig begrenzter Prognosebereich für eine normalverteilte Grundgesamtheit mit unbekannter Standardabweichung hat die Form $(\bar{x} - ks, \bar{x} + ks)$. Der Prognosebereichsfaktor k hängt von n , dem Umfang der weiteren Stichprobe m und dem Vertrauensniveau C ab. Werte für k finden sich in Anhang B.

BEISPIEL Die Zeit von der Entfernung des Sicherheitsstiftes bis zur Detonation von Handgranaten eines bestimmten Typs ist — wie bekannt — in guter Näherung normalverteilt. Eine Zufallsstichprobe von 30 Stück wird getestet, und die Zeiten bis zur Detonation werden aufgezeichnet. Der Stichprobenmittelwert ist 5,140 s und die Stichprobenstandardabweichung 0,241 s. Gesucht ist ein symmetrischer zweiseitiger Prognosebereich für die nächste Serie von 10 000 Granaten mit einem Vertrauensniveau von 99 %.

Tabelle B.4 enthält Prognosebereichsfaktoren für ein Vertrauensniveau von 99 %. Mit $n = 30$ und $m = 10\,000$ ergibt sich aus Tabelle B.4 der Wert $k = 6,059$. Der symmetrische Prognosebereich ist also

$$(\bar{x} - ks, \bar{x} + ks) = (5,140 - 6,059 \times 0,241, 5,140 + 6,059 \times 0,241) = (3,68, 6,60)$$

Es wird also mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % keine der Granaten aus der folgenden Serie von 10 000 Stück in einer Zeit außerhalb des Bereichs 3,68 s bis 6,60 s zur Detonation kommen.

4.2.3 Comparison with a confidence interval for the mean

A prediction interval for a mean is an interval, derived from a random sample from a population, for which it may be asserted with a given level of confidence that the mean of a further random *sample* of specified size will lie. A confidence interval for a mean (such as that defined in ISO 2602) is also an interval derived from a random sample from a population for which a confidence statement may be made; however, the statement in this case relates to the mean of the *population*.

5 Prediction intervals for all observations in a further sample from a normally distributed population with unknown population standard deviation

5.1 One-sided intervals

A one-sided prediction interval relating to a normally distributed population with unknown population standard deviation is of the form $(\bar{x} - ks, b)$ or $(a, \bar{x} + ks)$ where the values of the sample mean $\bar{x}$ and the sample standard deviation s are determined from a random sample of size n from the population. The prediction interval factor k depends on n , on the further sample size m and on the confidence level C ; values of k are presented in Annex A.

EXAMPLE The pressures in gun barrels caused by firing artillery shells of a given type are known from past experience to be closely approximated by a normal distribution. A sample of 20 rounds has a mean pressure of 562,3 MPa and a standard deviation of pressure of 8,65 MPa. A batch of 5 000 further rounds in total is to be produced under identical manufacturing conditions. What barrel pressure can one be 95 % confident will not be exceeded by any of the 5 000 shells fired under identical conditions ?

Table A.2 provides prediction interval factors at the 95 % confidence level. From Table A.2 it is found that the appropriate prediction interval factor is $k = 5,251$. The upper limit to a one-sided prediction interval at 95 % confidence is therefore

$$\bar{x} + ks = 562,3 + 5,251 \times 8,65 = 607,7 \text{ MPa}$$

Hence one may be 95 % confident that none of the batch of 5 000 rounds will produce a barrel pressure in excess of 607,7 MPa.

This example is also used to illustrate the use of Form A.

5.2 Symmetric two-sided intervals

A symmetric two-sided prediction interval for a normally distributed population with unknown population standard deviation is of the form $(\bar{x} - ks, \bar{x} + ks)$. The prediction interval factor k depends on n , on the further sample size m and on the confidence level C ; values of k are presented in Annex B.

EXAMPLE The time to detonation of a particular type of hand grenade after the pin has been removed is known to have an approximate normal distribution. A random sample of size 30 is drawn and tested, and the times to detonation are recorded. The sample mean time is 5,140 s and the sample standard deviation is 0,241 s. A symmetric two-sided prediction interval is required for all of the next lot of 10 000 grenades at 99 % confidence.

Table B.4 provides prediction interval factors at the 99 % confidence level. Entering Table B.4 with $n = 30$ and $m = 10\,000$ yields the value $k = 6,059$. The symmetric prediction interval is

$$(\bar{x} - ks, \bar{x} + ks) = (5,140 - 6,059 \times 0,241, 5,140 + 6,059 \times 0,241) = (3,68, 6,60)$$

One may therefore be 99 % confident that none of the next lot of 10 000 grenades will have a time to detonation outside the range 3,68 s to 6,60 s.

5.3 Prognosebereiche für nicht normalverteilte, aber in eine Normalverteilung transformierbare Grundgesamtheiten

Bei nicht normalverteilten Grundgesamtheiten, die in eine Normalverteilung transformiert werden können, wird zunächst das Verfahren für normalverteilte Grundgesamtheiten auf die transformierten Werte angewendet. Der Prognosebereich ergibt sich dann durch Anwendung der umgekehrten Transformation auf die sich aus den transformierten Werten ergebenden Prognosegrenzen.

BEISPIEL Angenommen, bei dem unter 5.2 beschriebenen Beispiel ist bekannt, dass die Zeit bis zur Detonation in guter Näherung lognormalverteilt ist, das heißt die Logarithmen der Zeiten sind in guter Näherung normalverteilt. Folglich werden die gemessenen Zeiten $x_1, x_2, \dots, x_n$ aus der Stichprobe in eine Normalverteilung transformiert, indem ihre natürlichen Logarithmen $y_i = \ln x_i$ ($i = 1, 2, \dots, 30$) gebildet werden. Angenommen, der Stichprobenmittelwert der transformierten Werte ist $\bar{y} = 1,60$ und die Stichprobenstandardabweichung $s_y = 0,05$. Der Prognosebereichsfaktor zum Vertrauensniveau von 99 %, mit dem angenommen wird, dass auch die nächsten 10 000 Detonationszeiten nicht außerhalb des zweiseitigen Prognosebereichs liegen werden, ist natürlich unverändert $k = 6,059$. Der symmetrische Prognosebereich für die transformierten Werte ist

$$(\bar{y} - ks, \bar{y} + ks) = (1,60 - 6,059 \times 0,05, 1,60 + 6,059 \times 0,05) = (1,297, 1,903)$$

Die Einheit der y -Werte ist log-Sekunden. Die umgekehrte Transformation, die die Einheit in Sekunden zurücktransformiert, ist die Anwendung der Exponentialfunktion auf die Werte. Der Prognosebereich für die Detonationszeit für alle folgenden zehntausend Granaten mit einem Vertrauensniveau von 99 % ist also

$$(e^{1,297}, e^{1,903}) = (3,66, 6,71) \text{ s}$$

ANMERKUNG 1 Es ergibt sich dasselbe Ergebnis, wenn der Logarithmus zu einer anderen Basis verwendet wird, vorausgesetzt, für die Rücktransformation wird die Potenzierung mit derselben Basis vorgenommen.

ANMERKUNG 2 Wenn ein zweiseitiger Prognosebereich nach 5.2 oder 6.2 ermittelt wird, sind seine Grenzen bei normalverteilten Grundgesamtheiten symmetrisch zum geschätzten Median der Grundgesamtheit. Diese Symmetrie ist für nicht normalverteilte Grundgesamtheiten, die nach 5.3 oder 6.3 in eine Normalverteilung transformiert werden, nicht mehr gegeben.

5.4 Ermittlung des erforderlichen Ausgangsstichprobenumfangs n für einen vorgegebenen Höchstwert des Prognosebereichsfaktors k

Manchmal sind Vertrauensniveau, Umfang der weiteren Stichprobe m und ungefähr gewünschter Wert des Prognosebereichsfaktors vorgegeben, und es ist gefordert, den dafür erforderlichen Umfang der Ausgangsstichprobe n zu ermitteln. Dazu wird in der zum vorgegebenen Vertrauensniveau und zum Typ des Prognosebereichs passenden Tabelle (das heißt eine der Tabellen im Anhang A für einseitig begrenzte Bereiche und eine der Tabellen im Anhang B für zweiseitig begrenzte Bereiche) die Spalte mit dem vorgegebenen Wert von m gesucht. Dann wird in dieser Spalte die Zeile mit dem Wert von k gesucht, der gerade noch kleiner als der vorgegebene Höchstwert ist. Der zugehörige Wert von n in der ersten Spalte ist der erforderliche Umfang der Ausgangsstichprobe.

ANMERKUNG Wenn der oberste Wert in dieser Spalte bereits den vorgegebenen Höchstwert für k überschreitet, so sind die Anforderungen auch mit einer beliebig großen Ausgangsstichprobe nicht erfüllbar. In diesem Fall sollte die Wahl eines niedrigeren Vertrauensniveaus erwogen werden.

BEISPIEL Betrachtet sei der Fall einer Annahmestichprobenprüfung, bei der — vor Anwendung dieses Teils von ISO 16269 — üblicherweise Lose vom Umfang 5 000 Stück angenommen wurden, wenn die Bedingung $\bar{x} + 4,75s \leq 0,1$ erfüllt war, wobei x die normalverteilte Porosität eines gesinterten Teils ist und $\bar{x}$ und s Stichprobenmittelwert und Stichprobenstandardabweichung einer Zufallsstichprobe vom Umfang 30 aus einer normalverteilten Grundgesamtheit sind. Angenommen, es wurde beschlossen, dass dieses Annahmekriterium durch das neue Annahmekriterium ersetzt werden soll, welches besagt, dass mit einem Vertrauensniveau von 95 % keines der Teile im Los einen Wert $x > 0,1$ aufweist. Der Hersteller stimmt dem neuen Annahmekriterium zu, vorausgesetzt, der Prognosebereichsfaktor ist nicht größer als 4,75 (wie bisher) und die Anforderung an den Stichprobenumfang ist nicht zu hoch.

5.3 Prediction intervals for non-normally distributed populations that can be transformed to normality

For non-normally distributed populations that can be transformed to normality, first the procedures for normally distributed populations are applied to the transformed data; the prediction interval is then found by applying the inverse transformation to the resulting prediction limits.

EXAMPLE Suppose that for the data of the example in 5.2 it is known instead that times to detonation are approximately log-normally distributed, i.e. the logarithm of the time to detonation is approximately normally distributed. The sample times $x_1, x_2, \dots, x_n$ are accordingly transformed to normality by taking their natural logarithms, namely $y_i = \ln x_i$ for $i = 1, 2, \dots, 30$. Suppose that the sample mean of the transformed data is $\bar{y} = 1,60$ and the sample standard deviation is $s_y = 0,05$. The prediction interval factor for 99 % confidence that none of the next 10 000 times falls outside a two-sided interval is, of course, unchanged at $k = 6,059$. The symmetric prediction interval for the transformed data is

$$(\bar{y} - ks, \bar{y} + ks) = (1,60 - 6,059 \times 0,05, 1,60 + 6,059 \times 0,05) = (1,297, 1,903)$$

The units of measurement of y are log-seconds. The inverse transformation to convert the units back to seconds is exponentiation. The prediction interval at 99 % confidence for the time to detonation of all of the next ten thousand grenades is therefore

$$(e^{1,297}, e^{1,903}) = (3,66, 6,71) \text{ s}$$

NOTE 1 The same result would have been obtained using logarithms to any other base, provided that the antilogarithm to the same base is used when converting back to the original units.

NOTE 2 When a two-sided prediction interval is determined in accordance with 5.2 or 6.2, its limits for normally distributed populations are symmetric about (i.e. equidistant from) the estimated median of the population. This symmetry is lost for non-normally distributed populations that are transformed to normality in accordance with 5.3 or 6.3.

5.4 Determination of a suitable initial sample size, n , for a given maximum value of the prediction interval factor, k

Sometimes the confidence level, future sample size m and approximate desired value of the prediction interval factor are given and it is required to determine the initial sample size n . Locate the table for the given confidence level and the sidedness of the prediction interval (i.e. one of the tables in Annex A for a one-sided interval or one of the tables in Annex B for two-sided intervals) and find the column for the given value of m . Look down this column until the first value of k no greater than the given maximum is found. The value of n in the leftmost column of this row of the table gives the required initial sample size.

NOTE If the entry at the bottom of this column exceeds the maximum acceptable value of k then there is no initial sample size large enough to satisfy the requirement. A reduction in the confidence level should be considered.

EXAMPLE Consider a situation in acceptance sampling in which, prior to the use of this part of ISO 16269, it has been the practice to accept lots of size 5 000 whenever $\bar{x} + 4,75s \leq 0,1$, where x is the normally distributed porosity of a sintered component and $\bar{x}$ and s are the sample mean and sample standard deviation based on a random sample of size 30 from a normally distributed population. Suppose that it has been decided to replace this acceptance criterion with one that will provide 95 % confidence that none of the items in the lot has $x > 0,1$. The producer says that he will be satisfied with the acceptance criterion provided the prediction interval factor is no larger than the 4,75 that he is used to, subject to the sample size requirement not being excessive.

In der Spalte für $m = 5\,000$ auf der dritten Seite der Tabelle A.2 ist $k = 4,771$ für einen Stichprobenumfang von 40 und einen Wert kleiner als 4,75 zu finden, nämlich $k = 4,717$ für einen Stichprobenumfang von 45. Der Hersteller erklärt sich bereit, mit einem Wert von $k = 4,717$ für künftige Lose den Stichprobenumfang auf 45 zu erhöhen.

5.5 Ermittlung des Vertrauensniveaus zu einem vorgegebenen Prognosebereich

Statt den Prognosebereich zu einem vorgegebenen Vertrauensniveau zu ermitteln, kann es manchmal auch erforderlich sein, aus einer Ausgangsstichprobe das einem bestimmten Prognosebereich entsprechende Vertrauensniveau zu ermitteln. Es kann sich dabei um einen einseitigen Prognosebereich $(\bar{x} - ks, b)$ oder $(a, \bar{x} + ks)$ oder einen zum Stichprobenmittelwert symmetrischen Prognosebereich $(\bar{x} - ks, \bar{x} + ks)$ handeln.

Zuerst wird der Wert für k zu dem gewünschten Prognosebereich berechnet. Das Vertrauensniveau zu diesem Prognosebereich ist dann durch Interpolation zwischen Tabellenwerten wie unter G.1.4 beschrieben zu finden.

6 Prognosebereiche für die in einer weiteren Stichprobe zu erwartenden Werte aus einer normalverteilten Grundgesamtheit mit bekannter Standardabweichung

6.1 Einseitige Bereiche

Ein einseitiger Prognosebereich für eine normalverteilte Grundgesamtheit mit bekannter Standardabweichung hat die Form $(\bar{x} - k\sigma, b)$ oder $(a, \bar{x} + k\sigma)$. Der Prognosebereichsfaktor k hängt von n , dem Umfang der weiteren Stichprobe m und dem Vertrauensniveau C ab; Werte für k finden sich in Anhang C.

BEISPIEL Von den in einem bestimmten Prozess hergestellten gesinterten Tonröhren mit einem Durchmesser von 150 mm ist bekannt, dass ihre Längen normalverteilt sind mit einer Standardabweichung von 4,49 mm. Aus einer Stichprobe von 50 Röhren wird ein Mittelwert von 1 760,60 mm ermittelt. Welche Länge werden alle nächsten 1 000 Röhren mit einem Vertrauensniveau von 99 % mindestens haben?

In Tabelle C.4 ist für $n = 50$ und $m = 1\,000$ der entsprechende Prognosebereichsfaktor $k = 4,306$ zu finden. Die untere Prognosegrenze für alle nächsten 1 000 Längen ist also:

$$\bar{x} - k\sigma = 1\,760,60 - 4,306 \times 4,49 = 1\,741$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % wird also keine der nächsten 1 000 Röhren eine Länge kleiner als 1 741 mm haben.

Diese Art von Information kann hilfreich sein, wenn ein Hersteller eine Garantie für seine Produktion abgeben will. In diesem Beispiel ist der Hersteller auf der sicheren Seite, wenn er eine Mindestlänge von 1 740 mm garantiert.

6.2 Symmetrische zweiseitige Bereiche

Ein symmetrischer zweiseitiger Prognosebereich für eine normalverteilte Grundgesamtheit mit bekannter Standardabweichung hat die Form $(\bar{x} - k\sigma, \bar{x} + k\sigma)$. Der Prognosebereichsfaktor k hängt von n , dem Umfang der weiteren Stichprobe m und dem Vertrauensniveau C ab. Werte für k finden sich in Anhang D.

BEISPIEL Angenommen, es ist auf der Basis der Daten des Beispiels in 6.1 gefordert, den zweiseitigen Prognosebereich für alle nächsten 10 000 Röhrenlängen mit einem Vertrauensniveau von 95 % zu berechnen. Die entsprechende Tabelle für ein Vertrauensniveau von 95 % ist Tabelle D.2. Für $n = 50$ und $m = 10\,000$ ist in Tabelle D.2 ein zweiseitiger Prognosebereichsfaktor von 4,605 zu finden. Der Prognosebereich ist

$$(\bar{x} - k\sigma, \bar{x} + k\sigma) = (1\,760,60 - 4,605 \times 4,49, 1\,760,60 + 4,605 \times 4,49) = (1\,739,9, 1\,781,3)$$

Look down the column for m equal to 5 000 on the third page of Table A.2. It is found that $k = 4,771$ for sample size 40, but falls below 4,75 to $k = 4,717$ for a sample of size 45. The producer agrees to increase the sample size to 45 with $k = 4,717$ for future lots.

5.5 Determination of the confidence level corresponding to a given prediction interval

Rather than determining the prediction interval corresponding to a given confidence level, it may sometimes be required to determine, from the initial sample, the confidence level corresponding to a specified interval. This may be a one-sided interval $(\bar{x} - ks, b)$ or $(a, \bar{x} + ks)$, or a two-sided interval $(\bar{x} - ks, \bar{x} + ks)$ that is symmetrical about the sample mean.

First calculate the value of k corresponding to the desired prediction interval. The confidence level for this interval can then be found by interpolation between tabulated values, as specified in G.1.4.

6 Prediction intervals for all observations in a further sample from a normally distributed population with known population standard deviation

6.1 One-sided intervals

A one-sided prediction interval for a normally distributed population with known population standard deviation σ is of the form $(\bar{x} - k\sigma, b)$ or $(a, \bar{x} + k\sigma)$. The prediction interval factor k depends on n , on the further sample size m and on the confidence level C ; values of k are presented in Annex C.

EXAMPLE 150 mm diameter vitrified clay pipes produced by a given process are known to have lengths that are normally distributed with a standard deviation of 4,49 mm. A sample of 50 pipes is found to have a mean of 1 760,60 mm. What length can one be 99 % confident that all of the next 1 000 pipes will exceed ?

Entering Table C.4 with $n = 50$ and $m = 1\,000$, the appropriate prediction interval factor is found to be $k = 4,306$. The lower prediction limit for all of the next 1 000 lengths is therefore

$$\bar{x} - k\sigma = 1\,760,60 - 4,306 \times 4,49 = 1\,741$$

Hence one may be 99 % confident that none of the lengths of the next 1 000 pipes will be less than 1 741 mm.

This kind of information could be useful if the manufacturer were thinking of providing a warranty for his production. For example, here the manufacturer would be on fairly safe ground in guaranteeing a length of at least 1 740 mm.

6.2 Symmetric two-sided intervals

A symmetric two-sided prediction interval for a normally distributed population with known population standard deviation σ is of the form $(\bar{x} - k\sigma, \bar{x} + k\sigma)$. The prediction interval factor k depends on n , on the further sample size m and on the confidence level C ; values of k are presented in Annex D.

EXAMPLE Suppose that for the data of the example in 6.1 it is required to calculate a two-sided prediction interval for all of the next 10 000 pipe lengths at 95 % confidence. The appropriate table for a confidence level of 95 % is Table D.2. Entering Table D.2 with $n = 50$ and $m = 10\,000$, it is found that the two-sided prediction interval factor is 4,605. The prediction interval is

$$(\bar{x} - k\sigma, \bar{x} + k\sigma) = (1\,760,60 - 4,605 \times 4,49, 1\,760,60 + 4,605 \times 4,49) = (1\,739,9, 1\,781,3)$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 95 % werden also alle weiteren 10 000 Röhren eine Länge zwischen 1 739,9 mm und 1 781,3 mm haben.

6.3 Prognosebereiche für nicht normalverteilte, aber in eine Normalverteilung transformierbare Grundgesamtheiten

Für nicht normalverteilte Grundgesamtheiten, die in eine Normalverteilung transformiert werden können, ist das Verfahren zur Ermittlung eines Prognosebereichs bei bekannter Standardabweichung ähnlich dem in 5.3 beschriebenen für unbekannte Standardabweichung der Grundgesamtheit. Zunächst werden die Verfahren für normalverteilte Grundgesamtheiten mit den transformierten Daten durchgeführt, anschließend wird der Prognosebereich ermittelt, indem die Umkehrtransformation auf die berechneten Prognosegrenzen angewendet wird.

BEISPIEL Es ist bekannt, dass die — durch Materialermüdung bedingte — Lebensdauer eines Bauelements für ein Flugzeug ungefähr lognormalverteilt ist, das heißt es kann angenommen werden, dass der Logarithmus der Lebensdauer normalverteilt ist. Es ist auch aus früheren Untersuchungen bekannt, dass der Zehnerlogarithmus $\log_{10}(\text{Lebensdauer})$ ungefähr 0,11 ist. Sechs Bauelemente werden einem Belastungstest unterzogen, und es ergeben sich die folgenden Werte für die Anzahl von Belastungen bis zum Ausfall:

- 229 200;
- 277 900;
- 332 400;
- 369 700;
- 380 800;
- 406 300.

Zwei weitere — gleich spezifizierte — Bauelemente sollen hergestellt werden. Nach wie vielen Belastungen wird mit einem Vertrauensniveau von 99,9 % noch keines der beiden Bauelemente ausgefallen sein?

Indem der Zehnerlogarithmus der Werte berechnet und dann der Mittelwert daraus gebildet wird, ergibt sich als Mittelwert für $x = \log_{10}(\text{Lebensdauer})$ $\bar{x} = 5,513\,86$. In Tabelle C.6 ist für $n = 6$ und $m = 2$ der entsprechende einseitige Prognosebereichsfaktor $k = 3,554$ zu finden. Die untere Prognosegrenze für die beiden nächsten Bauteile ist also

$$\bar{x} - k\sigma = 5,513\,86 - 3,554 \times 0,11 = 5,122\,92$$

und durch Potenzierung ergibt sich $10^{5,122\,92} = 132\,715$.

Wird berücksichtigt, dass die Standardabweichung des Zehnerlogarithmus der Lebensdauer nur mit zwei signifikanten Dezimalstellen angegeben ist, kann davon ausgegangen werden, dass die weiteren beiden Bauelemente mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,9 % mindestens 130 000 Belastungen überleben werden.

6.4 Ermittlung des erforderlichen Ausgangsstichprobenumfangs n für einen vorgegebenen Höchstwert des Prognosebereichsfaktors k

Das Verfahren ist identisch zu dem in 5.4 beschriebenen, außer dass Anhang C oder D statt Anhang A oder B verwendet werden.

6.5 Ermittlung des Vertrauensniveaus zu einem vorgegebenen Prognosebereich

Das einem einseitigen Prognosebereich $(\bar{x} - k\sigma, b)$ oder $(a, \bar{x} + k\sigma)$ oder einem zum Stichprobenmittelwert symmetrischen zweiseitigen Prognosebereich $(\bar{x} - k\sigma, \bar{x} + k\sigma)$ entsprechende Vertrauensniveau kann mit Hilfe des Anhangs C oder D berechnet werden.

One may therefore be 95 % confident that all of the further 10 000 pipes have lengths that lie between 1 739,9 mm and 1 781,3 mm.

6.3 Prediction intervals for non-normally distributed populations that can be transformed to normality

For non-normally distributed populations that can be transformed to normality, the procedures for determining a prediction interval for known population standard deviation are similar to those for unknown population standard deviation, described in 5.3. First the procedures for normally distributed populations are applied to the transformed data; then the prediction interval is found by applying the inverse transformation to the resulting prediction limits.

EXAMPLE The fatigue life of a structural component for an aircraft is known to have an approximately lognormal distribution, i.e. the logarithm of the failure time can be assumed to be normally distributed. The standard deviation of $\log_{10}(\text{life})$ is also known from previous experience to be approximately equal to 0,11. Six samples of the component are subjected to fatigue testing and the number of loading cycles to failure recorded as follows:

- 229 200;
- 277 900;
- 332 400;
- 369 700;
- 380 800;
- 406 300.

Two further components are to be manufactured to the same specification. How many loading cycles can be applied whilst having 99,9 % confidence that none of these two components will fail?

Taking logarithms to base 10 and then averaging, the mean of $x = \log_{10}(\text{life})$ is found to be $\bar{x} = 5,513\ 86$. Entering Table C.6 with $n = 6$ and $m = 2$, the appropriate one-sided prediction interval factor is found to be $k = 3,554$. The lower prediction limit for all of the next two components is therefore

$$\bar{x} - k\sigma = 5,513\ 86 - 3,554 \times 0,11 = 5,122\ 92$$

and, taking antilogarithms, $10^{5,122\ 92} = 132\ 715$.

Hence, taking into account that the standard deviation of $\log_{10}(\text{life})$ is only known to two significant figures, one may be 99,9 % confident that the further two components will survive for at least 130 000 loading cycles.

6.4 Determination of a suitable initial sample size, n , for a given value of k

The procedure is the same as described in 5.4 except that Annex C or D is used instead of Annex A or B.

6.5 Determination of the confidence level corresponding to a given prediction interval

The confidence level corresponding to a one-sided interval $(\bar{x} - k\sigma, b)$ or $(a, \bar{x} + k\sigma)$, or a two-sided interval $(\bar{x} - k\sigma, \bar{x} + k\sigma)$ that is symmetrical about the sample mean, may be calculated from Annexes C and D.

Zuerst wird der Wert für k zu dem gewünschten Prognosebereich berechnet. Das Vertrauensniveau zu diesem Prognosebereich ist dann durch Interpolation zwischen Tabellenwerten wie unter G.1.4 beschrieben zu finden.

7 Prognosebereiche für den Mittelwert einer weiteren Stichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit

Der Prognosebereichsfaktor für den Mittelwert einer weiteren Stichprobe vom Umfang m ergibt sich aus derselben normalverteilten Grundgesamtheit unter Zuhilfenahme derselben Tabellen in zwei Schritten. Zunächst wird der Prognosebereichsfaktor für einen einzelnen weiteren Beobachtungswert ermittelt. Dann wird dieser Prognosebereichsfaktor mit $\sqrt{(n+m)/[m(n+1)]}$ multipliziert. Dieses Verfahren ist für ein- und zweiseitige Prognosebereiche und sowohl bei bekannter als auch unbekannter Standardabweichung der Grundgesamtheit anwendbar.

BEISPIEL Angenommen, es ist auf der Basis der Daten des Beispiels in 6.1 gefordert, eine untere Prognosegrenze für den Mittelwert der nächsten 1 000 Röhrenlängen mit einem Vertrauensniveau von 99 % anzugeben. Aus Tabelle C.4 ist zu entnehmen, dass der Prognosebereichsfaktor für eine Ausgangsstichprobe vom Umfang 50 und einen einzelnen weiteren Beobachtungswert 2,350 beträgt. Der gesuchte Prognosebereichsfaktor ist also

$$k = 2,350 \times \sqrt{(n+m)/[m(n+1)]} = 2,350 \times \sqrt{1050/51000} = 0,3372$$

Daraus folgt, dass die untere Prognosegrenze für die mittlere Länge der nächsten 1 000 Röhren

$$\bar{x} - k\sigma = 1\,760,60 - 0,3372 \times 4,49 = 1\,759 \text{ mm ist.}$$

Anhand dieses Beispiels wird auch die Anwendung von Formblatt B erläutert.

8 Verteilungsfreie Prognosebereiche

8.1 Allgemeines

Ist die Zufallsgröße kontinuierlich, aber ihre Verteilungsform in der Grundgesamtheit unbekannt, sollten verteilungsfreie Verfahren zur Bestimmung des Prognosebereichs verwendet werden. Diese Verfahren bauen auf den Ranggrößen $x_{[1]}, x_{[2]}, \dots, x_{[n]}$ auf. Im Allgemeinen haben einseitige verteilungsfreie Prognosebereiche die Form $(x_{[i]}, b)$ oder $(a, x_{[i]})$ mit $1 \leq i \leq n$, zweiseitige verteilungsfreie Prognosebereiche die Form $(x_{[i]}, x_{[j]})$ mit $1 \leq i \leq j \leq n$. Dieser Teil von ISO 16269 enthält Bestimmungungsverfahren für einseitige Prognosebereiche der Form $(x_{[1]}, b)$ oder $(a, x_{[n]})$ und zweiseitige Prognosebereiche der Form $(x_{[1]}, x_{[n]})$.

Die Aufgabenstellung bei solchen Prognosebereichen ist es festzulegen, welchen Umfang die Ausgangsstichprobe haben muss, um mit dem vorgegebenen Vertrauensniveau vorhersagen zu können, dass der Prognosebereich mindestens $m - r$ der nächsten m Werte enthält. Dazu dienen die Anhänge E und F.

8.2 Einseitige Bereiche

Tabellen E.1 bis E.6 enthalten — für eine Reihe von Werten für C , m und r — Ausgangsstichprobenumfänge n , für die mit dem Vertrauensniveau C vorhergesagt werden kann, dass der einseitige verteilungsfreie Prognosebereich $(x_{[1]}, b)$ oder $(a, x_{[n]})$ mindestens $m - r$ der Werte einer weiteren Stichprobe vom Umfang m aus derselben Grundgesamtheit enthalten wird.

BEISPIEL Gefordert ist eine verteilungsfreie untere Prognosegrenze für die Biegefestigkeit gesinterter Tonröhren, so dass mit einem Vertrauensniveau von 90 % vorhergesagt werden kann, dass höchstens 10 Röhren aus jedem weiteren Los von 200 Röhren eine geringere Biegefestigkeit haben. Welchen Umfang muss die Ausgangsstichprobe haben?

First calculate the value of k corresponding to the desired prediction interval. The confidence level for this interval can then be found by interpolation between tabulated values, as described in G.1.4.

7 Prediction intervals for the mean of a further sample from a normally distributed population

A simple two-stage process may be used to obtain the prediction interval factor for the mean of a further sample of m observations from the same normally distributed population, using the same tables. First find the prediction interval factor corresponding to a single future observation. Then multiply this prediction interval factor by $\sqrt{(n+m)/[m(n+1)]}$. This procedure applies to one-sided and two-sided intervals and to the cases of both known and unknown population standard deviation.

EXAMPLE Suppose that for the data of the example in 6.1 it is required to provide a lower prediction limit at 99 % confidence on the mean of the lengths of the next 1 000 pipes. From Table C.4 it is found that the prediction interval factor for an initial sample size of 50 and a single future observation is 2,350. The required prediction interval factor is therefore

$$k = 2,350 \times \sqrt{(n+m)/[m(n+1)]} = 2,350 \times \sqrt{1050/51000} = 0,337\ 2$$

It follows that the lower prediction limit for the mean length of the next 1 000 pipes is

$$\bar{x} - k\sigma = 1\ 760,60 - 0,337\ 2 \times 4,49 = 1\ 759\ \text{mm}$$

This example is used to illustrate the use of Form B.

8 Distribution-free prediction intervals

8.1 General

When the variable is continuous but the distributional form of the population is unknown, distribution-free methods should be used to produce prediction intervals. These are based on the order statistics $x_{[1]}, x_{[2]}, \dots, x_{[n]}$. In general, one-sided distribution-free prediction intervals are of the form $(x_{[i]}, b)$ or $(a, x_{[i]})$ where $1 \leq i \leq n$, while two-sided distribution-free prediction intervals are of the form $(x_{[i]}, x_{[j]})$ where $1 \leq i \leq j \leq n$. This part of ISO 16269 provides procedures for one-sided intervals of the form $(x_{[1]}, b)$ or $(a, x_{[n]})$ and two-sided intervals of the form $(x_{[1]}, x_{[n]})$.

The problem with such intervals is in determining how large the initial sample size needs to be in order that one may have the required confidence that the prediction interval will contain at least $m - r$ values from the next m . Annexes E and F are provided for this purpose.

8.2 One-sided intervals

Tables E.1 to E.6 provide initial sample sizes n from which one may have confidence C that the one-sided distribution-free prediction interval $(x_{[1]}, b)$ [or alternatively $(a, x_{[n]})$] will include at least $m - r$ of a further sample of m values from the same population, for a range of values of C , m and r .

EXAMPLE A distribution-free lower prediction limit is required for the strength in bending of vitrified clay pipes, such that one may be 90 % confident that no more than 10 pipes in each further batch of 200 will have a lower strength. What initial sample size is required?

Tabelle E.1 enthält die Ausgangsstichprobenumfänge zum Vertrauensniveau 90 %. Für $m = 200$ und $r = 10$ ist der entsprechende Stichprobenumfang $n = 46$ zu finden. Eine Zufallsstichprobe von 46 Röhren wird entnommen, und die Biegefestigkeit wird gemessen. Als geringste Biegefestigkeit ist 6,4 kNm zu finden. Daher kann mit einem Vertrauensniveau von 90 % vorhergesagt werden, dass nicht mehr als 10 — unter gleichen Bedingungen wie bei der Ausgangsstichprobe gefertigte — Röhren aus einem Los von 200 eine Biegefestigkeit kleiner als 6,4 kNm haben.

8.3 Zweiseitige Bereiche

Die Tabellen F.1 bis F.6 enthalten — für eine Reihe von Werten für C , m und r — Ausgangsstichprobenumfänge n , für die mit dem Vertrauensniveau C vorhergesagt werden kann, dass der zweiseitige verteilungsfreie Prognosebereich $(x_{[1]}, x_{[n]})$ mindestens $m - r$ der Werte einer weiteren Stichprobe vom Umfang m aus derselben Grundgesamtheit enthalten wird.

BEISPIEL Ein Lieferant von Auto-Batterien liefert in Lieferumfängen von jeweils 100 Stück und möchte seinen Einzelhandelskunden für jede Lieferung einen Bereich der Batteriespannung x garantieren. Da er unsicher ist, welcher Verteilung die Batteriespannung unterliegt, entscheidet er sich für ein verteilungsfreies Verfahren. Welchen Umfang muss die Ausgangsstichprobe haben, wenn er mit einem Vertrauensniveau von 90 % vorhersagen will, dass höchstens eine Batterie in jeder Lieferung eine Spannung außerhalb des in der Stichprobe gefundenen Spannungsbereichs haben wird?

Tabelle F.1 enthält die Ausgangsstichprobenumfänge zum Vertrauensniveau 90 %. Für $m = 100$ und $r = 1$ ist ein Ausgangsstichprobenumfang von $n = 410$ zu finden. Der Lieferant prüft 410 Batterien und findet als niedrigsten Spannungswert $x_{[1]} = 11,81$ V und als höchsten Spannungswert $x_{[410]} = 12,33$ V. Er garantiert daher, dass höchstens eine Batterie pro Lieferung eine Spannung außerhalb des Bereichs 11,81 V bis 12,33 V aufweisen wird.

Anhand dieses Beispiels wird auch die Anwendung von Formblatt C erläutert. Bemerkenswert ist, dass die Prognosegrenzen auf der Grundlage einer Stichprobe von 1 850 Batterien — also mehr als viermal so viel — ermittelt werden müssen, wenn der Lieferant mit einem Vertrauensniveau von 90 % garantieren will, dass keine von 100 Batterien einen Spannungswert außerhalb der Prognosegrenzen hat.

Table E.1 provides the initial sample sizes for a confidence level of 90 %. Entering this table with $m = 200$ and $r = 10$ it is found that the appropriate sample size is $n = 46$. A random sample of 46 pipes is drawn and tested for strength in bending. The lowest strength is found to be 6,4 kN·m. Thus one may be 90 % confident that, for pipes manufactured under identical conditions to the initial sample, no more than 10 pipes in each batch of 200 will have strength in bending below 6,4 kN·m.

8.3 Two-sided intervals

Tables F.1 to F.6 provide initial sample sizes n from which one may have confidence C that the two-sided distribution-free prediction interval $(x_{[1]}, x_{[n]})$ will include at least $m - r$ of a further sample of m values from the same population, for a range of values of C , m and r .

EXAMPLE A supplier supplies car batteries in batches of 100, and wishes to provide some kind of guarantee to his retail customers on the range of values of the voltage, x , in each batch. As he is uncertain about the voltage distribution, he decides to use a distribution-free approach. What initial sample size would he need in order to be 90 % confident that no more than one battery in each batch has a voltage outside the range of voltages in his sample?

Table F.1 provides the initial sample sizes for a confidence level of 90 %. Entering this table with $m = 100$ and $r = 1$ yields an initial sample size of $n = 410$. The supplier tests 410 batteries and finds the lowest voltage to be $x_{[1]} = 11,81$ V and the highest to be $x_{[410]} = 12,33$ V. He therefore provides a guarantee that no more than one battery per batch has a voltage outside the range 11,81 V to 12,33 V.

This example is also used to illustrate the use of Form C. Note that if the supplier wished to have 90 % confidence that *no* batteries in batches of 100 have voltages outside the limits, then the limits would have to be based on a sample of 1 850 batteries, i.e. more than four times as many.

Formblatt A — Berechnung eines Prognosebereichs für alle Beobachtungswerte einer weiteren Stichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit

Leeres Formblatt	
Kennzeichnung der Daten	
Daten und Beobachtungsverfahren:	
Einheit:	
Bemerkungen:	
Notwendige Angaben	
Umfang der Ausgangsstichprobe:	$n =$
Umfang der weiteren Stichprobe:	$m =$
Vertrauensniveau (%)	$C =$
a) Einseitig begrenzter Bereich bei unbekanntem σ ☐ b) Zweiseitig begrenzter Bereich bei unbekanntem σ ☐ c) Einseitig begrenzter Bereich bei bekanntem σ ☐ d) Zweiseitig begrenzter Bereich bei bekanntem σ ☐	
Für c) oder d): Die Standardabweichung der Grundgesamtheit ist $\sigma =$	
Für a) oder c) mit einer oberen Prognosegrenze ist die untere Grenze für x in der Grundgesamtheit anzugeben: $T_1 = a =$	
Für a) oder c) mit einer unteren Prognosegrenze ist die obere Grenze für x in der Grundgesamtheit anzugeben: $T_2 = b =$	
Erforderliche Ausgangsberechnungen	
Stichprobenmittelwert:	$\bar{x} =$
Für a) und b),	
Stichprobenstandardabweichung:	$s =$
Ermittlung des Prognosebereichsfaktors	
a) Ablesen von $k = k_{n,m}$ in Anhang A: $k =$	
b) Ablesen von $k = k_{n,m}$ in Anhang B: $k =$	
c) Ablesen von $k = k_{n,m}$ in Anhang C: $k =$	
d) Ablesen von $k = k_{n,m}$ in Anhang D: $k =$	
Ermittlung der Prognosegrenzen	
Für a) mit einer unteren Prognosegrenze oder für b), $T_1 = \bar{x} - ks =$	
Für c) mit einer unteren Prognosegrenze oder für d), $T_1 = \bar{x} - k\sigma =$	
Für a) mit einer oberen Prognosegrenze oder für b), $T_2 = \bar{x} + ks =$	
Für c) mit einer oberen Prognosegrenze oder für d), $T_2 = \bar{x} + k\sigma =$	
Ergebnis	
Der Prognosebereich für alle weiteren $m =$	
Ergebnisse ist mit einem Vertrauensniveau von $C =$ %	
$(T_1, T_2) = (,)$.	

Ausgefülltes Formblatt	
Kennzeichnung der Daten	
Daten und Beobachtungsverfahren: Druck beim Abfeuern von 20 Artilleriegranaten mit einer bestimmten Spezifikation bei einer Temperatur von 55 °C. Gesucht ist die obere Grenze des einseitig begrenzten Prognosebereichs mit einem Vertrauensniveau von 95 % für alle weiteren 5 000 abgefeuerten Granaten.	
Einheit: Megapascal (MPa)	
Bemerkungen: Erwartungswert und Standardabweichung für den Druck in der Grundgesamtheit sind nicht bekannt.	
Notwendige Angaben	
Umfang der Ausgangsstichprobe:	$n = 20$
Umfang der weiteren Stichprobe:	$m = 5\,000$
Vertrauensniveau (%)	$C = 95\%$
a) Einseitig begrenzter Bereich bei unbekanntem σ ☒ b) Zweiseitig begrenzter Bereich bei unbekanntem σ ☐ c) Einseitig begrenzter Bereich bei bekanntem σ ☐ d) Zweiseitig begrenzter Bereich bei bekanntem σ ☐	
Für c) oder d): Die Standardabweichung der Grundgesamtheit ist $\sigma =$	
Für a) oder c) mit einer oberen Prognosegrenze ist die untere Grenze für x in der Grundgesamtheit anzugeben: $T_1 = a = 0$	
Für a) oder c) mit einer unteren Prognosegrenze ist die obere Grenze für x in der Grundgesamtheit anzugeben: $T_2 = b =$	
Erforderliche Ausgangsberechnungen	
Stichprobenmittelwert:	$\bar{x} = 562,3\text{ MPa}$
Für a) und b),	
Stichprobenstandardabweichung:	$s = 8,65\text{ MPa}$
Ermittlung des Prognosebereichsfaktors	
a) Ablesen von $k = k_{n,m}$ in Anhang A: $k = 5,251$	
b) Ablesen von $k = k_{n,m}$ in Anhang B: $k =$	
c) Ablesen von $k = k_{n,m}$ in Anhang C: $k =$	
d) Ablesen von $k = k_{n,m}$ in Anhang D: $k =$	
Ermittlung der Prognosegrenzen	
Für a) mit einer unteren Prognosegrenze oder für b), $T_1 = \bar{x} - ks =$	
Für c) mit einer unteren Prognosegrenze oder für d), $T_1 = \bar{x} - k\sigma =$	
Für a) mit einer oberen Prognosegrenze oder für b), $T_2 = \bar{x} + ks = 607,7\text{ MPa}$	
Für c) mit einer oberen Prognosegrenze oder für d), $T_2 = \bar{x} + k\sigma =$	
Ergebnis	
Der Prognosebereich für alle weiteren $m = 5\,000$	
Ergebnisse ist mit einem Vertrauensniveau von $C = 95\%$	
$(T_1, T_2) = (0, 607,7)$.	

Form A — Calculation of a prediction interval for all items in a further sample of observations from a normally distributed population

Blank form	
Data identification	
Data and observation procedure:	
Units:	
Remarks:	
Information required	
Initial sample size:	$n =$
Further sample size:	$m =$
Confidence level (%):	$C =$
a) One-sided interval for unknown σ	☐
b) Two-sided interval for unknown σ	☐
c) One-sided interval for known σ	☐
d) Two-sided interval for known σ	☐
For c) or d), the population standard deviation is $\sigma =$	
For a) or c) with an upper prediction limit, the lower limit to x in the population is required: $T_1 = a =$	
For a) or c) with a lower prediction limit, the upper limit to x in the population is required: $T_2 = b =$	
Initial calculations required	
Sample mean:	$\bar{x} =$
For a) and b),	
sample standard deviation:	$s =$
Determination of prediction interval factor	
a) Look up $k = k_{n,m}$ in Annex A: $k =$	
b) Look up $k = k_{n,m}$ in Annex B: $k =$	
c) Look up $k = k_{n,m}$ in Annex C: $k =$	
d) Look up $k = k_{n,m}$ in Annex D: $k =$	
Determination of the prediction limits	
For a) with a lower prediction limit, or for b), $T_1 = \bar{x} - ks =$	
For c) with a lower prediction limit, or for d), $T_1 = \bar{x} - k\sigma =$	
For a) with an upper prediction limit, or for b), $T_2 = \bar{x} + ks =$	
For c) with an upper prediction limit, or for d), $T_2 = \bar{x} + k\sigma =$	
Result	
The prediction interval for all of the next $m =$ observations at confidence level $C =$ % is $(T_1, T_2) = (,)$.	

Completed form	
Data identification	
Data and observation procedure: Barrel pressures resulting from 20 artillery rounds of a given specification fired at a temperature of 55 °C. Require the upper limit to a one-sided prediction interval at 95 % confidence for all of the next 5 000 rounds.	
Units: megapascals (MPa)	
Remarks: Population mean pressure and standard deviation of pressure unknown.	
Information required	
Initial sample size:	$n = 20$
Further sample size:	$m = 5\,000$
Confidence level (%):	$C = 95\%$
a) One-sided interval for unknown σ	☒
b) Two-sided interval for unknown σ	☐
c) One-sided interval for known σ	☐
d) Two-sided interval for known σ	☐
For c) or d), the population standard deviation is $\sigma =$	
For a) or c) with an upper prediction limit, the lower limit to x in the population is required: $T_1 = a = 0$	
For a) or c) with a lower prediction limit, the upper limit to x in the population is required: $T_2 = b =$	
Initial calculations required	
Sample mean:	$\bar{x} = 562,3 \text{ MPa}$
For a) and b),	
sample standard deviation:	$s = 8,65 \text{ MPa}$
Determination of prediction interval factor	
a) Look up $k = k_{n,m}$ in Annex A: $k = 5,251$	
b) Look up $k = k_{n,m}$ in Annex B: $k =$	
c) Look up $k = k_{n,m}$ in Annex C: $k =$	
d) Look up $k = k_{n,m}$ in Annex D: $k =$	
Determination of the prediction limits	
For a) with a lower prediction limit, or for b), $T_1 = \bar{x} - ks =$	
For c) with a lower prediction limit, or for d), $T_1 = \bar{x} - k\sigma =$	
For a) with an upper prediction limit, or for b), $T_2 = \bar{x} + ks = 607,7 \text{ MPa}$	
For c) with an upper prediction limit, or for d), $T_2 = \bar{x} + k\sigma =$	
Result	
The prediction interval for all of the next $m = 5\,000$ observations at confidence level $C = 95\%$ is $(T_1, T_2) = (0, 607,7)$.	

Formblatt B — Berechnung eines Prognosebereichs für den Mittelwert einer weiteren Stichprobe aus einer normalverteilten Grundgesamtheit

Leeres Formblatt	
Kennzeichnung der Daten	
Daten und Beobachtungsverfahren:	
Einheit:	
Bemerkungen:	
Notwendige Angaben	
Umfang der Ausgangsstichprobe:	$n =$
Umfang der weiteren Stichprobe:	$m =$
Vertrauensniveau (%)	$C =$
a) Einseitig begrenzter Bereich bei unbekanntem σ	☐
b) Zweiseitig begrenzter Bereich bei unbekanntem σ	☐
c) Einseitig begrenzter Bereich bei bekanntem σ	☐
d) Zweiseitig begrenzter Bereich bei bekanntem σ	☐
Für c) oder d): die Standardabweichung der Grundgesamtheit ist $\sigma =$	
Für a) oder c) mit einer oberen Prognosegrenze ist die untere Grenze für x in der Grundgesamtheit anzugeben: $T_1 = a =$	
Für a) oder c) mit einer unteren Prognosegrenze ist die obere Grenze für x in der Grundgesamtheit anzugeben: $T_2 = b =$	
Erforderliche Ausgangsberechnungen	
Stichprobenmittelwert:	$\bar{x} =$
Für a) und b),	
Stichprobenstandardabweichung:	$s =$
Ermittlung des Prognosebereichsfaktors	
a) Ablesen von $k_{n,1}$ in Anhang A: $k_{n,1} =$	
b) Ablesen von $k_{n,1}$ in Anhang B: $k_{n,1} =$	
c) Ablesen von $k_{n,1}$ in Anhang C: $k_{n,1} =$	
d) Ablesen von $k_{n,1}$ in Anhang D: $k_{n,1} =$	
Dann wird berechnet $k = k_{n,1} \times \sqrt{(n+m)/[m(n+1)]} =$	
Ermittlung der Prognosegrenzen	
Für a) mit einer unteren Prognosegrenze oder für b), $T_1 = \bar{x} - ks =$	
Für c) mit einer unteren Prognosegrenze oder für d), $T_1 = \bar{x} - k\sigma =$	
Für a) mit einer oberen Prognosegrenze oder für b), $T_2 = \bar{x} + ks =$	
Für c) mit einer oberen Prognosegrenze oder für d), $T_2 = \bar{x} + k\sigma =$	
Ergebnis	
Der Prognosebereich für den Mittelwert der nächsten $m =$	
Ergebnisse ist mit einem Vertrauensniveau von $C =$ %	
$(T_1, T_2) = (,)$.	

Ausgefülltes Formblatt	
Kennzeichnung der Daten	
Daten und Beobachtungsverfahren: Längen von fünfzig gesinterten Tonröhren vom Durchmesser 150 mm. Gesucht ist die untere Grenze des einseitig begrenzten Prognosebereichs für den Mittelwert der Länge der nächsten 1 000 Röhren mit einem Vertrauensniveau von 99 %.	
Einheit: mm	
Bemerkungen: Der Erwartungswert der Grundgesamtheit ist unbekannt, aber ihre Standardabweichung ist bekannt und beträgt 4,49 mm.	
Notwendige Angaben	
Umfang der Ausgangsstichprobe:	$n = 50$
Umfang der weiteren Stichprobe:	$m = 1\,000$
Vertrauensniveau (%)	$C = 99\%$
a) Einseitig begrenzter Bereich bei unbekanntem σ	☐
b) Zweiseitig begrenzter Bereich bei unbekanntem σ	☐
c) Einseitig begrenzter Bereich bei bekanntem σ	☒
d) Zweiseitig begrenzter Bereich bei bekanntem σ	☐
Für c) oder d): die Standardabweichung der Grundgesamtheit ist $\sigma = 4,49$ mm	
Für a) oder c) mit einer oberen Prognosegrenze ist die untere Grenze für x in der Grundgesamtheit anzugeben: $T_1 = a =$	
Für a) oder c) mit einer unteren Prognosegrenze ist die obere Grenze für x in der Grundgesamtheit anzugeben: $T_2 = b = 1\,800$ mm	
Erforderliche Ausgangsberechnungen	
Stichprobenmittelwert:	$\bar{x} = 1\,760,60$ mm
Für a) und b),	
Stichprobenstandardabweichung:	$s =$
Ermittlung des Prognosebereichsfaktors	
a) Ablesen von $k_{n,1}$ in Anhang A: $k_{n,1} =$	
b) Ablesen von $k_{n,1}$ in Anhang B: $k_{n,1} =$	
c) Ablesen von $k_{n,1}$ in Anhang C: $k_{n,1} = 2,350$	
d) Ablesen von $k_{n,1}$ in Anhang D: $k_{n,1} =$	
Dann wird berechnet $k = k_{n,1} \times \sqrt{(n+m)/[m(n+1)]} = 0,337\,2$	
Ermittlung der Prognosegrenzen	
Für a) mit einer unteren Prognosegrenze oder für b), $T_1 = \bar{x} - ks =$	
Für c) mit einer unteren Prognosegrenze oder für d), $T_1 = \bar{x} - k\sigma = 1\,759$	
Für a) mit einer oberen Prognosegrenze oder für b), $T_2 = \bar{x} + ks =$	
Für c) mit einer oberen Prognosegrenze oder für d), $T_2 = \bar{x} + k\sigma =$	
Ergebnis	
Der Prognosebereich für den Mittelwert der nächsten $m = 1\,000$	
Ergebnisse ist mit einem Vertrauensniveau von $C = 99\%$	
$(T_1, T_2) = (1\,759, 1\,800)$.	

Form B — Calculation of a prediction interval for the mean of a further sample of observations from a normally distributed population

Blank form	
Data identification	
Data and observation procedure:	
Units:	
Remarks:	
Information required	
Initial sample size:	$n =$
Further sample size:	$m =$
Confidence level (%):	$C =$
a) One-sided interval for unknown σ	☐
b) Two-sided interval for unknown σ	☐
c) One-sided interval for known σ	☐
d) Two-sided interval for known σ	☐
For c) or d), the population standard deviation is $\sigma =$	
For a) or c) with an upper prediction limit, the lower limit to x in the population is required: $T_1 = a =$	
For a) or c) with a lower prediction limit, the upper limit to x in the population is required: $T_2 = b =$	
Initial calculations required	
Sample mean:	$\bar{x} =$
For a) and b),	
sample standard deviation:	$s =$
Determination of prediction interval factor	
a) Look up $k_{n,1}$ in Annex A: $k_{n,1} =$	
b) Look up $k_{n,1}$ in Annex B: $k_{n,1} =$	
c) Look up $k_{n,1}$ in Annex C: $k_{n,1} =$	
d) Look up $k_{n,1}$ in Annex D: $k_{n,1} =$	
Then calculate $k = k_{n,1} \times \sqrt{(n+m)/[m(n+1)]} =$	
Determination of the prediction limits	
For a) with a lower prediction limit, or for b),	
$T_1 = \bar{x} - ks =$	
For c) with a lower prediction limit, or for d),	
$T_1 = \bar{x} - k\sigma =$	
For a) with an upper prediction limit, or for b),	
$T_2 = \bar{x} + ks =$	
For c) with an upper prediction limit, or for d),	
$T_2 = \bar{x} + k\sigma =$	
Result	
The prediction interval for the mean of the next $m =$ observations at confidence level $C =$ % is	
$(T_1, T_2) = (,)$.	

Completed form	
Data identification	
Data and observation procedure: Lengths of fifty 150 mm diameter vitrified clay pipes. Require the lower limit to a one-sided prediction interval at 99 % confidence for the mean length of all of the next 1 000 pipes.	
Units: millimetres	
Remarks: Population mean unknown but population standard deviation known to be 4,49 mm.	
Information required	
Initial sample size:	$n = 50$
Further sample size:	$m = 1\ 000$
Confidence level (%):	$C = 99\ %$
a) One-sided interval for unknown σ	☐
b) Two-sided interval for unknown σ	☐
c) One-sided interval for known σ	☒
d) Two-sided interval for known σ	☐
For c) or d), the population standard deviation is $\sigma = 4,49\ \text{mm}$	
For a) or c) with an upper prediction limit, the lower limit to x in the population is required: $T_1 = a =$	
For a) or c) with a lower prediction limit, the upper limit to x in the population is required: $T_2 = b = 1\ 800\ \text{mm}$	
Initial calculations required	
Sample mean:	$\bar{x} = 1\ 760,60\ \text{mm}$
For a) and b),	
sample standard deviation:	$s =$
Determination of prediction interval factor	
a) Look up $k_{n,1}$ in Annex A: $k_{n,1} =$	
b) Look up $k_{n,1}$ in Annex B: $k_{n,1} =$	
c) Look up $k_{n,1}$ in Annex C: $k_{n,1} = 2,350$	
d) Look up $k_{n,1}$ in Annex D: $k_{n,1} =$	
Then calculate $k = k_{n,1} \times \sqrt{(n+m)/[m(n+1)]} = 0,337\ 2$	
Determination of the prediction limits	
For a) with a lower prediction limit, or for b),	
$T_1 = \bar{x} - ks =$	
For c) with a lower prediction limit, or for d),	
$T_1 = \bar{x} - k\sigma = 1\ 759$	
For a) with an upper prediction limit, or for b),	
$T_2 = \bar{x} + ks =$	
For c) with an upper prediction limit, or for d),	
$T_2 = \bar{x} + k\sigma =$	
Result	
The prediction interval for the mean of the next $m = 1\ 000$ observations at confidence level $C = 99\ %$ is	
$(T_1, T_2) = (1\ 759, 1\ 800)$.	

Formblatt C — Berechnung eines verteilungsfreien Prognosebereichs für $(m - r)$ von m weiteren Beobachtungswerten aus derselben Grundgesamtheit

Leeres Formblatt	
Kennzeichnung der Daten	
Daten und Beobachtungsverfahren:	
Einheit:	
Bemerkungen:	
Notwendige Angaben	
Umfang der weiteren Stichprobe:	$m =$
Höchstwert für die Anzahl weiterer Beobachtungswerte, die außerhalb des Prognosebereichs liegen dürfen:	$r =$
Vertrauensniveau (%)	$C =$
a) Einseitig begrenzter Bereich	☐
b) Zweiseitig begrenzter Bereich	☐
Für a) mit einer oberen Prognosegrenze ist die untere Grenze für x in der Grundgesamtheit anzugeben: $T_1 = a =$	
Für a) mit einer unteren Prognosegrenze ist die obere Grenze für x in der Grundgesamtheit anzugeben: $T_2 = b =$	
Ermittlung des Umfangs der Ausgangsstichprobe	
Für a) ergibt sich aus Annex E mit den Werten C , m und r der Umfang der Ausgangsstichprobe: $n =$	
Für b) ergibt sich aus Annex F mit den Werten C , m und r der Umfang der Ausgangsstichprobe: $n =$	
Ermittlung der Prognosegrenzen	
Für a) mit einer unteren Prognosegrenze oder für b), $T_1 = x_{[1]} =$	
Für a) mit einer oberen Prognosegrenze oder für b), $T_2 = x_{[n]} =$	
Ergebnis	
Der verteilungsfreie Prognosebereich für alle außer höchstens $r =$ der nächsten $m =$ Beobachtungswerte ist mit einem Signifikanzniveau von $C =$ % $(T_1, T_2) = (,)$.	

Ausgefülltes Formblatt	
Kennzeichnung der Daten	
Daten und Beobachtungsverfahren: Auto-Batterien in Liefermengen von 100. Gesucht ist der Stichprobenumfang n , der ausreicht, um mit einem Vertrauensniveau von 90 % vorherzusagen zu können, dass mindestens 99 der gelieferten Batterien eine Spannung aufweisen, die in dem aus der Stichprobe ermittelten Prognosebereich liegt.	
Einheit: Volt	
Bemerkungen: Der Verteilungstyp für die Spannung ist unbekannt, so dass ein verteilungsfreier Prognosebereich gesucht wird.	
Notwendige Angaben	
Umfang der weiteren Stichprobe:	$m = 100$
Höchstwert für die Anzahl weiterer Beobachtungswerte, die außerhalb des Prognosebereichs liegen dürfen:	$r = 1$
Vertrauensniveau (%)	$C = 90 \%$
a) Einseitig begrenzter Bereich	☐
b) Zweiseitig begrenzter Bereich	☒
Für a) mit einer oberen Prognosegrenze ist die untere Grenze für x in der Grundgesamtheit anzugeben: $T_1 = a =$	
Für a) mit einer unteren Prognosegrenze ist die obere Grenze für x in der Grundgesamtheit anzugeben: $T_2 = b =$	
Ermittlung des Umfangs der Ausgangsstichprobe	
Für a) ergibt sich aus Annex E mit den Werten C , m und r der Umfang der Ausgangsstichprobe: $n =$	
Für b) ergibt sich aus Annex F mit den Werten C , m und r der Umfang der Ausgangsstichprobe: $n = 410$	
Ermittlung der Prognosegrenzen	
Für a) mit einer unteren Prognosegrenze oder für b), $T_1 = x_{[1]} = 11,81$	
Für a) mit einer oberen Prognosegrenze oder für b), $T_2 = x_{[n]} = 12,33$	
Ergebnis	
Der verteilungsfreie Prognosebereich für alle außer höchstens $r = 1$ der nächsten $m = 100$ Beobachtungswerte ist mit einem Signifikanzniveau von $C = 90 \%$ $(T_1, T_2) = (11,81, 12,33)$.	

Form C — Calculation of a distribution-free prediction interval for $(m - r)$ of a further m observations from the same population

Blank form	
Data identification	
Data and observation procedure:	
Units:	
Remarks:	
Information required	
Further sample size:	$m =$
Maximum number of further observations allowed to be outside interval:	$r =$
Confidence level (%)	$C =$
a) One-sided interval	☐
b) Two-sided interval	☐
For a) with an upper prediction limit, the lower limit to x in the population is required:	
	$T_1 = a =$
For a) with a lower prediction limit, the upper limit to x in the population is required:	
	$T_2 = b =$
Determination of the initial sample size	
For a), enter Annex E with C , m and r to find the initial sample size:	
	$n =$
For b), enter Annex F with C , m and r to find the initial sample size:	
	$n =$
Determination of the prediction limits	
For a) with a lower prediction limit, or for b),	
	$T_1 = x_{[1]} =$
For a) with an upper prediction limit, or for b),	
	$T_2 = x_{[n]} =$
Result	
The distribution-free prediction interval for all but at most $r =$ of the next $m =$ observations at confidence level $C =$ % is	
$(T_1, T_2) = (,)$.	

Completed form	
Data identification	
Data and observation procedure: Car batteries supplied in batches of 100. Require the sample size n such that one may have 90 % confidence that the two-sided prediction interval derived from this sample will contain at least 99 of each batch's voltages.	
Units: volts	
Remarks: The type of distribution of voltages is unknown, so a distribution-free prediction interval is required.	
Information required	
Further sample size:	$m = 100$
Maximum number of further observations allowed to be outside interval:	$r = 1$
Confidence level (%)	$C = 90 \%$
a) One-sided interval	☐
b) Two-sided interval	☒
For a) with an upper prediction limit, the lower limit to x in the population is required:	
	$T_1 = a =$
For a) with a lower prediction limit, the upper limit to x in the population is required:	
	$T_2 = b =$
Determination of the initial sample size	
For a), enter Annex E with C , m and r to find the initial sample size:	
	$n =$
For b), enter Annex F with C , m and r to find the initial sample size:	
	$n = 410$
Determination of the prediction limits	
For a) with a lower prediction limit, or for b),	
	$T_1 = x_{[1]} = 11,81$
For a) with an upper prediction limit, or for b),	
	$T_2 = x_{[n]} = 12,33$
Result	
The distribution-free prediction interval for all but at most $r = 1$ of the next $m = 100$ observations at confidence level $C = 90 \%$ is	
$(T_1, T_2) = (11,81, 12,33)$.	

Anhang A
(normativ)

**Tabellen für Prognosebereichsfaktoren k für einseitig begrenzte
Prognosebereiche bei unbekannter Standardabweichung der
Grundgesamtheit**

Annex A
(normative)

**Tables of one-sided prediction interval factors, k , for unknown
population standard deviation**

Tabelle A.1 — Faktoren k für einseitig begrenzte Prognosebereiche bei einem Vertrauensniveau von 90 % und unbekannter Standardabweichung der Grundgesamtheit
Table A.1 — One-sided prediction interval factors, k , at confidence level 90 % for unknown population standard deviation

n	m										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15
2	3,770	6,058	7,595	8,730	9,620	10,345	10,954	11,476	11,932	12,335	13,844
3	2,178	3,066	3,615	4,010	4,316	4,566	4,775	4,955	5,112	5,252	5,778
4	1,832	2,484	2,873	3,150	3,364	3,538	3,684	3,810	3,919	4,017	4,386
5	1,680	2,240	2,567	2,798	2,976	3,120	3,241	3,345	3,436	3,517	3,824
6	1,595	2,106	2,400	2,606	2,765	2,893	3,001	3,094	3,175	3,247	3,520
7	1,540	2,020	2,294	2,485	2,632	2,751	2,850	2,935	3,010	3,076	3,328
8	1,501	1,961	2,221	2,402	2,540	2,652	2,746	2,826	2,897	2,959	3,196
9	1,473	1,918	2,168	2,341	2,474	2,580	2,670	2,747	2,814	2,873	3,099
10	1,451	1,885	2,127	2,295	2,422	2,525	2,612	2,686	2,750	2,808	3,025
11	1,434	1,858	2,095	2,258	2,382	2,482	2,566	2,637	2,700	2,756	2,967
12	1,420	1,837	2,069	2,228	2,349	2,447	2,529	2,599	2,660	2,714	2,919
13	1,408	1,820	2,047	2,204	2,322	2,418	2,498	2,566	2,626	2,679	2,880
14	1,398	1,805	2,029	2,183	2,300	2,394	2,472	2,539	2,598	2,650	2,847
15	1,390	1,792	2,013	2,165	2,280	2,373	2,450	2,516	2,574	2,625	2,818
16	1,382	1,781	2,000	2,150	2,264	2,355	2,431	2,496	2,553	2,604	2,794
17	1,376	1,772	1,989	2,137	2,249	2,339	2,415	2,479	2,535	2,585	2,773
18	1,370	1,763	1,978	2,125	2,236	2,326	2,400	2,464	2,519	2,568	2,754
19	1,365	1,756	1,969	2,115	2,225	2,313	2,387	2,450	2,505	2,554	2,737
20	1,361	1,749	1,961	2,106	2,215	2,303	2,376	2,438	2,492	2,541	2,723
25	1,344	1,725	1,931	2,071	2,177	2,262	2,333	2,393	2,445	2,492	2,667
30	1,334	1,709	1,911	2,049	2,153	2,236	2,305	2,363	2,415	2,460	2,631
35	1,326	1,697	1,898	2,033	2,136	2,217	2,285	2,343	2,393	2,438	2,605
40	1,320	1,689	1,887	2,022	2,123	2,204	2,270	2,328	2,377	2,421	2,586
45	1,316	1,683	1,880	2,013	2,113	2,193	2,259	2,316	2,365	2,408	2,572
50	1,312	1,678	1,873	2,006	2,105	2,185	2,250	2,306	2,355	2,398	2,560
60	1,307	1,670	1,864	1,995	2,094	2,172	2,237	2,292	2,341	2,383	2,543
70	1,304	1,664	1,857	1,988	2,085	2,163	2,228	2,282	2,330	2,372	2,530
80	1,301	1,660	1,853	1,982	2,079	2,156	2,221	2,275	2,322	2,364	2,521
90	1,299	1,657	1,849	1,978	2,074	2,151	2,215	2,269	2,316	2,358	2,514
100	1,297	1,655	1,846	1,974	2,071	2,147	2,211	2,265	2,312	2,353	2,508
150	1,292	1,647	1,837	1,964	2,059	2,135	2,198	2,251	2,297	2,338	2,491
200	1,290	1,644	1,832	1,959	2,054	2,129	2,191	2,244	2,290	2,331	2,483
250	1,288	1,641	1,829	1,956	2,050	2,125	2,188	2,240	2,286	2,327	2,478
300	1,287	1,640	1,828	1,954	2,048	2,123	2,185	2,238	2,283	2,324	2,475
350	1,286	1,639	1,826	1,952	2,047	2,121	2,183	2,236	2,281	2,322	2,472
400	1,286	1,638	1,825	1,951	2,045	2,120	2,182	2,234	2,280	2,320	2,470
450	1,285	1,638	1,825	1,950	2,044	2,119	2,181	2,233	2,279	2,319	2,469
500	1,285	1,637	1,824	1,950	2,044	2,118	2,180	2,232	2,278	2,318	2,468
600	1,285	1,636	1,823	1,949	2,043	2,117	2,179	2,231	2,276	2,316	2,466
700	1,284	1,636	1,823	1,948	2,042	2,116	2,178	2,230	2,275	2,315	2,465
800	1,284	1,635	1,822	1,947	2,041	2,116	2,177	2,229	2,275	2,315	2,464
900	1,284	1,635	1,822	1,947	2,041	2,115	2,176	2,229	2,274	2,314	2,463
1 000	1,284	1,635	1,821	1,947	2,040	2,115	2,176	2,228	2,274	2,314	2,463
∞	1,282	1,633	1,819	1,944	2,037	2,111	2,172	2,224	2,269	2,309	2,458

Tabelle A.1 — Faktoren k für einseitig begrenzte Prognosebereiche bei einem Vertrauensniveau von 90 % und unbekannter Standardabweichung der Grundgesamtheit (fortgesetzt)

Table A.1 — One-sided prediction interval factors, k , at confidence level 90 % for unknown population standard deviation (continued)

n	m										
	20	30	40	50	60	80	100	150	200	250	500
2	14,870	16,249	17,183	17,884	18,442	19,297	19,940	21,068	21,838	22,421	24,153
3	6,139	6,631	6,967	7,221	7,424	7,737	7,973	8,390	8,676	8,894	9,542
4	4,640	4,988	5,227	5,408	5,553	5,777	5,946	6,246	6,453	6,610	7,079
5	4,036	4,326	4,526	4,678	4,800	4,988	5,131	5,384	5,559	5,691	6,089
6	3,708	3,968	4,146	4,282	4,391	4,560	4,689	4,916	5,073	5,192	5,551
7	3,502	3,741	3,907	4,032	4,134	4,290	4,409	4,620	4,766	4,877	5,210
8	3,360	3,585	3,741	3,860	3,955	4,103	4,215	4,415	4,553	4,658	4,974
9	3,256	3,471	3,620	3,733	3,824	3,965	4,073	4,264	4,396	4,497	4,799
10	3,176	3,383	3,526	3,635	3,723	3,859	3,963	4,147	4,275	4,372	4,665
11	3,112	3,313	3,452	3,558	3,643	3,775	3,876	4,055	4,179	4,273	4,557
12	3,061	3,257	3,392	3,495	3,578	3,707	3,805	3,979	4,100	4,192	4,470
13	3,019	3,210	3,342	3,443	3,524	3,650	3,746	3,916	4,035	4,125	4,397
14	2,983	3,170	3,300	3,399	3,478	3,602	3,696	3,863	3,979	4,068	4,334
15	2,952	3,136	3,264	3,361	3,439	3,560	3,653	3,817	3,932	4,019	4,281
16	2,926	3,107	3,232	3,328	3,405	3,525	3,616	3,778	3,890	3,976	4,235
17	2,903	3,081	3,205	3,299	3,375	3,493	3,583	3,743	3,854	3,938	4,194
18	2,882	3,059	3,181	3,274	3,349	3,465	3,554	3,712	3,822	3,905	4,158
19	2,864	3,039	3,160	3,252	3,326	3,441	3,529	3,685	3,793	3,876	4,125
20	2,848	3,021	3,140	3,231	3,305	3,419	3,506	3,660	3,767	3,849	4,096
25	2,788	2,954	3,068	3,156	3,226	3,335	3,419	3,567	3,670	3,749	3,986
30	2,748	2,910	3,021	3,106	3,174	3,280	3,361	3,505	3,605	3,682	3,912
35	2,721	2,878	2,988	3,071	3,137	3,241	3,320	3,461	3,559	3,634	3,859
40	2,700	2,855	2,963	3,044	3,110	3,212	3,290	3,428	3,524	3,597	3,819
45	2,684	2,837	2,943	3,024	3,089	3,189	3,266	3,402	3,497	3,569	3,788
50	2,671	2,823	2,928	3,008	3,072	3,171	3,247	3,382	3,475	3,547	3,762
60	2,652	2,802	2,905	2,983	3,046	3,144	3,218	3,351	3,442	3,513	3,724
70	2,639	2,787	2,888	2,966	3,028	3,124	3,198	3,328	3,419	3,488	3,697
80	2,629	2,775	2,876	2,953	3,014	3,110	3,183	3,312	3,401	3,470	3,676
90	2,621	2,766	2,867	2,943	3,004	3,099	3,171	3,299	3,388	3,455	3,660
100	2,615	2,759	2,859	2,935	2,995	3,09	3,161	3,288	3,376	3,444	3,647
150	2,596	2,738	2,836	2,911	2,970	3,062	3,133	3,257	3,343	3,409	3,607
200	2,587	2,728	2,825	2,898	2,957	3,049	3,118	3,241	3,327	3,392	3,587
250	2,581	2,722	2,818	2,891	2,950	3,041	3,110	3,232	3,317	3,381	3,575
300	2,577	2,718	2,814	2,886	2,945	3,035	3,104	3,226	3,310	3,374	3,567
350	2,575	2,715	2,810	2,883	2,941	3,031	3,100	3,221	3,305	3,369	3,561
400	2,573	2,712	2,808	2,880	2,939	3,029	3,097	3,218	3,302	3,365	3,557
450	2,571	2,711	2,806	2,878	2,936	3,026	3,094	3,215	3,299	3,362	3,554
500	2,570	2,709	2,805	2,877	2,935	3,024	3,092	3,213	3,296	3,360	3,551
600	2,568	2,707	2,802	2,874	2,932	3,022	3,090	3,210	3,293	3,356	3,547
700	2,567	2,706	2,801	2,873	2,931	3,020	3,088	3,208	3,291	3,354	3,544
800	2,566	2,705	2,800	2,871	2,929	3,018	3,086	3,206	3,289	3,352	3,542
900	2,565	2,704	2,799	2,870	2,928	3,017	3,085	3,205	3,288	3,351	3,540
1 000	2,565	2,703	2,798	2,870	2,927	3,016	3,084	3,204	3,286	3,349	3,539
∞	2,559	2,697	2,791	2,862	2,920	3,008	3,075	3,194	3,276	3,339	3,527

Tabelle A.1 — Faktoren k für einseitig begrenzte Prognosebereiche bei einem Vertrauensniveau von 90 % und unbekannter Standardabweichung der Grundgesamtheit (fortgesetzt)
Table A.1 — One-sided prediction interval factors, k , at confidence level 90 % for unknown population standard deviation (continued)

n	m									
	1 000	2 000	5 000	10 000	20 000	50 000	100 000	200 000	500 000	1 000 000
2	25,783	27,327	29,256	30,642	31,972	33,657	34,882	36,068	37,583	38,692
3	10,157	10,741	11,473	12,000	12,508	13,152	13,620	14,074	14,655	15,080
4	7,525	7,949	8,483	8,867	9,238	9,709	10,051	10,384	10,809	11,120
5	6,467	6,828	7,281	7,609	7,925	8,326	8,618	8,902	9,264	9,530
6	5,892	6,218	6,628	6,925	7,211	7,574	7,839	8,096	8,425	8,667
7	5,528	5,832	6,215	6,491	6,758	7,098	7,345	7,586	7,893	8,119
8	5,275	5,564	5,927	6,190	6,444	6,767	7,002	7,231	7,523	7,738
9	5,088	5,365	5,714	5,967	6,211	6,521	6,748	6,968	7,249	7,456
10	4,944	5,212	5,550	5,795	6,031	6,332	6,551	6,764	7,037	7,238
11	4,829	5,090	5,419	5,657	5,887	6,180	6,394	6,602	6,868	7,063
12	4,735	4,990	5,311	5,544	5,769	6,056	6,265	6,468	6,729	6,920
13	4,657	4,906	5,221	5,450	5,671	5,952	6,157	6,357	6,612	6,800
14	4,590	4,835	5,145	5,370	5,587	5,863	6,065	6,261	6,513	6,697
15	4,532	4,774	5,079	5,300	5,514	5,787	5,986	6,179	6,427	6,609
16	4,482	4,721	5,022	5,240	5,451	5,720	5,917	6,108	6,352	6,532
17	4,439	4,674	4,971	5,187	5,395	5,661	5,856	6,044	6,286	6,464
18	4,400	4,632	4,926	5,139	5,346	5,609	5,801	5,988	6,228	6,404
19	4,365	4,595	4,886	5,097	5,302	5,562	5,753	5,938	6,175	6,349
20	4,333	4,561	4,850	5,059	5,262	5,520	5,709	5,892	6,128	6,300
25	4,214	4,433	4,711	4,913	5,109	5,358	5,540	5,718	5,945	6,112
30	4,134	4,347	4,618	4,814	5,005	5,248	5,426	5,599	5,821	5,984
35	4,076	4,285	4,550	4,742	4,929	5,167	5,342	5,512	5,729	5,889
40	4,032	4,237	4,498	4,687	4,871	5,106	5,278	5,445	5,659	5,817
45	3,998	4,200	4,457	4,644	4,825	5,057	5,227	5,392	5,604	5,759
50	3,970	4,170	4,424	4,609	4,788	5,017	5,185	5,348	5,558	5,712
60	3,928	4,124	4,373	4,555	4,731	4,956	5,121	5,281	5,487	5,639
70	3,897	4,091	4,336	4,515	4,689	4,911	5,073	5,232	5,435	5,585
80	3,874	4,065	4,308	4,485	4,657	4,876	5,037	5,194	5,395	5,543
90	3,856	4,046	4,286	4,461	4,631	4,849	5,008	5,163	5,363	5,510
100	3,842	4,029	4,268	4,442	4,610	4,826	4,984	5,138	5,336	5,482
150	3,797	3,980	4,213	4,382	4,546	4,756	4,910	5,060	5,253	5,395
200	3,775	3,955	4,184	4,351	4,513	4,719	4,871	5,019	5,209	5,349
250	3,761	3,940	4,167	4,332	4,492	4,697	4,847	4,993	5,181	5,319
300	3,752	3,930	4,155	4,319	4,478	4,681	4,830	4,975	5,162	5,299
350	3,746	3,923	4,147	4,310	4,468	4,670	4,818	4,962	5,148	5,284
400	3,741	3,917	4,141	4,303	4,461	4,662	4,809	4,953	5,137	5,273
450	3,737	3,913	4,136	4,298	4,455	4,655	4,802	4,945	5,129	5,264
500	3,734	3,910	4,132	4,293	4,450	4,650	4,796	4,939	5,122	5,257
600	3,729	3,904	4,126	4,287	4,443	4,642	4,788	4,930	5,112	5,246
700	3,726	3,901	4,122	4,282	4,438	4,636	4,781	4,923	5,105	5,239
800	3,724	3,898	4,118	4,279	4,434	4,632	4,777	4,918	5,099	5,233
900	3,722	3,896	4,116	4,276	4,431	4,628	4,773	4,914	5,095	5,228
1 000	3,720	3,894	4,114	4,274	4,428	4,626	4,770	4,911	5,091	5,224
∞	3,706	3,878	4,096	4,254	4,406	4,601	4,743	4,882	5,060	5,190

ANMERKUNG Diese Tabelle enthält Faktoren k mit der Eigenschaft, dass mit einem Vertrauensniveau von 90 % keiner der nächsten m Beobachtungswerte aus einer normalverteilten Grundgesamtheit außerhalb des Bereichs $(-\infty, \bar{x} + ks)$ liegen wird, wobei $\bar{x}$ und s aus einer Zufallsstichprobe vom Umfang n aus derselben Grundgesamtheit ermittelt wurden. Analoges gilt für den Bereich $(\bar{x} - ks, \infty)$.

NOTE This table provides factors k such that one may be at least 90 % confident that none of the next m observations from a normally distributed population will lie outside the range $(-\infty, \bar{x} + ks)$, where $\bar{x}$ and s are derived from a random sample of size n from the same population. Similarly for the range $(\bar{x} - ks, \infty)$.

Tabelle A.2 — Faktoren k für einseitig begrenzte Prognosebereiche bei einem Vertrauensniveau von 95 % und unbekannter Standardabweichung der Grundgesamtheit

Table A.2 — One-sided prediction interval factors, k , at confidence level 95 % for unknown population standard deviation

n	m										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15
2	7,733	12,253	15,309	17,572	19,347	20,794	22,01	23,053	23,964	24,770	27,786
3	3,372	4,572	5,328	5,876	6,303	6,652	6,946	7,198	7,420	7,616	8,359
4	2,632	3,402	3,871	4,209	4,472	4,687	4,868	5,024	5,161	5,282	5,744
5	2,336	2,952	3,321	3,584	3,788	3,955	4,096	4,217	4,323	4,418	4,779
6	2,177	2,716	3,033	3,259	3,434	3,576	3,696	3,800	3,891	3,972	4,280
7	2,078	2,570	2,857	3,061	3,218	3,345	3,453	3,546	3,627	3,700	3,976
8	2,010	2,472	2,738	2,927	3,072	3,190	3,289	3,374	3,449	3,516	3,771
9	1,961	2,400	2,653	2,830	2,967	3,077	3,171	3,251	3,321	3,384	3,623
10	1,923	2,346	2,588	2,757	2,887	2,993	3,081	3,158	3,225	3,285	3,512
11	1,894	2,304	2,537	2,700	2,825	2,927	3,012	3,085	3,149	3,207	3,424
12	1,870	2,270	2,497	2,655	2,776	2,874	2,956	3,027	3,089	3,144	3,354
13	1,850	2,242	2,463	2,617	2,735	2,830	2,910	2,979	3,039	3,093	3,297
14	1,834	2,219	2,435	2,586	2,701	2,794	2,872	2,939	2,997	3,050	3,248
15	1,820	2,199	2,411	2,559	2,672	2,763	2,839	2,905	2,962	3,013	3,207
16	1,808	2,182	2,391	2,536	2,647	2,736	2,811	2,875	2,932	2,982	3,172
17	1,797	2,167	2,373	2,516	2,625	2,713	2,787	2,850	2,906	2,955	3,142
18	1,788	2,154	2,358	2,499	2,606	2,693	2,766	2,828	2,882	2,931	3,115
19	1,780	2,142	2,344	2,484	2,590	2,675	2,747	2,808	2,862	2,910	3,091
20	1,772	2,132	2,332	2,470	2,575	2,659	2,730	2,791	2,844	2,891	3,070
25	1,745	2,094	2,287	2,419	2,520	2,601	2,668	2,726	2,777	2,822	2,992
30	1,728	2,070	2,258	2,386	2,484	2,563	2,628	2,684	2,733	2,777	2,941
35	1,715	2,052	2,237	2,364	2,459	2,536	2,600	2,655	2,703	2,745	2,906
40	1,706	2,040	2,222	2,347	2,441	2,517	2,580	2,633	2,680	2,722	2,880
45	1,699	2,030	2,210	2,334	2,427	2,502	2,564	2,617	2,663	2,704	2,859
50	1,694	2,022	2,201	2,323	2,416	2,490	2,551	2,604	2,650	2,690	2,843
60	1,685	2,011	2,188	2,308	2,399	2,472	2,532	2,584	2,629	2,669	2,820
70	1,680	2,002	2,178	2,297	2,387	2,459	2,519	2,570	2,615	2,655	2,803
80	1,675	1,996	2,171	2,289	2,379	2,450	2,509	2,560	2,604	2,643	2,791
90	1,672	1,992	2,165	2,283	2,372	2,443	2,502	2,552	2,596	2,635	2,781
100	1,669	1,988	2,161	2,278	2,367	2,437	2,496	2,546	2,590	2,628	2,773
150	1,661	1,977	2,148	2,263	2,351	2,420	2,478	2,527	2,570	2,608	2,750
200	1,657	1,971	2,141	2,256	2,343	2,412	2,469	2,518	2,560	2,598	2,739
250	1,655	1,968	2,137	2,252	2,338	2,407	2,464	2,512	2,555	2,592	2,732
300	1,653	1,966	2,135	2,249	2,335	2,403	2,460	2,509	2,551	2,588	2,728
350	1,652	1,964	2,133	2,247	2,333	2,401	2,458	2,506	2,548	2,585	2,725
400	1,651	1,963	2,131	2,245	2,331	2,399	2,456	2,504	2,546	2,583	2,722
450	1,651	1,962	2,130	2,244	2,330	2,398	2,454	2,502	2,544	2,581	2,720
500	1,650	1,962	2,129	2,243	2,329	2,397	2,453	2,501	2,543	2,580	2,719
600	1,649	1,960	2,128	2,242	2,327	2,395	2,451	2,499	2,541	2,578	2,717
700	1,649	1,960	2,127	2,241	2,326	2,394	2,450	2,498	2,540	2,577	2,715
800	1,648	1,959	2,127	2,240	2,325	2,393	2,449	2,497	2,539	2,576	2,714
900	1,648	1,959	2,126	2,239	2,324	2,392	2,448	2,496	2,538	2,575	2,713
1 000	1,648	1,958	2,126	2,239	2,324	2,392	2,448	2,496	2,537	2,574	2,712
∞	1,645	1,955	2,122	2,235	2,319	2,387	2,443	2,490	2,532	2,568	2,706

Tabelle A.2 — Faktoren k für einseitig begrenzte Prognosebereiche bei einem Vertrauensniveau von 95 % und unbekannter Standardabweichung der Grundgesamtheit (fortgesetzt)
Table A.2 — One-sided prediction interval factors, k , at confidence level 95 % for unknown population standard deviation (continued)

n	m										
	20	30	40	50	60	80	100	150	200	250	500
2	29,837	32,597	34,466	35,868	36,985	38,696	39,984	42,242	43,785	44,952	48,421
3	8,869	9,566	10,043	10,404	10,692	11,138	11,474	12,068	12,477	12,786	13,712
4	6,064	6,503	6,805	7,034	7,219	7,503	7,719	8,101	8,365	8,565	9,165
5	5,029	5,374	5,613	5,794	5,940	6,166	6,338	6,643	6,853	7,013	7,494
6	4,495	4,791	4,997	5,154	5,280	5,475	5,624	5,888	6,071	6,210	6,629
7	4,169	4,435	4,620	4,762	4,875	5,052	5,187	5,426	5,592	5,718	6,098
8	3,949	4,195	4,366	4,497	4,602	4,766	4,890	5,112	5,266	5,384	5,738
9	3,790	4,021	4,182	4,305	4,404	4,558	4,676	4,885	5,031	5,142	5,476
10	3,670	3,890	4,043	4,160	4,254	4,401	4,513	4,713	4,851	4,957	5,277
11	3,576	3,787	3,934	4,046	4,136	4,277	4,385	4,577	4,710	4,812	5,120
12	3,501	3,704	3,846	3,954	4,041	4,177	4,282	4,467	4,596	4,695	4,993
13	3,439	3,636	3,773	3,878	3,963	4,095	4,196	4,376	4,502	4,598	4,888
14	3,387	3,579	3,712	3,815	3,897	4,026	4,124	4,300	4,422	4,516	4,799
15	3,343	3,530	3,661	3,761	3,841	3,967	4,063	4,235	4,355	4,446	4,723
16	3,305	3,488	3,616	3,714	3,793	3,916	4,011	4,179	4,296	4,386	4,657
17	3,272	3,452	3,577	3,673	3,751	3,872	3,965	4,130	4,245	4,333	4,600
18	3,243	3,420	3,543	3,638	3,714	3,833	3,924	4,087	4,200	4,287	4,549
19	3,217	3,392	3,513	3,606	3,681	3,799	3,888	4,048	4,160	4,245	4,504
20	3,194	3,367	3,486	3,578	3,652	3,768	3,856	4,014	4,124	4,208	4,464
25	3,110	3,273	3,386	3,473	3,543	3,653	3,736	3,886	3,990	4,070	4,312
30	3,055	3,212	3,321	3,405	3,472	3,578	3,658	3,802	3,902	3,979	4,211
35	3,017	3,170	3,276	3,357	3,423	3,525	3,603	3,742	3,839	3,914	4,140
40	2,988	3,138	3,242	3,322	3,386	3,485	3,562	3,698	3,793	3,866	4,086
45	2,967	3,114	3,216	3,294	3,357	3,455	3,530	3,664	3,757	3,828	4,045
50	2,949	3,095	3,196	3,272	3,334	3,431	3,505	3,637	3,728	3,799	4,012
60	2,924	3,066	3,165	3,240	3,301	3,395	3,467	3,596	3,685	3,754	3,962
70	2,905	3,046	3,143	3,217	3,277	3,370	3,441	3,567	3,655	3,722	3,926
80	2,892	3,031	3,127	3,200	3,259	3,351	3,421	3,545	3,632	3,698	3,899
90	2,881	3,019	3,114	3,187	3,245	3,336	3,405	3,529	3,614	3,680	3,879
100	2,873	3,010	3,104	3,176	3,234	3,324	3,393	3,515	3,600	3,665	3,862
150	2,848	2,982	3,075	3,145	3,202	3,289	3,356	3,475	3,558	3,621	3,812
200	2,836	2,969	3,060	3,129	3,185	3,272	3,338	3,455	3,537	3,599	3,787
250	2,829	2,960	3,051	3,120	3,176	3,262	3,327	3,444	3,524	3,586	3,772
300	2,824	2,955	3,045	3,114	3,169	3,255	3,320	3,436	3,516	3,577	3,763
350	2,820	2,951	3,041	3,110	3,165	3,250	3,315	3,430	3,510	3,571	3,755
400	2,818	2,948	3,038	3,106	3,161	3,246	3,311	3,426	3,506	3,566	3,750
450	2,816	2,946	3,036	3,104	3,158	3,243	3,308	3,423	3,502	3,563	3,746
500	2,814	2,944	3,034	3,102	3,156	3,241	3,305	3,420	3,499	3,560	3,743
600	2,812	2,941	3,031	3,099	3,153	3,238	3,302	3,416	3,495	3,556	3,738
700	2,810	2,940	3,029	3,096	3,151	3,235	3,299	3,413	3,492	3,552	3,734
800	2,809	2,938	3,027	3,095	3,149	3,233	3,297	3,411	3,490	3,550	3,732
900	2,808	2,937	3,026	3,093	3,148	3,232	3,296	3,410	3,488	3,548	3,730
1 000	2,807	2,936	3,025	3,092	3,147	3,231	3,295	3,408	3,487	3,547	3,728
∞	2,800	2,928	3,016	3,083	3,137	3,220	3,284	3,396	3,474	3,534	3,713

Tabelle A.2 — Faktoren k für einseitig begrenzte Prognosebereiche bei einem Vertrauensniveau von 95 % und unbekannter Standardabweichung der Grundgesamtheit (fortgesetzt)

Table A.2 — One-sided prediction interval factors, k , at confidence level 95 % for unknown population standard deviation (continued)

n	m									
	1 000	2 000	5 000	10 000	20 000	50 000	100 000	200 000	500 000	1 000 000
2	51,686	54,779	58,642	61,418	64,085	67,460	69,914	72,291	75,325	77,547
3	14,589	15,424	16,470	17,225	17,951	18,872	19,542	20,192	21,023	21,632
4	9,736	10,280	10,964	11,458	11,933	12,538	12,978	13,406	13,952	14,353
5	7,952	8,390	8,941	9,339	9,724	10,212	10,569	10,914	11,357	11,681
6	7,029	7,411	7,894	8,243	8,580	9,008	9,321	9,625	10,013	10,298
7	6,462	6,811	7,251	7,569	7,877	8,269	8,554	8,832	9,187	9,448
8	6,077	6,402	6,813	7,111	7,399	7,765	8,033	8,293	8,625	8,870
9	5,797	6,106	6,495	6,778	7,051	7,399	7,653	7,900	8,216	8,448
10	5,584	5,879	6,252	6,523	6,785	7,119	7,363	7,600	7,904	8,127
11	5,416	5,700	6,061	6,322	6,575	6,898	7,133	7,362	7,656	7,872
12	5,280	5,555	5,905	6,159	6,404	6,718	6,947	7,169	7,455	7,664
13	5,167	5,435	5,776	6,023	6,263	6,568	6,791	7,009	7,287	7,492
14	5,071	5,334	5,666	5,908	6,143	6,442	6,660	6,873	7,146	7,346
15	4,990	5,247	5,573	5,810	6,040	6,333	6,548	6,756	7,024	7,221
16	4,919	5,171	5,491	5,725	5,950	6,239	6,450	6,655	6,918	7,112
17	4,857	5,105	5,420	5,650	5,872	6,156	6,364	6,566	6,825	7,016
18	4,802	5,047	5,357	5,583	5,803	6,083	6,287	6,487	6,743	6,931
19	4,754	4,995	5,301	5,524	5,741	6,017	6,219	6,416	6,669	6,855
20	4,710	4,948	5,251	5,471	5,685	5,958	6,158	6,353	6,603	6,787
25	4,546	4,772	5,060	5,270	5,474	5,734	5,926	6,112	6,351	6,527
30	4,436	4,654	4,932	5,135	5,332	5,584	5,769	5,949	6,180	6,351
35	4,359	4,570	4,840	5,038	5,229	5,475	5,655	5,831	6,057	6,223
40	4,300	4,507	4,771	4,964	5,152	5,392	5,569	5,741	5,962	6,125
45	4,254	4,458	4,717	4,906	5,091	5,327	5,500	5,670	5,887	6,048
50	4,218	4,418	4,673	4,859	5,041	5,274	5,445	5,612	5,826	5,984
60	4,163	4,358	4,606	4,789	4,966	5,193	5,360	5,523	5,733	5,888
70	4,123	4,315	4,558	4,737	4,911	5,134	5,298	5,458	5,664	5,816
80	4,094	4,282	4,522	4,698	4,869	5,089	5,250	5,408	5,611	5,761
90	4,071	4,256	4,494	4,667	4,836	5,053	5,213	5,369	5,570	5,718
100	4,052	4,236	4,471	4,643	4,810	5,025	5,182	5,337	5,535	5,682
150	3,996	4,174	4,401	4,567	4,729	4,936	5,088	5,237	5,429	5,571
200	3,968	4,143	4,366	4,529	4,687	4,890	5,040	5,185	5,373	5,512
250	3,952	4,125	4,345	4,506	4,662	4,863	5,010	5,154	5,339	5,476
300	3,941	4,112	4,331	4,490	4,645	4,844	4,990	5,132	5,316	5,451
350	3,933	4,103	4,321	4,479	4,633	4,830	4,975	5,117	5,299	5,433
400	3,927	4,097	4,313	4,471	4,624	4,820	4,964	5,105	5,286	5,420
450	3,922	4,092	4,307	4,464	4,617	4,812	4,956	5,096	5,276	5,409
500	3,918	4,087	4,302	4,459	4,611	4,806	4,949	5,089	5,268	5,401
600	3,913	4,081	4,295	4,451	4,603	4,797	4,939	5,078	5,256	5,388
700	3,909	4,077	4,290	4,446	4,597	4,790	4,931	5,070	5,248	5,379
800	3,906	4,073	4,286	4,442	4,592	4,785	4,926	5,064	5,241	5,372
900	3,903	4,071	4,283	4,438	4,588	4,781	4,922	5,059	5,236	5,366
1 000	3,902	4,069	4,281	4,436	4,586	4,777	4,918	5,055	5,232	5,362
∞	3,885	4,050	4,260	4,412	4,560	4,749	4,887	5,022	5,195	5,323

ANMERKUNG Diese Tabelle enthält Faktoren k mit der Eigenschaft, dass mit einem Vertrauensniveau von 95 % keiner der nächsten m Beobachtungswerte aus einer normalverteilten Grundgesamtheit außerhalb des Bereichs $(-\infty, \bar{x} + ks)$ liegen wird, wobei $\bar{x}$ und s aus einer Zufallsstichprobe vom Umfang n aus derselben Grundgesamtheit ermittelt wurden. Analoges gilt für den Bereich $(\bar{x} - ks, \infty)$.

NOTE This table provides factors k such that one may be at least 95 % confident that none of the next m observations from a normally distributed population will lie outside the range $(-\infty, \bar{x} + ks)$, where $\bar{x}$ and s are derived from a random sample of size n from the same population. Similarly for the range $(\bar{x} - ks, \infty)$.

Tabelle A.3 — Faktoren k für einseitig begrenzte Prognosebereiche bei einem Vertrauensniveau von 97,5 % und unbekannter Standardabweichung der Grundgesamtheit
Table A.3 — One-sided prediction interval factors, k , at confidence level 97,5 % for unknown population standard deviation

n	m										
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15
2	15,562	24,575	30,678	35,199	38,746	41,640	44,070	46,156	47,977	49,589	55,621
3	4,969	6,629	7,683	8,451	9,052	9,543	9,956	10,312	10,624	10,902	11,950
4	3,559	4,491	5,068	5,486	5,812	6,079	6,305	6,500	6,671	6,824	7,403
5	3,042	3,738	4,161	4,466	4,703	4,898	5,062	5,205	5,330	5,441	5,867
6	2,777	3,360	3,709	3,960	4,155	4,315	4,449	4,566	4,669	4,761	5,111
7	2,616	3,134	3,440	3,659	3,830	3,969	4,086	4,188	4,278	4,357	4,663
8	2,509	2,983	3,262	3,461	3,615	3,741	3,847	3,939	4,019	4,092	4,367
9	2,431	2,876	3,136	3,320	3,463	3,579	3,677	3,762	3,837	3,903	4,158
10	2,373	2,796	3,042	3,215	3,349	3,458	3,551	3,630	3,700	3,763	4,002
11	2,328	2,734	2,968	3,134	3,261	3,365	3,453	3,528	3,595	3,654	3,881
12	2,291	2,684	2,910	3,069	3,191	3,291	3,375	3,447	3,511	3,567	3,784
13	2,262	2,644	2,862	3,016	3,134	3,230	3,311	3,381	3,442	3,497	3,705
14	2,237	2,610	2,823	2,972	3,087	3,180	3,258	3,326	3,385	3,438	3,640
15	2,216	2,581	2,789	2,935	3,046	3,137	3,213	3,279	3,337	3,388	3,585
16	2,198	2,557	2,760	2,903	3,012	3,101	3,175	3,239	3,296	3,346	3,537
17	2,182	2,535	2,736	2,875	2,983	3,069	3,142	3,205	3,26	3,309	3,496
18	2,168	2,517	2,714	2,851	2,957	3,042	3,113	3,175	3,229	3,277	3,461
19	2,156	2,500	2,695	2,830	2,934	3,018	3,088	3,149	3,202	3,249	3,429
20	2,145	2,486	2,678	2,811	2,914	2,996	3,065	3,125	3,177	3,224	3,401
25	2,105	2,432	2,615	2,742	2,839	2,917	2,982	3,039	3,088	3,132	3,298
30	2,080	2,398	2,575	2,698	2,791	2,866	2,929	2,983	3,031	3,073	3,232
35	2,062	2,374	2,547	2,667	2,758	2,831	2,892	2,945	2,991	3,032	3,186
40	2,048	2,356	2,527	2,644	2,733	2,805	2,865	2,916	2,961	3,001	3,153
45	2,038	2,343	2,511	2,627	2,714	2,785	2,844	2,895	2,939	2,978	3,127
50	2,030	2,332	2,498	2,613	2,700	2,769	2,828	2,878	2,921	2,960	3,106
60	2,018	2,316	2,480	2,592	2,678	2,746	2,803	2,852	2,895	2,933	3,076
70	2,010	2,305	2,467	2,578	2,662	2,730	2,786	2,834	2,876	2,914	3,055
80	2,003	2,296	2,457	2,567	2,651	2,718	2,773	2,821	2,863	2,900	3,039
90	1,998	2,290	2,450	2,559	2,642	2,708	2,764	2,811	2,852	2,889	3,027
100	1,995	2,285	2,444	2,553	2,635	2,701	2,756	2,803	2,844	2,880	3,017
150	1,983	2,269	2,426	2,533	2,614	2,679	2,732	2,778	2,819	2,854	2,988
200	1,977	2,262	2,417	2,523	2,603	2,668	2,721	2,767	2,806	2,841	2,974
250	1,974	2,257	2,412	2,518	2,597	2,661	2,714	2,759	2,799	2,834	2,966
300	1,972	2,254	2,409	2,514	2,593	2,657	2,710	2,755	2,794	2,829	2,960
350	1,970	2,252	2,406	2,511	2,590	2,654	2,706	2,751	2,791	2,825	2,956
400	1,969	2,251	2,404	2,509	2,588	2,651	2,704	2,749	2,788	2,823	2,953
450	1,968	2,249	2,403	2,507	2,586	2,650	2,702	2,747	2,786	2,820	2,951
500	1,967	2,248	2,402	2,506	2,585	2,648	2,700	2,745	2,784	2,819	2,949
600	1,966	2,247	2,400	2,504	2,583	2,646	2,698	2,743	2,782	2,816	2,946
700	1,965	2,246	2,399	2,503	2,582	2,644	2,697	2,741	2,780	2,815	2,944
800	1,965	2,245	2,398	2,502	2,580	2,643	2,695	2,740	2,779	2,813	2,942
900	1,964	2,244	2,397	2,501	2,580	2,642	2,694	2,739	2,778	2,812	2,941
1 000	1,964	2,244	2,397	2,500	2,579	2,642	2,694	2,738	2,777	2,811	2,940
∞	1,960	2,239	2,391	2,495	2,573	2,635	2,687	2,731	2,770	2,804	2,932

Tabelle A.3 — Faktoren k für einseitig begrenzte Prognosebereiche bei einem Vertrauensniveau von 97,5 % und unbekannter Standardabweichung der Grundgesamtheit (fortgesetzt)
Table A.3 — One-sided prediction interval factors, k , at confidence level 97,5 % for unknown population standard deviation (continued)

n	m										
	20	30	40	50	60	80	100	150	200	250	500
2	59,722	65,242	68,982	71,787	74,020	77,444	80,020	84,537	87,625	89,958	96,899
3	12,673	13,659	14,335	14,846	15,255	15,887	16,364	17,208	17,787	18,227	19,542
4	7,806	8,359	8,741	9,031	9,264	9,625	9,898	10,383	10,718	10,972	11,734
5	6,164	6,574	6,858	7,074	7,249	7,519	7,724	8,090	8,342	8,534	9,112
6	5,355	5,695	5,931	6,111	6,256	6,482	6,654	6,960	7,172	7,333	7,820
7	4,877	5,174	5,381	5,540	5,667	5,866	6,018	6,288	6,476	6,619	7,051
8	4,561	4,830	5,018	5,161	5,278	5,458	5,597	5,843	6,015	6,145	6,541
9	4,337	4,585	4,759	4,893	5,000	5,168	5,297	5,526	5,685	5,807	6,176
10	4,169	4,403	4,566	4,691	4,793	4,951	5,072	5,288	5,438	5,553	5,902
11	4,040	4,261	4,416	4,535	4,632	4,782	4,897	5,103	5,246	5,356	5,688
12	3,936	4,148	4,297	4,410	4,503	4,646	4,757	4,954	5,092	5,197	5,516
13	3,852	4,056	4,199	4,308	4,397	4,536	4,642	4,832	4,965	5,067	5,375
14	3,782	3,979	4,117	4,223	4,309	4,443	4,546	4,730	4,859	4,958	5,257
15	3,722	3,914	4,048	4,151	4,235	4,365	4,465	4,644	4,769	4,865	5,156
16	3,672	3,858	3,989	4,089	4,171	4,298	4,395	4,570	4,692	4,786	5,070
17	3,628	3,810	3,938	4,036	4,115	4,239	4,335	4,506	4,625	4,716	4,995
18	3,589	3,768	3,893	3,989	4,067	4,188	4,282	4,449	4,566	4,656	4,928
19	3,555	3,731	3,853	3,948	4,024	4,143	4,235	4,399	4,514	4,602	4,870
20	3,525	3,698	3,818	3,911	3,986	4,103	4,193	4,355	4,467	4,554	4,817
25	3,414	3,576	3,688	3,775	3,845	3,955	4,039	4,189	4,295	4,376	4,622
30	3,343	3,497	3,605	3,688	3,754	3,859	3,939	4,082	4,183	4,260	4,495
35	3,294	3,443	3,547	3,627	3,691	3,792	3,869	4,007	4,104	4,178	4,405
40	3,258	3,403	3,504	3,582	3,645	3,742	3,818	3,952	4,046	4,118	4,338
45	3,230	3,372	3,471	3,547	3,609	3,705	3,778	3,909	4,001	4,072	4,287
50	3,208	3,348	3,446	3,520	3,581	3,675	3,747	3,876	3,966	4,035	4,246
60	3,175	3,312	3,407	3,480	3,539	3,630	3,700	3,826	3,913	3,980	4,184
70	3,152	3,287	3,380	3,451	3,509	3,599	3,667	3,790	3,876	3,941	4,141
80	3,135	3,268	3,360	3,430	3,487	3,575	3,643	3,764	3,848	3,913	4,109
90	3,122	3,253	3,345	3,414	3,470	3,557	3,624	3,743	3,827	3,890	4,084
100	3,112	3,242	3,332	3,401	3,457	3,543	3,609	3,727	3,809	3,872	4,064
150	3,081	3,208	3,296	3,363	3,417	3,501	3,565	3,679	3,759	3,820	4,004
200	3,065	3,191	3,278	3,344	3,397	3,480	3,543	3,655	3,734	3,793	3,975
250	3,056	3,181	3,267	3,332	3,385	3,467	3,530	3,641	3,719	3,778	3,957
300	3,050	3,174	3,260	3,325	3,377	3,459	3,521	3,632	3,709	3,768	3,946
350	3,046	3,169	3,254	3,319	3,372	3,453	3,515	3,625	3,702	3,760	3,937
400	3,043	3,166	3,251	3,315	3,367	3,448	3,510	3,620	3,696	3,755	3,931
450	3,040	3,163	3,248	3,312	3,364	3,445	3,507	3,616	3,692	3,750	3,926
500	3,038	3,161	3,245	3,310	3,362	3,442	3,504	3,613	3,689	3,747	3,923
600	3,035	3,157	3,242	3,306	3,358	3,438	3,499	3,608	3,684	3,742	3,917
700	3,033	3,155	3,239	3,303	3,355	3,435	3,496	3,605	3,680	3,738	3,913
800	3,031	3,153	3,237	3,301	3,353	3,433	3,494	3,603	3,678	3,735	3,910
900	3,030	3,152	3,236	3,300	3,351	3,431	3,492	3,601	3,676	3,733	3,907
1 000	3,029	3,151	3,235	3,299	3,350	3,430	3,491	3,599	3,674	3,732	3,905
∞	3,020	3,141	3,224	3,288	3,339	3,418	3,478	3,585	3,660	3,716	3,888

Tabelle A.3 — Faktoren k für einseitig begrenzte Prognosebereiche bei einem Vertrauensniveau von 97,5 % und unbekannter Standardabweichung der Grundgesamtheit (fortgesetzt)
Table A.3 — One-sided prediction interval factors, k , at confidence level 97,5 % for unknown population standard deviation (continued)

n	m									
	1 000	2 000	5 000	10 000	20 000	50 000	100 000	200 000	500 000	1 000 000
2	103,432	109,620	117,349	122,904	128,238	134,993	139,903	144,658	150,729	155,175
3	20,788	21,974	23,462	24,534	25,567	26,877	27,831	28,755	29,937	30,804
4	12,460	13,152	14,023	14,652	15,259	16,029	16,590	17,135	17,832	18,343
5	9,664	10,191	10,856	11,337	11,801	12,391	12,821	13,239	13,774	14,166
6	8,285	8,731	9,295	9,702	10,096	10,597	10,963	11,318	11,773	12,107
7	7,465	7,863	8,365	8,729	9,081	9,529	9,856	10,174	10,582	10,881
8	6,920	7,285	7,746	8,081	8,405	8,818	9,119	9,412	9,788	10,064
9	6,530	6,872	7,304	7,618	7,921	8,309	8,592	8,867	9,219	9,479
10	6,237	6,561	6,970	7,268	7,557	7,925	8,194	8,455	8,791	9,037
11	6,008	6,317	6,710	6,995	7,271	7,624	7,882	8,133	8,455	8,691
12	5,824	6,122	6,500	6,775	7,041	7,381	7,630	7,873	8,184	8,412
13	5,673	5,961	6,327	6,593	6,851	7,181	7,423	7,658	7,960	8,182
14	5,546	5,826	6,181	6,441	6,692	7,013	7,249	7,478	7,772	7,988
15	5,438	5,711	6,058	6,311	6,556	6,870	7,100	7,324	7,611	7,822
16	5,345	5,611	5,951	6,198	6,439	6,746	6,971	7,190	7,472	7,679
17	5,264	5,525	5,857	6,100	6,336	6,637	6,858	7,074	7,350	7,554
18	5,193	5,449	5,775	6,014	6,245	6,542	6,759	6,971	7,243	7,443
19	5,129	5,381	5,702	5,937	6,165	6,457	6,671	6,879	7,147	7,344
20	5,073	5,321	5,637	5,868	6,093	6,380	6,591	6,797	7,061	7,256
25	4,862	5,094	5,391	5,609	5,821	6,093	6,292	6,486	6,737	6,921
30	4,723	4,945	5,229	5,438	5,641	5,901	6,092	6,279	6,520	6,697
35	4,625	4,839	5,114	5,315	5,512	5,764	5,949	6,130	6,363	6,535
40	4,552	4,760	5,027	5,223	5,414	5,660	5,840	6,017	6,244	6,412
45	4,495	4,699	4,960	5,151	5,338	5,578	5,755	5,928	6,151	6,315
50	4,450	4,650	4,906	5,093	5,277	5,513	5,686	5,856	6,075	6,237
60	4,383	4,576	4,824	5,006	5,184	5,413	5,582	5,747	5,960	6,117
70	4,335	4,524	4,766	4,944	5,117	5,341	5,506	5,667	5,876	6,029
80	4,299	4,484	4,722	4,896	5,067	5,286	5,448	5,607	5,811	5,962
90	4,271	4,454	4,688	4,860	5,027	5,244	5,403	5,559	5,760	5,909
100	4,249	4,429	4,660	4,830	4,996	5,209	5,366	5,520	5,719	5,866
150	4,183	4,356	4,578	4,741	4,900	5,104	5,254	5,402	5,592	5,733
200	4,150	4,320	4,537	4,696	4,851	5,051	5,197	5,341	5,527	5,664
250	4,131	4,298	4,513	4,669	4,822	5,018	5,163	5,305	5,487	5,622
300	4,118	4,284	4,496	4,651	4,803	4,997	5,140	5,280	5,460	5,594
350	4,108	4,274	4,485	4,639	4,789	4,982	5,123	5,262	5,441	5,573
400	4,101	4,266	4,476	4,629	4,778	4,970	5,111	5,249	5,427	5,558
450	4,096	4,260	4,469	4,622	4,770	4,961	5,101	5,239	5,415	5,546
500	4,092	4,255	4,464	4,616	4,764	4,954	5,094	5,230	5,406	5,536
600	4,085	4,248	4,455	4,607	4,754	4,943	5,082	5,218	5,393	5,522
700	4,081	4,243	4,450	4,601	4,747	4,936	5,074	5,209	5,383	5,512
800	4,077	4,239	4,445	4,596	4,742	4,930	5,068	5,202	5,376	5,504
900	4,075	4,236	4,442	4,592	4,738	4,925	5,063	5,197	5,370	5,498
1 000	4,072	4,234	4,439	4,589	4,735	4,922	5,059	5,193	5,366	5,493
∞	4,053	4,212	4,415	4,563	4,706	4,890	5,024	5,156	5,325	5,450

ANMERKUNG Diese Tabelle enthält Faktoren k mit der Eigenschaft, dass mit einem Vertrauensniveau von 97,5 % keiner der nächsten m Beobachtungswerte aus einer normalverteilten Grundgesamtheit außerhalb des Bereichs $(-\infty, \bar{x} + ks)$ liegen wird, wobei $\bar{x}$ und s aus einer Zufallsstichprobe vom Umfang n aus derselben Grundgesamtheit ermittelt wurden. Analoges gilt für den Bereich $(\bar{x} - ks, \infty)$.

NOTE This table provides factors k such that one may be at least 97,5 % confident that none of the next m observations from a normally distributed population will lie outside the range $(-\infty, \bar{x} + ks)$, where $\bar{x}$ and s are derived from a random sample of size n from the same population. Similarly for the range $(\bar{x} - ks, \infty)$.