

DIN ISO 3534-1

ICS 01.040.03; 03.120.30

Ersatzvermerk
siehe unten

**Statistik –
Begriffe und Formelzeichen –
Teil 1: Wahrscheinlichkeit und allgemeine statistische Begriffe
(ISO 3534-1:2006);
Text Deutsch und Englisch**

Statistics –
Vocabulary and symbols –
Part 1: General statistical terms and terms used in probability (ISO 3534-1:2006);
Text in German and English

Statistique –
Vocabulaire et symboles –
Partie 1: Termes statistiques généraux et termes utilisés en calcul des probabilités
(ISO 3534-1:2006);
Texte en allemand et anglais

Ersatzvermerk

Teilweiser Ersatz für DIN 55350-12:1989-03, DIN 55350-13:1987-07, DIN 55350-14:1985-12,
DIN 55350-21:1982-05, DIN 55350-22:1987-02, DIN 55350-23:1983-04, DIN 55350-24:1982-11,
DIN 55350-31:1985-12 und DIN 55350-33:1993-09

Gesamtumfang 96 Seiten

Normenausschuss Qualitätsmanagement, Statistik und Zertifizierungsgrundlagen (NQSZ) im DIN
Normenausschuss Technische Grundlagen (NATG) im DIN

Inhalt

Contents

	Seite		Page
Nationales Vorwort	3		
Einleitung.....	4	Introduction.....	4
Anwendungsbereich.....	6	Scope	6
1 Allgemeine Begriffe der Statistik	6	1 General statistical terms.....	6
2 Begriffe zur Wahrscheinlichkeit	37	2 Terms used in probability.....	37
Anhang A (informativ) Formelzeichen.....	74	Annex A (informative) Symbols.....	74
Anhang B (informativ) Statistische Begriffsdiagramme	76	Annex B (informative) Statistical concept diagrams.....	76
Anhang C (informativ) Begriffsdiagramme zur Wahrscheinlichkeit.....	82	Annex C (informative) Probability concept diagrams.....	82
Anhang D (informativ) Liste von Formelzeichen und Abkürzungen	86	Annex D (informative) Methodology used in the development of the vocabulary	86
Literaturhinweise	92	Bibliography.....	92
Stichwortverzeichnis	93	Alphabetical index.....	95

Nationales Vorwort

Dieses Dokument enthält die deutsche Übersetzung der Internationalen Norm ISO 3534-1:2006, Second edition 2006-10-15, Corrected version 2007-09-15, die vom Technischen Komitee ISO/TC 69, *Applications of statistical methods*, Unterkomitee 1, *Terminology and symbols*, erarbeitet wurde. Der zuständige nationale Normenausschuss ist der NA 147, *Qualitätsmanagement, Statistik und Zertifizierungsgrundlagen (NQSZ)*, Arbeitsausschuss *Angewandte Statistik*.

ISO 3534 umfasst unter dem Haupttitel *Statistics — Vocabulary and symbols* die folgenden Teile:

- *Part 1: General statistical terms and terms used in probability*
- *Part 2: Applied statistics*
- *Part 3: Design of experiments.*

Die im Zusammenhang mit der vorliegenden Norm relevanten Normen der Reihe DIN 55350 befinden sich zum Zeitpunkt der Veröffentlichung der vorliegenden Norm in Überarbeitung. Während der Überarbeitung der Normen der Reihe DIN 55350 sind noch Redundanzen möglich.

Änderungen

Gegenüber

DIN 55350-12:1989-03, DIN 55350-13:1987-07, DIN 55350-14:1985-12, DIN 55350-21:1982-05, DIN 55350-22:1987-02, DIN 55350-23:1983-04, DIN 55350-24:1982-11, DIN 55350-31:1985-12 und DIN 55350-33:1993-09 wurden folgende Änderungen vorgenommen:

- a) alle Begriffe wurden neu definiert.
- b) zahlreiche Begriffe sind neu hinzugefügt worden.

Frühere Ausgaben

DIN 55350-12: 1978-07, 1988-09, 1989-03
 DIN 55350-13: 1981-01, 1987-07
 DIN 55350-14: 1985-12
 DIN 55350-21: 1982-05
 DIN 55350-22: 1982-05, 1987-02
 DIN 55350-23: 1982-11, 1983-04
 DIN 55350-24: 1982-11
 DIN 55350-31: 1985-12
 DIN 55350-33: 1993-09

Statistik
Begriffe und Formelzeichen
Teil 1: Wahrscheinlichkeit und allge-
meine statistische Begriffe

Statistics
Vocabulary and symbols
Part 1: General statistical terms and
terms used in probability

Einleitung

Die aktuellen Fassungen von ISO 3534-1 und ISO 3534-2 sollen miteinander vereinbar sein. Sie haben das gemeinsame Ziel, ihr jeweiliges mathematisches Niveau auf das für stimmige, richtige und präzise Definitionen notwendige Mindestniveau zu beschränken. Teil 1 über Begriffe zur Wahrscheinlichkeit und Statistik ist grundlegend; daher ist sein mathematisches Niveau notwendigerweise etwas anspruchsvoller. In dem Bewusstsein, dass die Anwender von ISO 3534-2 oder anderer Normen des TC 69 über Angewandte Statistik diesen Teil von ISO 3534 gelegentlich für die Definition gewisser Begriffe zu Rate ziehen werden, werden etliche der Begriffe in den Anmerkungen in einer weniger technischen Art und Weise dargestellt und mit Beispielen veranschaulicht. Obwohl diese informellen Beschreibungen für formale Definitionen kein Ersatz sind, können sie für den Laien funktionierende Definitionen von Begriffen sein und so den Belangen vieler Anwender dieser Terminologie-Normen dienen. Um dem anwendungsorientierten Nutzer, der normalerweise mit solchen Normen wie beispielsweise ISO 3534-2 oder ISO 5725 zu tun hat, weiter entgegenzukommen, werden Anmerkungen und Beispiele angeboten, um diesen Teil von ISO 3534 leichter zugänglich zu machen.

Ein klar umrissener und einigermaßen vollständiger Satz von Begriffen zur Wahrscheinlichkeit und Statistik ist für die Entwicklung von Statistik-Normen und deren erfolgreiche Anwendung unverzichtbar. Die hier angebotenen Definitionen müssen hinreichend exakt und mathematisch durchdacht sein, damit sie Entwicklern von Statistik-Normen ermöglichen, Unklarheiten zu vermeiden. Genauere Erläuterungen der Begriffe, ihrer Zusammenhänge und ihrer Anwendungsgebiete können natürlich in Fachbüchern, die in Wahrscheinlichkeit und Statistik einführen, gefunden werden.

Introduction

The current versions of ISO 3534-1 and ISO 3534-2 are intended to be compatible. They share the common goal of restricting their respective mathematical levels to the minimum levels necessary to attain coherent, correct and concise definitions. Part 1 on terms used in probability and statistics is fundamental, so by necessity is presented at a somewhat sophisticated mathematical level. Recognizing that users of ISO 3534-2 or other TC 69 standards on applied statistics may occasionally consult this part of ISO 3534 for the definition of certain terms, several of the terms are described in a less technical manner within the notes and are illustrated with examples. Although these informal descriptions are not a substitute for formal definitions, they may provide a working, layman definition of concepts, thus serving the needs of multiple users of these terminology standards. To accommodate further the applied user who normally would be involved with standards such as ISO 3534-2 or ISO 5725, for example, notes and examples are offered to make this part of ISO 3534 more accessible.

A well-defined and reasonably complete set of probability and statistical terms is essential to the development of and effective use of statistical standards. The definitions provided here must be sufficiently accurate and mathematically sophisticated to enable statistical standards developers to avoid ambiguities. Of course, more detailed explanations of concepts, their contexts and their realms of application can be found in introductory probability and statistics textbooks.

In einem informativen Anhang werden Begriffsdiagramme für jede Gruppe von Begriffen bereitgestellt: 1) Allgemeine Begriffe der Statistik (in Anhang B) und 2) Begriffe zur Wahrscheinlichkeit (in Anhang C). Es gibt sechs Begriffsdiagramme für allgemeine Begriffe der Statistik und vier für Begriffe zur Wahrscheinlichkeit. Manche Begriffe kommen in mehreren Diagrammen vor, um den Zusammenhang herzustellen zwischen einem Satz von Begriffen und einem anderen. Anhang D bietet eine kurze Einführung in Begriffsdiagramme und deren Interpretation.

Die Begriffsdiagramme waren bei der Vorbereitung dieser Revision hilfreich, da sie die gegenseitigen Beziehungen der verschiedenen Begriffe zu beschreiben helfen. Sie sind sicher auch für die Übersetzung der Norm in andere Sprachen nützlich.

Allgemein sei angemerkt, dass sich die Definitionen in dieser Norm auf den eindimensionalen (univariaten) Fall beziehen, solange nichts anderes angegeben wird. Diese Festlegung wird hier getroffen, um die sonst notwendige wiederholte Erwähnung, dass es sich um den eindimensionalen Anwendungsbereich handelt, zu vermeiden.

Concept diagrams are provided in an informative annex for each group of terms: 1) general statistical terms (in Annex B) and 2) terms used in probability (in Annex C). There are six concept diagrams for general statistical terms and four concept diagrams for terms related to probability. Some terms appear in multiple diagrams to provide a link from one set of concepts to another. Annex D provides a brief introduction to Concept Diagrams and their interpretation.

These diagrams were instrumental in constructing this revision as they assist in delineating the interrelationships of the various terms. These diagrams are also likely to be useful in translating the standard into other languages.

As a general comment with respect to much of the standard, unless otherwise indicated, the definitions relate to the one-dimensional (univariate) case. This provision is admitted here to eliminate the need to mention repetitively the one-dimensional scope for most of the definitions.

Anwendungsbereich

Dieser Teil von ISO 3534 definiert allgemeine Begriffe der Statistik sowie Begriffe zur Wahrscheinlichkeit, die bei der Erarbeitung anderer Internationaler Normen verwendet werden dürfen. Außerdem legt er Formelzeichen für eine begrenzte Anzahl dieser Begriffe fest.

Die Begriffe sind unterteilt in

- a) allgemeine statistische Begriffe (Abschnitt 1), und
- b) Begriffe zur Wahrscheinlichkeit (Abschnitt 2).

Anhang A enthält eine Liste von Formelzeichen und Abkürzungen, deren Verwendung für diesen Teil von ISO 3534 empfohlen wird.

Die Einträge in diesen Teil von ISO 3534 sind entsprechend der in den Anhängen B und C enthaltenen Begriffsdiagramme geordnet.

1 Allgemeine Begriffe der Statistik

1.1

Grundgesamtheit

Gesamtheit der betrachteten Einheiten/Entitäten

ANMERKUNG 1 Eine Grundgesamtheit kann real und endlich, real und unendlich oder vollständig theoretisch sein. Manchmal wird die Benennung „endliche Grundgesamtheit“ verwendet, insbesondere bei Stichprobenerhebungen. Ebenso wird im Zusammenhang mit der Stichprobenentnahme aus einem Kontinuum die Benennung „unendliche Grundgesamtheit“ verwendet. In Abschnitt 2 wird die Grundgesamtheit in wahrscheinlichkeitstheoretischem Kontext als **Ereignisraum** (2.1) gesehen.

ANMERKUNG 2 Eine theoretische Grundgesamtheit erlaubt, sich die Beschaffenheit weiterer Daten unter diversen Annahmen vorzustellen. Daher sind theoretische Grundgesamtheiten nützlich bei der Planung statistischer Untersuchungen, insbesondere bei der Bestimmung eines geeigneten Stichprobenumfangs. Eine theoretische Grundgesamtheit kann der Zahl nach endlich oder unendlich sein. Sie bietet in der schließenden Statistik ein besonders nützliches Konzept bei der Beurteilung der Aussagekraft einer statistischen Untersuchung.

ANMERKUNG 3 Der Kontext einer Untersuchung kann die Art der Grundgesamtheit vorschreiben. Wenn beispielsweise drei Ortschaften für eine bevölkerungsstatistische oder Gesundheitsstudie ausgewählt sind, dann besteht die Grundgesamtheit aus den Einwohnern dieser speziellen drei Ortschaften. Wenn die drei Ortschaften dagegen aus allen Ortschaften einer bestimmten Region zufällig ausgewählt wurden, dann würde die Grundgesamtheit aus allen Einwohnern der Region bestehen.

Scope

This part of ISO 3534 defines general statistical terms and terms used in probability which may be used in the drafting of other International Standards. In addition, it defines symbols for a limited number of these terms.

The terms are classified as:

- a) general statistical terms (Clause 1);
- b) terms used in probability (Clause 2).

Annex A gives a list of symbols and abbreviations recommended to be used for this part of ISO 3534.

The entries in this part of ISO 3534 are arranged in association with concept diagrams provided as Annexes B and C.

1 General statistical terms

1.1

population

totality of items under consideration

NOTE 1 A population may be real and finite, real and infinite or completely hypothetical. Sometimes the term “finite population” is used, especially in survey sampling. Likewise the term “infinite population” is used in the context of sampling from a continuum. In Clause 2, population will be viewed in a probabilistic context as the **sample space** (2.1).

NOTE 2 A hypothetical population allows one to imagine the nature of further data under various assumptions. Hence, hypothetical populations are useful at the design stage of statistical investigations, particularly for determining appropriate sample sizes. A hypothetical population could be finite or infinite in number. It is a particularly useful concept in inferential statistics to assist in evaluating the strength of evidence in a statistical investigation.

NOTE 3 The context of an investigation can dictate the nature of the population. For example, if three villages are selected for a demographic or health study, then the population consists of the residents of these particular villages. Alternatively, if the three villages were selected at random from among all of the villages in a specific region, then the population would consist of all residents of the region.

1.2

Auswahleinheit

einer der einzelnen Teile, in die eine **Grundgesamtheit** (1.1) gegliedert ist

ANMERKUNG Je nach Sachverhalt darf der kleinste interessierende Teil ein Individuum, ein Haushalt, ein Schulbezirk, eine Verwaltungseinheit und so weiter sein.

1.3

Probe; Stichprobe

Teilmenge einer **Grundgesamtheit** (1.1), die aus einer oder mehreren **Auswahleinheiten** (1.2) besteht

ANMERKUNG 1 Die Auswahleinheiten können in Abhängigkeit von der interessierenden Grundgesamtheit Einheiten, numerische Werte oder auch abstrakte Entitäten sein.

ANMERKUNG 2 Die Definition von Stichprobe in ISO 3534-2 enthält ein Beispiel einer Stichprobenplanung, die beim Ziehen einer Zufallsstichprobe aus einer endlichen Grundgesamtheit wesentlich ist.

1.4

beobachteter Wert

erhaltener Wert einer Eigenschaft, die mit einem Element der **Stichprobe** (1.3) verbunden ist

ANMERKUNG 1 Gebräuchliche andere Benennungen sind „Realisierung“ und „Wert“.^{N1)}

ANMERKUNG 2 Die Definition legt die Entstehung oder wie dieser Wert erhalten wurde nicht fest. Der Wert kann eine einzelne Realisierung einer **Zufallsvariablen** (2.10) darstellen, muss es aber nicht. Er kann einer von mehreren solcher Werte sein, die im Anschluss einer statistischen Auswertung unterzogen werden. Obwohl korrekte statistische Auswertungen einiger statistischer Untermauerungen bedürfen, gibt es nichts, was die Berechnung von Zusammenfassungen oder graphische Darstellungen beobachteter Werte ausschließen würde. Nur bei weiterführenden Fragestellungen, wie der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Satz von Realisierungen zu beobachten, wird der statistische Apparat sowohl relevant als auch unerlässlich sein. Das Vorstadium einer Auswertung von beobachteten Werten wird üblicherweise als Datenanalyse bezeichnet.

1.5

beschreibende Statistik

graphische, numerische oder andere zusammenfassende Darstellung von **beobachteten Werten** (1.4)

BEISPIEL 1 Zu numerischen Zusammenfassungen gehören **Mittelwert** (1.15), **Stichprobenspannweite** (1.10), **Stichprobenstandardabweichung** (1.17) und so weiter.

1.2

sampling unit

one of the individual parts into which a **population** (1.1) is divided

NOTE Depending on the circumstances the smallest part of interest may be an individual, a household, a school district, an administrative unit and so forth.

1.3

sample

subset of a **population** (1.1) made up of one or more **sampling units** (1.2)

NOTE 1 The sampling units could be items, numerical values or even abstract entities depending on the population of interest.

NOTE 2 The definition of sample in ISO 3534-2 includes an example of sampling frame which is essential in drawing a random sample from a finite population.

1.4

observed value

obtained value of a property associated with one member of a **sample** (1.3)

NOTE 1 Common synonyms are “realization” and “datum”. The plural of datum is data.

NOTE 2 The definition does not specify the genesis or how this value has been obtained. The value may represent one realization of a **random variable** (2.10), but not exclusively so. It may be one of several such values that will be subsequently subjected to statistical analysis. Although proper inferences require some statistical underpinnings, there is nothing to preclude computing summaries or graphical depictions of observed values. Only when attendant issues such as determining the probability of observing a specific set of realizations does the statistical machinery become both relevant and essential. The preliminary stage of an analysis of observed values is commonly referred to as data analysis.

1.5

descriptive statistics

graphical, numerical or other summary depiction of **observed values** (1.4)

EXAMPLE 1 Numerical summaries include **average** (1.15), **sample range** (1.10), **sample standard deviation** (1.17), and so forth.

N1) Nationale Fußnote: Der Satz „The plural of datum is data.“ betrifft nur die englische Sprache und ist deshalb in der deutschen Übersetzung nicht berücksichtigt worden.

BEISPIEL 2 Zu graphischen Zusammenfassungen gehören Boxplots, Diagramme, Q-Q-Plots, Normal-Quantil-Plots, Streudiagramme, multiple Streudiagramme und Histogramme.

1.6 Zufallsstichprobe

Stichprobe (1.3), die per Zufallsauswahl ausgewählt worden ist

ANMERKUNG 1 Diese Definition ist weniger einschränkend als die in ISO 3534-2 gegebene, um unendliche Grundgesamtheiten zuzulassen.

ANMERKUNG 2 Wenn die Stichprobe aus n Auswahl-einheiten aus einem endlichen **Ereignisraum** (2.1) ausgewählt wird, wird jede der möglichen Kombinationen von n Auswahl-einheiten eine bestimmte **Wahrscheinlichkeit** (2.5) haben, gezogen zu werden. Für Stichprobenanweisungen kann die einzelne Wahrscheinlichkeit für jede mögliche Kombination vorab berechnet werden.

ANMERKUNG 3 Für die Probenahme aus einem endlichen Ereignisraum kann eine Zufallsstichprobe nach verschiedenen Stichprobenanweisungen ausgewählt werden, wie zum Beispiel geschichtete Stichprobe, systematische Zufallsstichprobe, Klumpenauswahl, Stichprobenauswahl mit zur Größe einer Hilfsvariablen proportionalen Wahrscheinlichkeit, gezogen zu werden, und viele andere Möglichkeiten.

ANMERKUNG 4 Diese Definition bezieht sich im Allgemeinen auf tatsächlich **beobachtete Werte** (1.4). Diese beobachteten Werte werden als Realisierungen von **Zufallsvariablen** (2.10) angesehen, wobei jeder beobachtete Wert einer Zufallsvariablen entspricht. Wenn **Schätzer** (1.12), Prüfgrößen für **statistische Tests** (1.48) oder **Vertrauensbereiche** (1.28) aus einer Zufallsstichprobe hergeleitet werden, dann nimmt die Definition mehr Bezug auf die Zufallsvariablen, die sich aus abstrakten Entitäten in der Stichprobe ergeben, als auf die tatsächlich beobachteten Werte dieser Zufallsvariablen.

ANMERKUNG 5 Zufallsstichproben aus unendlichen Grundgesamtheiten werden häufig durch wiederholtes Ziehen aus dem Ereignisraum erzeugt und führen zu einer Stichprobe, die aus voneinander unabhängigen, identisch verteilten Zufallsvariablen besteht, wenn die in Anmerkung 4 erwähnte Interpretation dieser Definition verwendet wird.

1.7 einfache Zufallsstichprobe

<endliche Grundgesamtheit> **Zufallsstichprobe** (1.6) derart, dass jede Teilmenge gegebenen Umfangs die gleiche Wahrscheinlichkeit hat, gezogen zu werden

ANMERKUNG Diese Definition ist mit der Definition in ISO 3534-2 in Einklang, obwohl die Formulierung etwas anders ist.

EXAMPLE 2 Examples of graphical summaries include boxplots, diagrams, Q-Q plots, normal quantile plots, scatterplots, multiple scatterplots and histograms.

1.6 random sample

sample (1.3) which has been selected by a method of random selection

NOTE 1 This definition is less restrictive than that given in ISO 3534-2 to allow for infinite populations.

NOTE 2 When the sample of n sampling units is selected from a finite **sample space** (2.1), each of the possible combinations of n sampling units will have a particular **probability** (2.5) of being taken. For survey sampling plans, the particular probability for each possible combination may be calculated in advance.

NOTE 3 For survey sampling from a finite sample space, a random sample can be selected by different sampling plans such as stratified random sampling, systematic random sampling, cluster sampling, sampling with probability of sampling proportional to the size of an auxiliary variable and many other possibilities.

NOTE 4 The definition generally refers to actual **observed values** (1.4). These observed values are considered as realizations of **random variables** (2.10), where each observed value corresponds to one random variable. When **estimators** (1.12), test statistics for **statistical tests** (1.48) or **confidence intervals** (1.28) are derived from a random sample, the definition accommodates reference to the random variables arising from abstract entities in the sample rather than the actual observed values of these random variables.

NOTE 5 Random samples from infinite populations are often generated by repeated draws from the sample space, leading to a sample consisting of independent, identically distributed random variables using the interpretation of this definition mentioned in Note 4.

1.7 simple random sample

<finite population> **random sample** (1.6) such that each subset of a given size has the same probability of selection

NOTE This definition is in harmony with the definition given in ISO 3534-2, although the wording here is slightly different.

1.8

Kenngroße^{N2)}

vollständig bestimmte Funktion aus
Zufallsvariablen (2.10)

ANMERKUNG 1 Eine Kenngroße ist eine Funktion aus Zufallsvariablen in einer **Zufallsstichprobe** (1.6) im Sinne von Anmerkung 4 zu 1.6.

ANMERKUNG 2 Bezug nehmend auf Anmerkung 1, wenn $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ eine Zufallsstichprobe aus einer **Normalverteilung** (2.50) mit unbekanntem **Erwartungswert** (2.35) μ und unbekannter **Standardabweichung** (2.37) σ ist, dann ist der Ausdruck $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$ eine Kenngroße, der **Stichprobenmittelwert** (1.15), wohingegen der Ausdruck $[(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n] - \mu$ keine Kenngroße ist, da er den unbekannten Wert des **Parameters** (2.9) μ enthält.

ANMERKUNG 3 Die hier angegebene Definition ist eine technische, in Übereinstimmung mit der Betrachtung in der mathematischen Statistik. Im Rahmen von Anwendungen kann sich der Plural des englischen „statistic“, nämlich „statistics“, auf das technische Fach beziehen, das die in den in Internationalen Normen des ISO/TC 69 beschriebenen Auswertungsaktivitäten zum Gegenstand hat.^{N3)}

1.9

Ranggröße

durch ihre Rangordnung in einer nicht absteigenden Anordnung von **Zufallsvariablen** (2.10) festgelegte **Kenngroße** (1.8)

BEISPIEL Seien 9, 13, 7, 6, 13, 7, 19, 6, 10 und 7 die beobachteten Werte einer Stichprobe. Die beobachteten Werte der Ranggrößen sind 6, 6, 7, 7, 7, 9, 10, 13, 13, 19. Diese Werte sind die Realisierungen von $X_{(1)}$ bis $X_{(10)}$.

ANMERKUNG 1 Die **beobachteten Werte** (1.4) einer **Zufallsstichprobe** (1.6) seien $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ und nach Sortierung in nicht absteigender Anordnung mit $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(k)} \leq \dots \leq x_{(n)}$ bezeichnet. Dann ist $(x_{(1)}, \dots, x_{(k)}, \dots, x_{(n)})$ der beobachtete Wert der Ranggröße $(X_{(1)}, \dots, X_{(k)}, \dots, X_{(n)})$ und $x_{(k)}$ ist der beobachtete Wert der k -ten Ranggröße.

ANMERKUNG 2 Praxisnah ausgedrückt, läuft die Gewinnung der Ranggrößen für einen Datensatz darauf hinaus, die Daten zu sortieren, wie in Anmerkung 1 formal beschrieben. Die sortierte Form des Datensatzes führt dann selbst zur Gewinnung nützlicher zusammenfassender Kenngroßen, wie in den beiden nächsten Definitionen festgelegt.

1.8

statistic

completely specified function of **random variables** (2.10)

NOTE 1 A statistic is a function of random variables in a **random sample** (1.6) in the sense given in Note 4 of 1.6.

NOTE 2 Referring to Note 1, if $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ is a random sample from a **normal distribution** (2.50) with unknown **mean** (2.35) μ and unknown **standard deviation** (2.37) σ , then the expression $(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$ is a statistic, the **sample mean** (1.15), whereas $[(X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n] - \mu$ is not a statistic as it involves the unknown value of the **parameter** (2.9) μ .

NOTE 3 The definition given here is a technical one, corresponding to the treatment found in mathematical statistics. In application settings, the plural of statistic, namely statistics, can refer to the technical discipline involving the analysis activities described in ISO/TC 69 International Standards.

1.9

order statistic

statistic (1.8) determined by its ranking in a non-decreasing arrangement of **random variables** (2.10)

EXAMPLE Let the observed values of a sample be 9, 13, 7, 6, 13, 7, 19, 6, 10, and 7. The observed values of the order statistics are 6, 6, 7, 7, 7, 9, 10, 13, 13, 19. These values constitute realizations of $X_{(1)}$ through $X_{(10)}$.

NOTE 1 Let the **observed values** (1.4) of a **random sample** (1.6) be $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ and once sorted in nondecreasing order designated as $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(k)} \leq \dots \leq x_{(n)}$. Then $(x_{(1)}, \dots, x_{(k)}, \dots, x_{(n)})$ is the observed value of the order statistic $(X_{(1)}, \dots, X_{(k)}, \dots, X_{(n)})$ and $x_{(k)}$ is the observed value of the k^{th} order statistic.

NOTE 2 In practical terms, obtaining the order statistics for a data set amounts to sorting the data as formally described in Note 1. The sorted form of the data set then lends itself to obtaining useful summary statistics as given in the next few definitions.

N2) Nationale Fußnote: Kenngroßen charakterisieren Eigenschaften einer Häufigkeitsverteilung.

N3) Nationale Fußnote: Eine Übersetzung des englischen „statistics“ ist Statistik (im Sinne von Wissenschaft).

ANMERKUNG 3 Ranggrößen umfassen Stichprobenwerte, die durch ihre Position nach erfolgter Reihung in nicht absteigender Anordnung festgelegt sind. Wie in dem Beispiel ist es einfacher, das Sortieren von Stichprobenwerten (Realisierung von Zufallsvariablen) zu verstehen, als das Sortieren nicht beobachteter Zufallsvariablen. Dennoch kann man sich die Zufallsvariablen einer **Zufallsstichprobe** (1.6) in einer nicht absteigenden Reihenfolge angeordnet vorstellen. Beispielsweise kann das Maximum von n Zufallsvariablen untersucht werden, bevor deren realisierte Werte vorliegen.

ANMERKUNG 4 Eine einzelne Ranggröße ist eine Kenngröße, die eine vollständig festgelegte Funktion einer Zufallsvariablen ist. Diese Funktion ist schlicht die identische Abbildung der vorherigen Festlegung der Position oder des Ranges in dem sortierten Satz von Zufallsvariablen.

ANMERKUNG 5 Verbundene Werte stellen ein mögliches Problem dar, besonders für diskrete Zufallsvariablen und für Realisierungen, die mit niedriger Auflösung berichtet werden. Die Worte „nicht absteigend“ werden anstelle von „aufsteigend“ als geschickte Herangehensweise an das Problem verwendet. Es sollte betont werden, dass verbundene Werte beibehalten und nicht zu einem einzigen verbundenen Wert zusammengefasst werden. Im obigen Beispiel sind die zwei Realisierungen 6 und 6 verbundene Werte.

ANMERKUNG 6 Rangreihung erfolgt bezüglich der tatsächlichen Werte und nicht bezüglich der absoluten Werte der Zufallsvariablen.

ANMERKUNG 7 Der vollständige Satz der Ranggrößen besteht aus einer n -dimensionalen Zufallsvariablen, wobei n die Anzahl der Beobachtungen in der Stichprobe ist.

ANMERKUNG 8 Die Komponenten der Ranggröße werden auch als Ranggrößen bezeichnet, aber mit einem kennzeichnenden Adjektiv, das die Position in der Reihe der geordneten Werte der Stichprobe angibt.

ANMERKUNG 9 Das Minimum, das Maximum und der **Stichprobenmedian** (1.13) für ungeradzahlige Stichprobenumfänge sind spezielle Fälle von Ranggrößen. Für den Stichprobenumfang 11 zum Beispiel ist $X_{(1)}$ das Minimum, $X_{(11)}$ das Maximum, und $X_{(6)}$ ist der Stichprobenmedian.

1.10 Stichprobenspannweite
Differenz aus größter und kleinster **Ranggröße** (1.9)

BEISPIEL Im Beispiel von 1.9 ist die beobachtete Stichprobenspannweite $19 - 6 = 13$.

ANMERKUNG In der statistischen Prozesslenkung wird die Stichprobenspannweite oft verwendet, um die Streuung des Prozesses über der Zeit zu überwachen, besonders wenn die Stichprobenumfänge relativ gering sind.

NOTE 3 Order statistics involve sample values identified by their position after ranking in non-decreasing order. As in the example, it is easier to understand the sorting of sample values (realizations of random variables) rather than the sorting of unobserved random variables. Nevertheless, one can conceive of random variables from a **random sample** (1.6) being arranged in a nondecreasing order. For example, the maximum of n random variables can be studied in advance of its realized value.

NOTE 4 An individual order statistic is a statistic which is a completely specified function of a random variable. This function is simply the identity function with the further identification of position or rank in the sorted set of random variables.

NOTE 5 Tied values pose a potential problem especially for discrete random variables and for realizations that are reported to low resolution. The word “non-decreasing” is used rather than “ascending” as a subtle approach to the problem. It should be emphasized that tied values are retained and not collapsed into the single tied value. In the example above, the two realizations of 6 and 6 are tied values.

NOTE 6 Ordering takes place with reference to the real line and not to the absolute values of the random variables.

NOTE 7 The complete set of order statistics consist of an n dimensional random variable, where n is the number of observations in the sample.

NOTE 8 The components of the order statistic are also referred to as order statistics but with a qualifier that gives the number in the sequence of ordered values of the sample.

NOTE 9 The minimum, the maximum, and for odd-numbered sample sizes, the **sample median** (1.13), are special cases of order statistics. For example, for sample size 11, $X_{(1)}$ is the minimum, $X_{(11)}$ is the maximum and $X_{(6)}$ is the sample median.

1.10 sample range
largest **order statistic** (1.9) minus the smallest order statistic

EXAMPLE Continuing with the example from 1.9, the observed sample range is $19 - 6 = 13$.

NOTE In statistical process control, the sample range is often used to monitor the dispersion over time of a process, particularly when the sample sizes are relatively small.

1.11

Spannweitenmitte

Mittelwert (1.15) aus kleinster und größter **Ranggröße** (1.9)

BEISPIEL Die beobachtete Spannweitenmitte für die Beispielwerte in 1.9 ist $(6 + 19)/2 = 12,5$.

ANMERKUNG Die Spannweitenmitte liefert eine schnelle und einfache Bewertung der Mitte kleiner Datensätze.

1.12

Schätzer
 $\hat{\theta}$

Kenngroße (1.8), die zur **Schätzung** (1.36) eines Parameters θ verwendet wird

ANMERKUNG 1 Ein Schätzer für die Schätzung des **Erwartungswertes** (2.35) der Grundgesamtheit, der mit μ bezeichnet sein könnte, könnte der **Stichprobenmittelwert** (1.15) sein. Für eine **Verteilung** (2.11) wie die **Normalverteilung** (2.50) ist der „natürliche“ Schätzer des Erwartungswertes μ der Grundgesamtheit der Stichprobenmittelwert.

ANMERKUNG 2 Ein geeigneter Schätzer zur Schätzung der Eigenschaft einer Grundgesamtheit [beispielsweise des **Modalwertes der Wahrscheinlichkeitsdichte** (2.27) einer **eindimensionalen Verteilung** (2.16)] könnte eine Funktion des Schätzers für den Wert des Parameters (der Schätzer für die Werte der Parameter) einer Verteilung sein oder könnte eine komplizierte Funktion einer **Zufallsstichprobe** (1.6) sein.

ANMERKUNG 3 Der Begriff „Schätzer“ wird hier in einem weiteren Sinne verwendet. Er umfasst den Punktschätzer für den Wert eines Parameters ebenso wie den Bereichsschätzer, der unter Umständen zur Vorhersage verwendet wird (manchmal als Prädiktor bezeichnet). Schätzer kann auch Funktionen wie Kernschätzer und andere Kenngroßen für besondere Zwecke umfassen. Für weitere Diskussion siehe Anmerkungen zu 1.36.

1.13

Stichprobenmedian

$[(n+1)/2]$ -te **Ranggröße** (1.9), wenn der **Stichprobenumfang** (siehe ISO 3534-2:2006, 1.2.26) n ungeradzahlig ist; Summe aus der $(n/2)$ -ten und der $[(n/2) + 1]$ -ten Ranggröße, geteilt durch 2, wenn der Stichprobenumfang n geradzahlig ist

BEISPIEL Im Beispiel von 1.9 ist der Wert 8 eine Realisierung des Stichprobenmedian. In diesem Fall (geradzahliges Stichprobenumfang von 10) waren der fünfte und der sechste Wert 7 und 9, deren Mittelwert 8 ist. In der Praxis würde dies berichtet als „Stichprobenmedian ist 8“, obwohl, streng genommen, der Stichprobenmedian als Zufallsvariable definiert ist.

1.11

mid-range

average (1.15) of smallest and largest **order statistics** (1.9)

EXAMPLE The observed mid-range for the example values in 1.9 is $(6+19)/2 = 12,5$.

NOTE The mid-range provides a quick and simple assessment of the middle of small data sets.

1.12

estimator
 $\hat{\theta}$

statistic (1.8) used in **estimation** (1.36) of the parameter θ

NOTE 1 An estimator could be the **sample mean** (1.15) intended to estimate the population **mean** (2.35), which could be denoted by μ . For a **distribution** (2.11) such as the **normal distribution** (2.50), the “natural” estimator of the population mean μ is the sample mean.

NOTE 2 For estimating a population property [e.g. the **mode** (2.27) for a **univariate distribution** (2.16)], an appropriate estimator could be a function of the estimator(s) of the parameter(s) of a distribution or could be a complex function of a **random sample** (1.6).

NOTE 3 The term “estimator” is used here in a broad sense. It includes the point estimator for a parameter, as well as the interval estimator which is possibly used for prediction (sometimes referred to as a predictor). Estimator also can include functions such as kernel estimators and other special purpose statistics. Additional discussion is provided in the notes to 1.36.

1.13

sample median

$[(n+1)/2]$ th **order statistic** (1.9), if the **sample size** (see ISO 3534-2:2006, 1.2.26) n is odd; sum of the $(n/2)$ th and $[(n/2) + 1]$ th order statistics divided by 2, if the sample size n is even

EXAMPLE Continuing with the example of 1.9, the value of 8 is a realization of the sample median. In this case (even sample size of 10), the 5th and 6th values were 7 and 9, whose average equals 8. In practice, this would be reported as “the sample median is 8”, although strictly speaking, the sample median is defined as a random variable.

ANMERKUNG 1 Für eine **Zufallsstichprobe** (1.6) mit dem Stichprobenumfang n , deren **Zufallsvariablen** (2.10) in nicht absteigender Reihenfolge von 1 bis n angeordnet sind, ist der Stichprobenmedian die $(n+1)/2$ -te Zufallsvariable, wenn der Stichprobenumfang ungeradzahlig ist. Wenn der Stichprobenumfang n geradzahlig ist, dann ist der Stichprobenmedian der Mittelwert aus der $(n/2)$ -ten und der $(n+1)/2$ -ten Zufallsvariablen.

ANMERKUNG 2 Konzeptionell kann es unmöglich erscheinen, eine Rangreihe von Zufallsvariablen, die noch nicht beobachtet worden sind, durchzuführen. Dennoch kann die Struktur zum Verständnis von Ranggrößen aufgebaut werden, so dass die Analyse nach der Beobachtung weitergehen kann. In der Praxis erhält man beobachtete Werte und durch Sortieren der Werte die Realisierungen der Ranggrößen. Diese Realisierungen können dann aus der Struktur der Ranggrößen einer Zufallsstichprobe interpretiert werden.

ANMERKUNG 3 Der Stichprobenmedian liefert einen Schätzer für die Mitte einer Verteilung, mit der Hälfte der Stichprobe auf jeder seiner Seiten.

ANMERKUNG 4 In der Praxis liefert der Stichprobenmedian einen brauchbaren Schätzer, der gegenüber wirklich extremen Werten in einem Datensatz unempfindlich ist. Beispielsweise werden in der Mitte liegende Einkommen und in der Mitte liegende Immobilienpreise oft als Übersichtswerte genannt.

1.14 Stichprobenmoment der Ordnung k

$E(X^k)$

Summe der k -ten Potenz von **Zufallsvariablen** (2.10) in einer **Zufallsstichprobe** (1.6), geteilt durch die Anzahl der Beobachtungen in der **Stichprobe** (1.3)

ANMERKUNG 1 Für eine Zufallsstichprobe des Stichprobenumfangs n , das heißt $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, ist das Stichprobenmoment der Ordnung k , $E(X^k)$, gleich

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

ANMERKUNG 2 Außerdem kann dieser Begriff als das Stichprobenmoment der Ordnung k über null bezeichnet werden.

ANMERKUNG 3 Das Stichprobenmoment der Ordnung 1 ist der **arithmetische Mittelwert** (1.15) in der nächsten Definition.

ANMERKUNG 4 Obwohl die Definition für ein beliebiges k angegeben wird, sind die in der Praxis üblichen Fälle $k = 1$ [**Stichprobenmittelwert** (1.15)], $k = 2$ [verbunden mit der **Stichprobenvarianz** (1.16) und **Stichprobenstandardabweichung** (1.17)], $k = 3$ [verbunden mit dem **Stichprobenkoeffizienten der Schiefe** (1.20)] und $k = 4$ [verbunden mit dem **Stichprobenkoeffizienten der Kurtosis** (1.21)].

NOTE 1 For a **random sample** (1.6) of sample size n whose **random variables** (2.10) are arranged in nondecreasing order from 1 to n , the sample median is the $(n+1)/2$ th random variable if the sample size is odd. If the sample size n is even, then the sample median is the average of the $(n/2)$ th and $(n+1)/2$ th random variables.

NOTE 2 Conceptually, it may seem impossible to conduct an ordering of random variables which have not yet been observed. Nevertheless, the structure for understanding order statistics can be established so that upon observation, the analysis may proceed. In practice, one obtains observed values and through sorting the values, one obtains realizations of the order statistics. These realizations can then be interpreted from the structure of order statistics from a random sample.

NOTE 3 The sample median provides an estimator of the middle of a distribution, with half of the sample to each side of it.

NOTE 4 In practice, the sample median is useful in providing an estimator that is insensitive to very extreme values in a data set. For example, median incomes and median housing prices are frequently reported as summary values.

1.14 sample moment of order k

$E(X^k)$

sum of k^{th} power of **random variables** (2.10) in a **random sample** (1.6) divided by the number of observations in the **sample** (1.3)

NOTE 1 For a random sample of sample size n , i.e. $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, the sample moment of order k , $E(X^k)$, is

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^k$$

NOTE 2 Furthermore, this concept can be described as the sample moment of order k about zero.

NOTE 3 The sample moment of order 1 will be seen in the next definition to be the **sample mean** (1.15).

NOTE 4 Although the definition is given for arbitrary k , commonly used instances in practice involve $k = 1$ [**sample mean** (1.15)], $k = 2$ [associated with the **sample variance** (1.16) and **sample standard deviation** (1.17)], $k = 3$ [related to **sample coefficient of skewness** (1.20)] and $k = 4$ [related to **sample coefficient of kurtosis** (1.21)].

ANMERKUNG 5 Das „E“ in $E(X^k)$ kommt von „**Erwartungswert**“ oder „Erwartung“ der Zufallsvariablen X .

1.15

Stichprobenmittelwert

Mittelwert

arithmetischer Mittelwert

Summe von **Zufallsvariablen** (2.10) in einer **Zufallsstichprobe** (1.6), geteilt durch die Anzahl der Summanden

BEISPIEL Im Beispiel von 1.9 ist die Realisierung des Stichprobenmittelwertes 9,7, da die Summe der beobachteten Werte 97 und der Stichprobenumfang 10 sind.

ANMERKUNG 1 Im Sinne von Anmerkung 3 zu 1.8 ist der Stichprobenmittelwert als Kenngröße betrachtet eine Funktion von Zufallsvariablen aus einer Zufallsstichprobe. Dieser Schätzer muss von dem numerischen Wert des Stichprobenmittelwertes, der aus den in der Zufallsstichprobe **beobachteten Werten** (1.4) berechnet wird, unterschieden werden.

ANMERKUNG 2 Der als Kenngröße betrachtete Stichprobenmittelwert wird oft als Schätzer für den **Erwartungswert** (2.35) der Grundgesamtheit verwendet. Eine gebräuchliche andere Bezeichnung ist arithmetischer Mittelwert.

ANMERKUNG 3 Für eine Zufallsstichprobe mit Stichprobenumfang n , das heißt $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, ist der arithmetische Mittelwert

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

ANMERKUNG 4 Der Stichprobenmittelwert kann als Stichprobenmoment der Ordnung 1 aufgefasst werden.

ANMERKUNG 5 Für den Stichprobenumfang 2 fallen der **Stichprobenmedian** (1.13) und die **Spannweitenmitte** (1.11) zusammen.

1.16

Stichprobenvarianz

s^2

Summe der quadrierten Abweichungen von **Zufallsvariablen** (2.10) in einer **Zufallsstichprobe** (1.6) von ihrem **Stichprobenmittelwert** (1.15), geteilt durch die Anzahl der Summanden minus eins

BEISPIEL Im Zahlenbeispiel von 1.9 kann die Stichprobenvarianz zu 17,57 berechnet werden. Die Summe der Quadrate um den beobachteten Stichprobenmittelwert ist 158,10 und der Stichprobenumfang 10, um 1 vermindert, ergibt den dazugehörigen Nenner, 9.

NOTE 5 The “E” in $E(X^k)$ comes from the “expected value” or “expectation” of the random variable X .

1.15

sample mean

average

arithmetic mean

sum of **random variables** (2.10) in a **random sample** (1.6) divided by the number of terms in the sum

EXAMPLE Continuing with the example from 1.9, the realization of the sample mean is 9,7 as the sum of the observed values is 97 and the sample size is 10.

NOTE 1 Considered as a statistic, the sample mean is a function of random variables from a random sample in the sense given in Note 3 of 1.8. One must distinguish this estimator from the numerical value of the sample mean calculated from the **observed values** (1.4) in the random sample.

NOTE 2 The sample mean considered as a statistic is often used as an estimator for the population **mean** (2.35). A common synonym is arithmetic mean.

NOTE 3 For a random sample of sample size n , i.e. $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, the sample mean is:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

NOTE 4 The sample mean can be recognized as the sample moment of order 1.

NOTE 5 For sample size 2, the sample mean, the sample **median** (1.13) and **mid-range** (1.11) are the same.

1.16

sample variance

s^2

sum of squared deviations of **random variables** (2.10) in a **random sample** (1.6) from their **sample mean** (1.15) divided by the number of terms in the sum minus one

EXAMPLE Continuing with the numerical example of 1.9, the sample variance can be computed to be 17,57. The sum of squares about the observed sample mean is 158,10 and the sample size 10 minus 1 is 9, giving the appropriate denominator.

ANMERKUNG 1 Als **Kenngroße** (1.8) betrachtet ist die Stichprobenvarianz s^2 eine Funktion von Zufallsvariablen aus einer Zufallsstichprobe. Dieser **Schätzer** (1.12) muss von dem numerischen Wert der Stichprobenvarianz, der aus den in der Zufallsstichprobe **beobachteten Werten** (1.4) berechnet wird, unterschieden werden. Dieser numerische Wert wird empirische Stichprobenvarianz oder beobachtete Stichprobenvarianz genannt und üblicherweise mit s^2 bezeichnet.

ANMERKUNG 2 Für eine Zufallsstichprobe vom Stichprobenumfang n , das heißt $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$, mit dem Stichprobenmittelwert $\bar{X}$ ist die Stichprobenvarianz

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

ANMERKUNG 3 Die Stichprobenvarianz ist eine Kenngröße, die „fast“ gleich dem Mittelwert der quadrierten Abweichungen der **Zufallsvariablen** (2.10) von ihrem Stichprobenmittelwert ist („fast“, da im Nenner $n-1$ anstelle von n verwendet wird). Die Verwendung von $n-1$ ergibt einen **erwartungstreuen Schätzer** (1.34) für die **Varianz** (2.36) der Grundgesamtheit.

ANMERKUNG 4 Die Größe $n-1$ heißt **Anzahl der Freiheitsgrade** (2.54).

ANMERKUNG 5 Die Stichprobenvarianz kann als Stichprobenmoment der Ordnung 2 der **standardisierten Stichprobenzufallsvariablen** (1.19) aufgefasst werden.

1.17 Stichprobenstandardabweichung

S
nicht-negative Quadratwurzel der **Stichprobenvarianz** (1.16)

BEISPIEL Im Zahlenbeispiel von 1.9 ist die beobachtete Stichprobenstandardabweichung 4,192, da die beobachtete Stichprobenvarianz 17,57 ist.

ANMERKUNG 1 In der Praxis wird die **Stichprobenstandardabweichung** verwendet, um die **Standardabweichung** (2.37) zu schätzen. Auch hier sollte beachtet werden, dass S ebenfalls eine **Zufallsvariable** (2.10) und keine Realisierung aus einer **Zufallsstichprobe** (1.6) ist.

ANMERKUNG 2 Die Stichprobenstandardabweichung ist ein Maß für die Streuung einer **Verteilung** (2.11).

1.18 Stichprobenvariationskoeffizient Stichprobenstandardabweichung (1.17), geteilt durch den Stichprobenmittelwert (1.15)

ANMERKUNG Wie beim **Variationskoeffizienten** (2.38) ist der Nutzen dieser Kenngröße beschränkt auf Grundgesamtheiten, deren Einheiten positive Werte haben. Der Stichprobenvariationskoeffizient wird üblicherweise als Prozentsatz angegeben. Das ist insbesondere dann anwendbar, wenn die Streuung proportional zum Mittelwert zunimmt.

NOTE 1 Considered as a **statistic** (1.8), the sample variance s^2 is a function of random variables from a random sample. One has to distinguish this **estimator** (1.12) from the numerical value of the sample variance calculated from the **observed values** (1.4) in the random sample. This numerical value is called the empirical sample variance or the observed sample variance and is usually denoted by s^2 .

NOTE 2 For a random sample of sample size n , i.e. $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ with sample mean $\bar{X}$ the sample variance is:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

NOTE 3 The sample variance is a statistic that is "almost" the average of the squared deviations of the **random variables** (2.10) from their sample mean (only "almost" since $n-1$ is used rather than n in the denominator). Using $n-1$ provides an **unbiased estimator** (1.34) of the population **variance** (2.36).

NOTE 4 The quantity $n-1$ is known as the **degrees of freedom** (2.54).

NOTE 5 The sample variance can be recognized to be the 2nd sample moment of the **standardized sample random variables** (1.19).

1.17 sample standard deviation

S
non-negative square root of the **sample variance** (1.16)

EXAMPLE Continuing with the numerical example of 1.9, the observed sample standard deviation is 4,192 since the observed sample variance is 17,57.

NOTE 1 In practice, the **sample standard deviation** is used to estimate the **standard deviation** (2.37). Here again, it should be emphasized that S is also a **random variable** (2.10) and not a realization from a **random sample** (1.6).

NOTE 2 The sample standard deviation is a measure of the dispersion of a **distribution** (2.11).

1.18 sample coefficient of variation sample standard deviation (1.17) divided by the sample mean (1.15)

NOTE As with the **coefficient of variation** (2.38), the utility of this statistic is limited to populations that are positive valued. The sample coefficient of variation is commonly reported as a percentage. It is particularly applicable where variation increases in proportion to the mean.

1.19**standardisierte Stichprobenzufallsvariable**

um ihren **Stichprobenmittelwert** (1.15) verminderte **Zufallsvariable** (2.10), geteilt durch die **Stichprobenstandardabweichung** (1.17)

BEISPIEL Für das Beispiel von 1.9 ist der beobachtete Stichprobenmittelwert 9,7 und die beobachtete Stichprobenstandardabweichung 4,192. Daher sind die beobachteten standardisierten Stichprobenzufallsvariablen (auf zwei Nachkommastellen)

−0,17; 0,79; −0,64; −0,88; 0,79; −0,64; 2,22; −0,88; 0,07; −0,64.

ANMERKUNG 1 Die standardisierte Stichprobenzufallsvariable wird von ihrem theoretischen Gegenstück, der **standardisierten Zufallsvariablen** (2.33), unterschieden. Die Absicht der Standardisierung ist, Zufallsvariable so zu transformieren, dass sie Mittelwert null und Standardabweichung eins haben, um Interpretation und Vergleich leichter zu machen.

ANMERKUNG 2 Standardisierte beobachtete Werte haben einen beobachteten Mittelwert null und eine beobachtete Standardabweichung eins.

1.20**Stichprobenkoeffizient der Schiefe**

arithmetischer Mittelwert der dritten Potenz der **standardisierten Stichprobenzufallsvariablen** (1.19) aus einer **Zufallsstichprobe** (1.6)

BEISPIEL Für das Beispiel von 1.9 kann der beobachtete Stichprobenkoeffizient der Schiefe zu 0,971 88 berechnet werden. Für einen Stichprobenumfang wie etwa 10 in diesem Beispiel ist der Stichprobenkoeffizient der Schiefe stark schwankend und muss daher mit Vorsicht verwendet werden. Bei Verwendung der alternativen Formel in Anmerkung 1 ist der berechnete Wert 1,349 83.

ANMERKUNG 1 Die der Definition entsprechende Formel ist

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{S} \right)^3$$

Manche Statistikpakete verwenden die folgende Formel für den Stichprobenkoeffizienten der Schiefe, um die **systematische Abweichung** (1.33) zu korrigieren:

$$\frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n Z_i^3$$

mit

$$Z_i = \frac{X_i - \bar{X}}{S}$$

1.19**standardized sample random variable**

random variable (2.10) minus its **sample mean** (1.15) divided by the **sample standard deviation** (1.17)

EXAMPLE For the example of 1.9, the observed sample mean is 9,7 and the observed sample standard deviation is 4,192. Hence, the observed standardized random variables (to two decimal places) are:

−0,17; 0,79; −0,64; −0,88; 0,79; −0,64; 2,22; −0,88; 0,07; −0,64.

NOTE 1 The standardized sample random variable is distinguished from its theoretical counterpart **standardized random variable** (2.33). The intent of standardizing is to transform random variables to have zero means and unit standard deviations, for ease in interpretation and comparison.

NOTE 2 Standardized observed values have an observed mean of zero and an observed standard deviation of 1.

1.20**sample coefficient of skewness**

arithmetic mean of the third power of the **standardized sample random variables** (1.19) from a **random sample** (1.6)

EXAMPLE Continuing with the example from 1.9, the observed sample coefficient of skewness can be computed to be 0,971 88. For a sample size such as 10 in this example, the sample coefficient of skewness is highly variable, so it must be used with caution. Using the alternative formula in Note 1, the computed value is 1,349 83.

NOTE 1 The formula corresponding to the definition is

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{S} \right)^3$$

Some statistical packages use the following formula for the sample coefficient of skewness to correct for **bias** (1.33):

$$\frac{n}{(n-1)(n-2)} \sum_{i=1}^n Z_i^3$$

where

$$Z_i = \frac{X_i - \bar{X}}{S}$$

Bei großem Stichprobenumfang ist der Unterschied zwischen den beiden Schätzwerten vernachlässigbar. Der Quotient aus erwartungstreuem und verzerrtem Schätzwert ist 1,389 bei $n = 10$, 1,031 bei $n = 100$ und 1,003 bei $n = 1\,000$.

ANMERKUNG 2 Schiefe bezieht sich auf einen Mangel an Symmetrie. Werte dieser Kenngröße nahe bei null deuten darauf hin, dass die zugrunde liegende Verteilung näherungsweise symmetrisch ist, wohingegen Werte verschieden von null auf eine Verteilung hindeuten, die gelegentliche Extremwerte auf einer Seite ihres Zentrums hat. Schiefe Daten würden sich auch in unterschiedlichen Werten von **Stichprobenmittelwert** (1.15) und **Stichprobenmedian** (1.13) widerspiegeln. Positiv schiefer Sachverhalt (rechts-schief)^{N4)} lässt auf das Vorhandensein einiger extrem großer Beobachtungen schließen. Entsprechend lässt negativ schiefer Sachverhalt (links-schief)^{N5)} auf das Vorhandensein einiger extrem kleiner Beobachtungen schließen.

ANMERKUNG 3 Der Stichprobenkoeffizient der Schiefe kann als Stichprobenmoment der Ordnung 3 der **standardisierten Stichprobenzufallsvariablen** (1.19) aufgefasst werden.

1.21

Stichprobenkoeffizient der Kurtosis

arithmetischer Mittelwert der vierten Potenz der **standardisierten Stichprobenzufallsvariablen** (1.19) aus einer **Zufallsstichprobe** (1.6)

BEISPIEL Für das Beispiel von 1.9 kann der beobachtete Stichprobenkoeffizient der Kurtosis zu 2,674 19 berechnet werden. Für einen Stichprobenumfang wie etwa 10 in diesem Beispiel ist der Stichprobenkoeffizient der Kurtosis stark schwankend und muss daher mit Vorsicht verwendet werden. Statistikpakete verwenden verschiedene Anpassungen beim Berechnen des Stichprobenkoeffizienten der Kurtosis (siehe Anmerkung 3 zu 2.40). Bei Verwendung der in Anmerkung 1 genannten alternativen Formel ist der berechnete Wert 0,436 05. Die zwei Werte 2,674 19 und 0,436 05 sind nicht direkt vergleichbar. Um dies zu erreichen, wird 2,674 19 um drei vermindert (um den Bezug zur Kurtosis der Normalverteilung herzustellen, die gleich drei ist), wobei sich -0,325 81 ergibt, was nun mit 0,436 05 angemessen verglichen werden kann.

ANMERKUNG 1 Die der Definition entsprechende Formel ist

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{S} \right)^4$$

For a large sample size, the distinction between the two estimates is negligible. The ratio of the unbiased to the biased estimate is 1,389 for $n = 10$, 1,031 for $n = 100$ and 1,003 for $n = 1\,000$.

NOTE 2 Skewness refers to lack of symmetry. Values of this statistic close to zero suggest that the underlying distribution is approximately symmetric, whereas non-zero values would likely correspond to a distribution having occasional extreme values on one side of the centre of the distribution. Skewed data would also be reflected in values of the **sample mean** (1.15) and **sample median** (1.13) that are dissimilar. Positively skewed (right-skewed) data indicate the possible presence of a few extreme, large observations. Similarly, negatively skewed (left-skewed) data indicate the possible presence of a few extreme, small observations.

NOTE 3 The sample coefficient of skewness can be recognized to be the 3rd sample moment of the **standardized sample random variables** (1.19).

1.21

sample coefficient of kurtosis

arithmetic mean of the fourth power of the **standardized sample random variables** (1.19) from a **random sample** (1.6)

EXAMPLE Continuing with the example from 1.9, the observed sample coefficient of kurtosis can be computed to be 2,674 19. For such a sample size as 10 in this example, the sample coefficient of kurtosis is highly variable, so it must be used with caution. Statistical packages use various adjustments in computing the sample coefficient of kurtosis (see Note 3 of 2.40). Using the alternate formula given in Note 1, the computed value is 0,436 05. The two values 2,674 19 and 0,436 05 are not comparable directly. To do so, take 2,674 19 - 3 (to relate to the kurtosis of the normal distribution which is 3) which equals -0,325 81 which now can be appropriately compared to 0,436 05.

NOTE 1 The formula corresponding to the definition is:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{S} \right)^4$$

N4) Nationale Fußnote: Auch „links-steil“ genannt.

N5) Nationale Fußnote: Auch „rechts-steil“ genannt.

Manche Statistikpakete verwenden die folgende Formel für den Stichprobenkoeffizienten der Kurtosis, um die **systematische Abweichung** (1.33) zu korrigieren und auf die Abweichung von der Kurtosis der Normalverteilung (die gleich drei ist) hinzuweisen:

$$\frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^n Z_i^4 - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$$

mit

$$Z_i = \frac{X_i - \bar{X}}{S}$$

Der zweite Teil in dieser Formel ist für große n ungefähr gleich drei. Manchmal wird die Kurtosis als ein Wert wie in 2.40 definiert angegeben, vermindert um drei, um den Akzent auf Vergleiche mit der Normalverteilung zu legen. Offensichtlich muss sich ein Anwender bei Berechnungen mit Statistikpaketen der Anpassungen gegebenenfalls bewusst sein.

ANMERKUNG 2 Kurtosis bezieht sich auf das Gewicht der Randbereiche einer (unimodalen) Verteilung. Für die **Normalverteilung** (2.50) ist der Stichprobenkoeffizient der Kurtosis ungefähr drei, abhängig von der Stichprobenvariabilität. In der Praxis liefert die Kurtosis der Normalverteilung einen Bezugs- oder Grundlinienwert. **Verteilungen** (2.11) mit Werten kleiner als drei haben schwächere, Verteilungen mit Werten größer drei haben stärkere Randbereiche als die Normalverteilung.

ANMERKUNG 3 Bei beobachteten Werten der Kurtosis, die viel größer als drei sind, kann die zugrunde liegende Verteilung wirklich stärkere Randbereiche als die Normalverteilung haben. Eine Stichprobe kann durch Beobachtungen aus einer anderen Quelle oder durch Verschlüsselungsfehler beeinträchtigt werden.

ANMERKUNG 4 Der Stichprobenkoeffizient der Kurtosis kann als Stichprobenmoment der Ordnung 4 der standardisierten Stichprobenzufallsvariablen aufgefasst werden.

1.22

Stichprobenkovarianz

S_{XY}

Summe der Produkte der Abweichungen von Paaren von **Zufallsvariablen** (2.10) einer **Zufallsstichprobe** (1.6) von ihren **Stichprobenmittelwerten** (1.15), geteilt durch die Anzahl der Ausdrücke in der Summe minus eins

BEISPIEL 1 Es werde die folgende numerische Darstellung von 10 beobachteten 3-Tupeln (Werte-Tripeln) betrachtet. Für dieses Beispiel werde nur x und y betrachtet.

Some statistical packages use the following formula for the sample coefficient of kurtosis to correct for **bias** (1.33) and to indicate the deviation from the kurtosis of the normal distribution (which equals 3):

$$\frac{n(n+1)}{(n-1)(n-2)(n-3)} \sum_{i=1}^n Z_i^4 - \frac{3(n-1)^2}{(n-2)(n-3)}$$

where

$$Z_i = \frac{X_i - \bar{X}}{S}$$

The second term in the expression is approximately 3 for large n . Sometimes the kurtosis is reported as a value as defined in 2.40 minus 3 to emphasize comparisons to the normal distribution. Obviously, a practitioner needs to be aware of the adjustments, if any, in statistical package computations.

NOTE 2 Kurtosis refers to the heaviness of the tails of a (unimodal) distribution. For the **normal distribution** (2.50), the sample coefficient of kurtosis is approximately 3, subject to sampling variability. In practice, the kurtosis of the normal distribution provides a benchmark or baseline value. **Distributions** (2.11) with values smaller than 3 have lighter tails than the normal distribution; distributions with values larger than 3 have heavier tails than the normal distribution.

NOTE 3 For observed values of kurtosis much larger than 3, the possibility exists that the underlying distribution has genuinely heavier tails than the normal distribution. A sample could be contaminated by observations from another source or from a coding error.

NOTE 4 The sample coefficient of kurtosis can be recognized to be the 4th sample moment of the standardized sample random variables.

1.22

sample covariance

S_{XY}

sum of products of deviations of pairs of **random variables** (2.10) in a **random sample** (1.6) from their **sample means** (1.15) divided by the number of terms in the sum minus one

EXAMPLE 1 Consider the following numerical illustration using 10 observed 3-tuples (triplets) of values. For this example, consider only x and y .

Tabelle 1 — Ergebnisse für Beispiel 1

Table 1 — Results for Example 1

<i>i</i>	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<i>x</i>	38	41	24	60	41	51	58	50	65	33
<i>y</i>	73	74	43	107	65	73	99	72	100	48
<i>z</i>	34	31	40	28	35	28	32	27	27	31

Der beobachtete Stichprobenmittelwert für *X* ist 46,1, der für *Y* ist 75,4. Die Stichprobenkovarianz ist gleich

$$[(38 - 46,1) \cdot (73 - 75,4) + (41 - 46,1) \cdot (74 - 75,4) + \dots + (33 - 46,1) \cdot (48 - 75,4)]/9 = 257,178$$

BEISPIEL 2 In der Tabelle des vorigen Beispiels werden nur *y* und *z* betrachtet. Der beobachtete Stichprobenmittelwert für *Z* ist 31,3. Die Stichprobenkovarianz ist gleich

$$[(73 - 75,4) \cdot (34 - 31,3) + (74 - 75,4) \cdot (31 - 31,3) + \dots + (48 - 75,4) \cdot (31 - 31,3)]/9 = -54,356$$

ANMERKUNG 1 Als **Kenngroße** (1.8) betrachtet ist die Stichprobenkovarianz eine Funktion von Paaren von **Zu-fallsvariablen** (2.10) $[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)]$ einer Zufallsstichprobe vom Umfang *n* im Sinne von Anmerkung 4 zu 1.6.^{N6} Dieser **Schätzer** (1.12) muss von dem numerischen Wert der Stichprobenkovarianz, der aus den in der Zufallsstichprobe beobachteten Wertepaaren der **Auswahleinheiten** (1.2) $[(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)]$ berechnet wird, unterschieden werden. Dieser numerische Wert wird empirische Stichprobenkovarianz oder beobachtete Stichprobenkovarianz genannt.

ANMERKUNG 2 Die Stichprobenkovarianz S_{XY} ist gegeben als

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

ANMERKUNG 3 Die Verwendung von $n - 1$ liefert einen **erwartungstreuen Schätzer** (1.34) der **Kovarianz** (2.43) der Grundgesamtheit.

ANMERKUNG 4 Das Beispiel in Tabelle 1 besteht aus drei Variablen, während sich die Definition auf ein Paar von Variablen bezieht. In der Praxis treten gewöhnlich Situationen mit mehreren Variablen auf.

1.23 Stichprobenkorrelationskoeffizient

r_{xy}

Stichprobenkovarianz (1.22), geteilt durch das Produkt der zugehörigen **Stichprobenstandardabweichungen** (1.17)

The observed sample mean for *X* is 46,1 and for *Y* is 75,4. The sample covariance is equal to

$$[(38 - 46,1) \times (73 - 75,4) + (41 - 46,1) \times (74 - 75,4) + \dots + (33 - 46,1) \times (48 - 75,4)]/9 = 257,178$$

EXAMPLE 2 In the table of the previous example, consider only *y* and *z*. The observed sample mean for *Z* is 31,3. The sample covariance is equal to

$$[(73 - 75,4) \times (34 - 31,3) + (74 - 75,4) \times (31 - 31,3) + \dots + (48 - 75,4) \times (31 - 31,3)]/9 = -54,356$$

NOTE 1 Considered as a **statistic** (1.8) the sample covariance is a function of pairs of **random variables** $[(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)]$ from a random sample of size *n* in the sense given in Note 3 of 1.6.^{N6} This **estimator** (1.12) needs to be distinguished from the numerical value of the sample covariance calculated from the observed pairs of values of the **sampling units** (1.2) $[(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)]$ in the random sample. This numerical value is called the empirical sample covariance or the observed sample covariance.

NOTE 2 The sample covariance S_{XY} is given as:

$$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})$$

NOTE 3 Using $n - 1$ provides an **unbiased estimator** (1.34) of the population **covariance** (2.43).

NOTE 4 The example in Table 1 consists of three variables whereas the definition refers to a pair of variables. In practice, it is common to encounter situations with multiple variables.

1.23 sample correlation coefficient

r_{xy}

sample covariance (1.22) divided by the product of the corresponding **sample standard deviations** (1.17)

N6) Nationale Fußnote: Der Rückverweis im Englischen auf „Note 3 of 1.6“ ist in der deutschen Übersetzung redaktionell korrigiert worden.

BEISPIEL 1 In Beispiel 1 von 1.22 ist die beobachtete Standardabweichung 12,948 für X und 21,329 für Y . Daher ergibt sich der beobachtete Stichprobenkorrelationskoeffizient (für X und Y) zu

$$257,178/(12,948 \cdot 21,329) = 0,931\ 2$$

BEISPIEL 2 In Beispiel 2 von 1.22 ist die beobachtete Standardabweichung für Y gleich 21,329 und für Z gleich 4,165. Daher ergibt sich der beobachtete Stichprobenkorrelationskoeffizient (für Y und Z) zu

$$-54,356/(21,329 \cdot 4,165) = -0,612$$

ANMERKUNG 1 Formelmäßig wird der Stichprobenkorrelationskoeffizient wie folgt berechnet:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}} \quad \text{N7)}$$

Dieser Ausdruck entspricht dem Quotienten aus der Stichprobenkovarianz und der Quadratwurzel aus dem Produkt der summierten quadratischen Abweichungen der Stichproben.^{N8)} Gelegentlich wird das Formelzeichen r_{xy} verwendet, um den Stichprobenkorrelationskoeffizienten zu kennzeichnen. Der beobachtete Stichprobenkorrelationskoeffizient beruht auf den Realisierungen $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

ANMERKUNG 2 Der beobachtete Stichprobenkorrelationskoeffizient kann Werte in $[-1, 1]$ annehmen, wobei Werte nahe bei 1 auf stark positive und Werte nahe bei -1 auf stark negative Korrelation hindeuten. Der Korrelationskoeffizient der Stichprobe zeigt den Grad einer linearen Beziehung zwischen zwei Variablen an, wobei Werte nahe bei -1 oder 1 eine deutliche lineare Beziehung anzeigen, wogegen Werte nahe bei 0 eine schwache lineare Beziehung anzeigen.

1.24

Standardabweichung einer Schätzfunktion

$$\sigma_{\hat{\theta}}$$

Standardabweichung (2.37) eines **Schätzers** (1.12) $\hat{\theta}$

BEISPIEL Wenn der **Stichprobenmittelwert** (1.15) der Schätzer des **Erwartungswertes** (2.35) der Grundgesamtheit ist und die Standardabweichung einer einzelnen **Zufallsvariablen** (2.10) σ ist, dann ist die Standardabweichung einer Schätzfunktion des Stichprobenmittelwertes $\sigma/\sqrt{n}$, wobei n die Anzahl der Beobachtungen in der Stichprobe ist^{N9)}. Ein Schätzer der Stan-

EXAMPLE 1 Continuing with Example 1 of 1.22, the observed standard deviation is 12,948 for X and 21,329 for Y . Hence, the observed sample correlation coefficient (for X and Y) is given by:

$$257,178/(12,948 \times 21,329) = 0,931\ 2$$

EXAMPLE 2 Continuing with Example 2 of 1.22, the observed standard deviation is 21,329 for Y and 4,165 for Z . Hence, the observed sample correlation coefficient (for Y and Z) is given by:

$$-54,356/(21,329 \times 4,165) = -0,612$$

NOTE 1 Notationally, the sample correlation coefficient is computed as:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

This expression is equivalent to the ratio of the sample covariance to the square root of the product of the sample variances. Sometimes the symbol r_{xy} is used to denote the sample correlation coefficient. The observed sample correlation coefficient is based on realizations $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$.

NOTE 2 The observed sample correlation coefficient can take on values in $[-1, 1]$, with values near 1 indicating strong positive correlation and values near -1 indicating strong negative correlation. The sample correlation coefficient indicates the degree of linear relationship between two variables, with values near -1 or 1 indicating a strong linear relationship while values near 0 indicate a weak linear relationship.

1.24

standard error

$$\sigma_{\hat{\theta}}$$

standard deviation (2.37) of an **estimator** (1.12) $\hat{\theta}$

EXAMPLE If the **sample mean** (1.15) is the estimator of the population **mean** (2.35) and the standard deviation of a single **random variable** (2.10) is σ , then the standard error of the sample mean is $\sigma/\sqrt{n}$ where n is the number of observations in the sample. An estimator of the standard error is $S/\sqrt{n}$ where S is the **sample**

N7) Nationale Fußnote: An dieser Stelle ist die deutsche Übersetzung gegenüber dem englischsprachigen Text präzisiert worden.

N8) Nationale Fußnote: An dieser Stelle ist der englische Text fehlerhaft und ist im Deutschen korrigiert worden.

N9) Nationale Fußnote: Die Standardabweichung eines Schätzers des Stichprobenmittelwertes wird im Deutschen auch als Standardabweichung des Stichprobenmittelwertes bezeichnet.

Standardabweichung einer Schätzfunktion ist $S/\sqrt{n}$, wobei S die **Stichprobenstandardabweichung** (1.17) ist.

ANMERKUNG 1 In der Praxis liefert die Standardabweichung einer Schätzfunktion einen natürlichen Schätzwert der Standardabweichung eines Schätzers.

ANMERKUNG 2 Es gibt keinen (sinnvollen) komplementären Begriff „Nicht-Standardabweichung einer Schätzfunktion“. „Standardabweichung einer Schätzfunktion“ kann als eine abgekürzte Form für den Ausdruck „Standardabweichung eines Schätzers“ gesehen werden. In der Praxis bezieht sich Standardabweichung einer Schätzfunktion üblicherweise stillschweigend auf die Standardabweichung des Stichprobenmittelwertes. Die Bezeichnung für die Standardabweichung einer Schätzfunktion des Stichprobenmittelwertes ist $\sigma_{\bar{X}}$.

1.25 Bereichsschätzer

Bereich, der durch eine **Kenngroße** (1.8) für die obere und eine **Kenngroße** für die untere Grenze eingegrenzt wird

ANMERKUNG 1 Einer der beiden Endpunkte könnte $+\infty$, $-\infty$ oder eine natürliche Grenze des Wertes eines **Parameters** sein. Beispielsweise ist 0 eine natürliche untere Grenze für einen **Bereichsschätzer** der **Varianz** (2.36) der Grundgesamtheit. In solchen Fällen werden die Bereiche üblicherweise als einseitige Bereiche bezeichnet.

ANMERKUNG 2 Ein Bereichsschätzer kann zusammen mit der **Schätzung** (1.36) des Wertes eines **Parameters** (2.9) angegeben werden. Vom Bereichsschätzer wird vermutet, dass er unter den Bedingungen der wiederholten Stichprobenentnahme oder in irgendeinem anderen wahrscheinlichkeitstheoretischen Sinne den Wert des Parameters in einem festgelegten Prozentsatz von Fällen enthält.

ANMERKUNG 3 Drei gebräuchliche Arten von Bereichsschätzern sind **Vertrauensbereiche** (1.28) für den Wert eines Parameters (die Werte von Parametern), **Prognosebereiche** (1.30) für zukünftige Beobachtungen und **statistische Anteilsbereiche** (1.26) für den enthaltenen Anteil einer **Verteilung** (2.11).

1.26 statistischer Anteilsbereich

Bereich, der derart aus einer **Zufallsstichprobe** (1.6) bestimmt wird, dass er bei vorgegebenem Vertrauensniveau mindestens einen festgelegten Anteil der gesamten **Grundgesamtheit** (1.1) überdeckt

ANMERKUNG Das Vertrauensniveau ist in diesem Zusammenhang der Langzeitanteil von in dieser Art und Weise konstruierten Bereichen, die mindestens den vorgegebenen Anteil der betrachteten Grundgesamtheit enthalten.

standard deviation (1.17).

NOTE 1 In practice, the standard error provides a natural estimate of the standard deviation of an estimator.

NOTE 2 There is no (sensible) complementary term “non-standard” error. Standard error can be viewed as an abbreviation for the expression “standard deviation of an estimator”. Commonly, in practice, standard error is implicitly referring to the standard deviation of the sample mean. The notation for the standard error of the sample mean is $\sigma_{\bar{X}}$.

1.25 interval estimator

interval, bounded by an upper limit **statistic** (1.8) and a lower limit statistic

NOTE 1 One of the end points could be $+\infty$, $-\infty$ or a natural limit of the value of a **parameter**. For example, 0 is a natural lower limit for an **interval estimator** of the population **variance** (2.36). In such cases, the intervals are commonly referred to as one-sided intervals.

NOTE 2 An interval estimator can be given in conjunction with **parameter** (2.9) **estimation** (1.36). The interval estimator is presumed to contain a parameter on a stated proportion of occasions, under conditions of repeated sampling, or in some other probabilistic sense.

NOTE 3 Three common types of interval estimators include **confidence intervals** (1.28) for parameter(s), **prediction intervals** (1.30) for future observations, and **statistical tolerance intervals** (1.26) on the proportion of a **distribution** (2.11) contained.

1.26 statistical tolerance interval

interval determined from a **random sample** (1.6) in such a way that one may have a specified level of confidence that the interval covers at least a specified proportion of the sampled **population** (1.1)

NOTE The confidence in this context is the long-run proportion of intervals constructed in this manner that will include at least the specified proportion of the sampled population.

1.27

statistische Anteilsgrenze

Kenngroße (1.8), die einen Endpunkt eines **statistischen Anteilsbereiches** (1.26) darstellt

ANMERKUNG Statistische Anteilsbereiche dürfen entweder

- einseitig sein (mit einer ihrer Grenzen an der natürlichen Begrenzung der Zufallsvariablen festgelegt), wobei sie entweder eine obere oder eine untere statistische Anteilsgrenze haben, oder
- zweiseitig sein, in welchem Fall sie beide Grenzen haben.

Die natürliche Schranke einer Zufallsvariablen darf die Grenze eines einseitigen Anteilsbereichs darstellen.

1.28

Vertrauensbereich

Bereichsschätzer (1.25) (T_0, T_1) für einen **Parameter** (2.9) θ , bei dem die **Kenngroßen** (1.8) T_0 und T_1 Intervallgrenzen sind und für den gilt, dass $P[T_0 < \theta < T_1] \geq 1 - \alpha$

ANMERKUNG 1 Die Wahrscheinlichkeit spiegelt den Anteil von Fällen wider, in denen der Vertrauensbereich den wahren Wert des Parameters in einer langen Reihe von wiederholten **Zufallsstichproben** (1.6) enthalten würde. Ein Vertrauensbereich spiegelt nicht die **Wahrscheinlichkeit** (2.5) wider, dass der beobachtete Bereich den wahren Wert des Parameters enthält (entweder enthält er ihn oder er enthält ihn nicht).

ANMERKUNG 2 Verbunden mit diesem Vertrauensbereich ist die zugehörige Kenngroße $100(1 - \alpha) \%$, in der α im Allgemeinen eine kleine Zahl ist. Diese Kenngroße, die Vertrauenskoeffizient oder Vertrauensniveau genannt wird, hat oft den Wert 95 % oder 99 %. Die Ungleichung $P[T_0 < \theta < T_1] \geq 1 - \alpha$ gilt für einen genau bezeichneten, aber unbekannten Wert θ der Grundgesamtheit.

1.29

einseitiger Vertrauensbereich

Vertrauensbereich (1.28), dessen einer Endpunkt $+\infty$, $-\infty$ oder eine natürlich festgelegte Grenze ist

ANMERKUNG 1 Definition 1.28 trifft zu, wenn entweder T_0 auf $-\infty$ oder T_1 auf $+\infty$ gesetzt ist. Einseitige Vertrauensbereiche kommen in Situationen vor, in denen sich das Interesse ausschließlich auf eine Richtung konzentriert. Um beispielsweise die Lautstärke von Mobiltelefonen unter Ungefährlichkeitsaspekten zu prüfen, wäre eine obere Vertrauensgrenze interessant, die eine obere Grenze für die entwickelte Lautstärke unter als gefahrlos angenommenen Bedingungen angibt. Für die mechanische Bauteilprüfung wäre eine untere Vertrauensgrenze für die Belastung, bei der eine Einheit ausfällt, von Interesse.

1.27

statistical tolerance limit

statistic (1.8) representing an end point of a **statistical tolerance interval** (1.26)

NOTE Statistical tolerance intervals may be either

- one-sided (with one of its limits fixed at the natural boundary of the random variable), in which case they have either an upper or a lower statistical tolerance limit, or
- two-sided, in which case they have both.

A natural boundary of the random variable may provide a limit for a one-sided limit.

1.28

confidence interval

interval estimator (1.25) (T_0, T_1) for the **parameter** (2.9) θ with the **statistics** (1.8) T_0 and T_1 as interval limits and for which it holds that $P[T_0 < \theta < T_1] \geq 1 - \alpha$

NOTE 1 The confidence reflects the proportion of cases that the confidence interval would contain the true parameter value in a long series of repeated **random samples** (1.6) under identical conditions. A confidence interval does not reflect the **probability** (2.5) that the observed interval contains the true value of the parameter (it either does or does not contain it).

NOTE 2 Associated with this confidence interval is the attendant performance characteristic $100(1 - \alpha) \%$, where α is generally a small number. The performance characteristic, which is called the confidence coefficient or confidence level, is often 95 % or 99 %. The inequality $P[T_0 < \theta < T_1] \geq 1 - \alpha$ holds for any specific but unknown population value of θ .

1.29

one-sided confidence interval

confidence interval (1.28) with one of its end points fixed at $+\infty$, $-\infty$, or a natural fixed boundary

NOTE 1 Definition 1.28 applies with either T_0 set at $-\infty$ or T_1 set at $+\infty$. One-sided confidence intervals arise in situations where interest focuses strictly on one direction. For example, in audio volume testing for safety concerns in cellular telephones, an upper confidence limit would be of interest indicating an upper bound for the volume produced under presumed safe conditions. For structural mechanical testing, a lower confidence limit on the force at which a device fails would be of interest.

ANMERKUNG 2 Ein anderes Beispiel für einseitige Vertrauensbereiche ergibt sich in Situationen, in denen es für den Wert eines Parameters eine natürliche Grenze gibt, wie etwa Null. Für eine bei der Modellbildung für Kundenreklamationen verwendete **Poissonverteilung** (2.47) ist Null eine untere Grenze. Als ein weiteres Beispiel könnte ein Vertrauensbereich (0,98, 1) für die Überlebenswahrscheinlichkeit eines elektronischen Bauteils sein, wobei 1 die natürliche obere Begrenzung ist.

1.30 Prognosebereich

aus einer **Zufallsstichprobe** (1.6) von Werten aus einer kontinuierlichen Grundgesamtheit abgeleiteter Bereich von Werten einer Variablen, für den mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit behauptet werden kann, dass in ihn bei einer weiteren Zufallsstichprobe aus derselben **Grundgesamtheit** (1.1) nicht weniger als eine gegebene Anzahl von Werten fallen wird

ANMERKUNG Üblicherweise konzentriert sich das Interesse auf eine einzelne weitere Beobachtung, die auf dieselben Umstände zurückzuführen ist wie die Beobachtungen, die die Basis für den Prognosebereich bilden. Eine andere praktische Anwendung gibt es in der Regressionsanalyse, bei der ein Prognosebereich für eine Vielfalt unabhängiger Werte konstruiert wird.

1.31 Schätzwert beobachteter Wert (1.4) eines Schätzers (1.12)

ANMERKUNG Schätzwert bezieht sich auf einen aus beobachteten Werten gewonnenen numerischen Wert. Was die **Schätzung** (1.36) des Wertes eines **Parameters** (2.9) aus einer angenommenen **Wahrscheinlichkeitsverteilung** (2.11) betrifft, bezieht sich Schätzer auf die **Kenngroße** (1.8), die den Wert des Parameters schätzen soll, und Schätzwert bezieht sich auf das Ergebnis aus beobachteten Werten. Manchmal wird das Wort „Punkt“ vor Schätzwert eingefügt, um zu betonen, dass es sich um einen einzelnen Wert und nicht um einen Bereich handelt. Ähnlich wird das Wort „Bereich“ vor Schätzwert eingefügt, wenn es sich um eine Bereichsschätzung handelt.

1.32 Schätzabweichung Schätzwert (1.31) minus Wert des Parameters (2.9) oder der Eigenschaft der Grundgesamtheit, die zu schätzen beabsichtigt ist

ANMERKUNG 1 Eigenschaft der Grundgesamtheit kann eine Funktion des Wertes des Parameters oder der Werte der Parameter sein oder eine andere Größe im Zusammenhang mit der **Wahrscheinlichkeitsverteilung** (2.11).

NOTE 2 Another instance of one-sided confidence intervals occurs in situations where a parameter has a natural boundary such as zero. For a **Poisson distribution** (2.47) involved in modelling customer complaints, zero is a lower bound. As another example, a confidence interval for the reliability of an electronic component could be (0,98, 1), where 1 is the natural upper boundary limit.

1.30 prediction interval range of values of a variable, derived from a **random sample** (1.6) of values from a continuous population, within which it can be asserted with a given confidence that no fewer than a given number of values in a further random sample from the same **population** (1.1) will fall

NOTE Commonly, interest focuses on a single further observation arising from the same situation as the observations which are the basis of the prediction interval. Another practical context is regression analysis in which a prediction interval is constructed for a spectrum of independent values.

1.31 estimate observed value (1.4) of an estimator (1.12)

NOTE Estimate refers to a numerical value obtained from observed values. With respect to **estimation** (1.36) of a **parameter** (2.9) from an hypothesized **probability distribution** (2.11), estimator refers to the **statistic** (1.8) intended to estimate the parameter and estimate refers to the result using observed values. Sometimes the adjective “point” is inserted before estimate to emphasize that a single value is being produced rather than an interval of values. Similarly, the adjective “interval” is inserted before estimate in cases where interval estimation is taking place.

1.32 error of estimation estimate (1.31) minus the **parameter** (2.9) or population property that it is intended to estimate

NOTE 1 Population property may be a function of the parameter or parameters or another quantity related to the **probability distribution** (2.11).

ANMERKUNG 2 Schätzabweichung kann Beiträge aufgrund von Stichprobenentnahme, Messunsicherheit, Rundung oder anderen Ursachen enthalten. In der Tat verkörpert die Schätzabweichung den entscheidenden Gegenstand des Interesses für den Fachmann. Die Bestimmung der wesentlichen Beiträge zur Schätzabweichung ist ein entscheidendes Element bei Bemühungen um die Verbesserung der Qualität.^{N10)}

1.33 systematische Abweichung Erwartungswert (2.12) der Schätzabweichung (1.32)

ANMERKUNG 1 Diese Definition unterscheidet sich von denen in ISO 3534-2:2006 (3.3.2) und VIM:1993 (5.25 und 5.28). Hier wird „systematische Abweichung“ in generischem Sinne verwendet wie in der Anmerkung^{N11)} von 1.34 gezeigt.

ANMERKUNG 2 Das Vorhandensein von systematischer Abweichung kann in der Praxis missliche Folgen haben. Beispielsweise kann die Unterschätzung der Materialfestigkeit aufgrund systematischer Abweichung zu unerwarteten Ausfällen einer Einheit führen. Bei Stichprobenerhebungen kann systematische Abweichung zu falschen Schlüssen aus einer politischen Meinungsfrage führen.

1.34 erwartungstreuer Schätzer Schätzer (1.12), dessen systematische Abweichung (1.33) gleich null ist

BEISPIEL 1 Für eine **Zufallsstichprobe** (1.6) von n unabhängigen **Zufallsvariablen** (2.10), jede mit der gleichen **Normalverteilung** (2.50) mit **Erwartungswert** (2.35) μ und **Standardabweichung** (2.37) σ , sind der **Stichprobenmittelwert** (1.15) $\bar{X}$ und die **Stichprobenvarianz** (1.16) S^2 erwartungstreue Schätzer für den Erwartungswert μ beziehungsweise die **Varianz** (2.36) σ^2 .

BEISPIEL 2 Wie in Anmerkung 1 von 1.37 erwähnt, verwendet der **Maximum-Likelihood-Schätzer** (1.35) der Varianz σ^2 den Nenner n anstelle von $n - 1$ und ist daher ein verzerrter Schätzer. In Anwendungen tritt die **Stichprobenstandardabweichung** (1.17) häufig auf, aber es ist wichtig festzustellen, dass die Quadratwurzel der Stichprobenvarianz, die n verwendet, ein verzerrter Schätzer der **Standardabweichung** (2.37) der Grundgesamtheit ist.^{N12)}

NOTE 2 Estimator error could involve contributions due to sampling, measurement uncertainty, rounding, or other sources. In effect, estimator error represents the bottom line performance of interest to practitioners. Determining the primary contributors to estimator error is a critical element in quality improvement efforts.

1.33 bias expectation (2.12) of error of estimation (1.32)

NOTE 1 This definition differs from ISO 3534-2:2006 (3.3.2) and VIM:1993 (5.25 and 5.28). Here bias is used in a generic sense as indicated in Note 1^{N11)} in 1.34.

NOTE 2 The existence of bias can lead to unfortunate consequences in practice. For example, underestimation of the strength of materials due to bias could lead to unexpected failures of a device. In survey sampling, bias could lead to incorrect decisions from a political poll.

1.34 unbiased estimator estimator (1.12) having bias (1.33) equal to zero

EXAMPLE 1 For a **random sample** (1.6) of n independent **random variables** (2.10), each with the same **normal distribution** (2.50) with **mean** (2.35) μ and **standard deviation** (2.37) σ , the **sample mean** $\bar{X}$ (1.15) and the **sample variance** (1.16) S^2 are unbiased estimators for the mean μ and the **variance** (2.36) σ^2 , respectively.

EXAMPLE 2 As is mentioned in Note 1 to 1.37 the **maximum likelihood estimator** (1.35) of the variance σ^2 uses the denominator n instead of $n - 1$ and thus is a biased estimator. In applications, the **sample standard deviation** (1.17) receives considerable use but it is important to note that the square root of the sample variance using $n - 1$ is a biased estimator of the population **standard deviation** (2.37).^{N12)}

N10) Nationale Fußnote: In der deutschen Übersetzung von Anmerkung 2 ist das englische „estimator error“ als Schätzabweichung (error of estimation) wiedergegeben.

N11) Nationale Fußnote: In Abschnitt 1.34 gibt es nur eine Anmerkung ohne Benummerung. Dies ist in der deutschen Übersetzung redaktionell korrigiert worden.

N12) Nationale Fußnote: Im Englischen heißt es hier versehentlich falsch „ $n - 1$ “. Dies ist in der deutschen Übersetzung redaktionell korrigiert worden.

BEISPIEL 3 Für eine Zufallsstichprobe von n unabhängigen Paaren von Zufallsvariablen, jedes Paar mit der gleichen **zweidimensionalen Normalverteilung** (2.65) mit **Kovarianz** (2.43) gleich σ_{XY} ^{N13)} ist die **Stichprobenkovarianz** (1.22) ein erwartungstreuer Schätzer für die Kovarianz der Grundgesamtheit. Der Maximum-Likelihood-Schätzer verwendet n anstelle von $n - 1$ und ist daher verzerrt.

ANMERKUNG Schätzer, die **erwartungstreu** sind, sind insofern erstrebenswert, als sie im Mittel den richtigen Wert liefern. Zweifellos liefern erwartungstreue Schätzer einen vernünftigen Ausgangspunkt für die Suche nach „optimalen“ Schätzern für die Werte der Parameter der Grundgesamtheit. Die hier gegebene Definition ist statistischer Art.

In der täglichen Anwendung versuchen Fachleute, systematische Abweichungen in einer Untersuchung zu vermeiden, indem sie beispielsweise sicherstellen, dass eine Zufallsstichprobe für die interessierende Grundgesamtheit repräsentativ ist.

1.35

Maximum-Likelihood-Schätzer

Schätzer (1.12), der den Wert des **Parameters** (2.9) zuordnet, bei dem die **Likelihood-Funktion** (1.38) ihren Höchstwert annimmt oder annähert

ANMERKUNG 1 Maximum-Likelihood-Schätzung ist ein gängiger Ansatz, um Schätzwerte für die Werte der Parameter zu erhalten, wenn eine **Verteilung** (2.11) festgelegt worden ist [beispielsweise **Normalverteilung** (2.50), **Gammaverteilung** (2.56), **Weibull-Verteilung** (2.63) und so weiter]. Diese Schätzer haben erwünschte Eigenschaften (zum Beispiel Invarianz unter monotonen Transformationen), und in vielen Fällen bilden sie das Schätzverfahren der Wahl. In Fällen, in denen der Maximum-Likelihood-Schätzer verzerrt ist, erfolgt eine einfache Bereinigung der **systematischen Abweichung** (1.33). Wie in Beispiel 2 von 1.34 erwähnt, ist der Maximum-Likelihood-Schätzer für die **Varianz** (2.36) der Normalverteilung verzerrt, aber er kann durch Verwendung von $n - 1$ anstelle von n korrigiert werden. Das Ausmaß der systematischen Abweichung nimmt mit wachsendem Stichprobenumfang ab.

ANMERKUNG 2 Die Abkürzung MLE wird üblicherweise sowohl für Maximum-Likelihood-Schätzer als auch für Maximum-Likelihood-Schätzung verwendet, wobei aus dem Kontext hervorgeht, was gemeint ist.

1.36

Schätzung

Verfahren, das eine statistische Darstellung einer **Grundgesamtheit** (1.1) aus einer aus dieser Grundgesamtheit gezogenen **Zufallsstichprobe** (1.6) gewinnt

EXAMPLE 3 For a random sample of n independent pairs of random variables, each pair with the same **bivariate normal distribution** (2.65) with **covariance** (2.43) equal to $\rho\sigma_{XY}$ ^{N13)}, the **sample covariance** (1.22) is an unbiased estimator for population covariance. The maximum likelihood estimator uses n instead of $n - 1$ in the denominator and thus is biased.

NOTE Estimators that are **unbiased** are desirable in that on average, they give the correct value. Certainly, unbiased estimators provide a useful starting point in the search for “optimal” estimators of population parameters. The definition given here is of a statistical nature.

In everyday usage, practitioners try to avoid introducing bias into a study by ensuring, for example, that the random sample is representative of the population of interest.

1.35

maximum likelihood estimator

estimator (1.12) assigning the value of the **parameter** (2.9) where the **likelihood function** (1.38) attains or approaches its highest value

NOTE 1 Maximum likelihood estimation is a well-established approach for obtaining parameter estimates where a **distribution** (2.11) has been specified [for example, **normal** (2.50), **gamma** (2.56), **Weibull** (2.63), and so forth]. These estimators have desirable statistical properties (for example, invariance under monotone transformation) and in many situations provide the estimation method of choice. In cases in which the maximum likelihood estimator is biased, a simple **bias** (1.33) correction sometimes takes place. As mentioned in Example 2 of 1.34 the maximum likelihood estimator for the **variance** (2.36) of the normal distribution is biased but it can be corrected by using $n - 1$ rather than n . The extent of the bias in such cases decreases with increasing sample size.

NOTE 2 The abbreviation MLE is commonly used both for maximum likelihood estimator and maximum likelihood estimation with the context indicating the appropriate choice.

1.36

estimation

procedure that obtains a statistical representation of a **population** (1.1) from a **random sample** (1.6) drawn from this population

N13) Nationale Fußnote: Im Englischen heißt es hier versehentlich falsch $\rho\sigma_{XY}$. Dies ist in der deutschen Übersetzung redaktionell korrigiert worden.

ANMERKUNG 1 Insbesondere begründet das Verfahren, das von einem **Schätzer** (1.12) zu einem speziellen **Schätzwert** (1.31) führt, die Schätzung.

ANMERKUNG 2 Schätzung wird in ziemlich weitem Sinne verstanden, um Punktschätzung, Bereichsschätzung oder Schätzung von Eigenschaften von Grundgesamtheiten zu umfassen.

ANMERKUNG 3 Oft bezieht sich eine statistische Darstellung auf die Schätzung des Wertes eines **Parameters** (2.9) oder der Werte von Parametern oder einer Funktion von Parametern eines unterstellten Modells. Noch allgemeiner könnte die Verkörperung der Grundgesamtheit weniger spezifisch sein, wie zum Beispiel Statistiken über die Auswirkungen von Naturkatastrophen (Unfälle, Verletzungen, Vermögensschäden und Ernteschäden — die ein Krisenmanager allesamt zu schätzen wünschen könnte).

ANMERKUNG 4 Betrachtungen mittels **beschreibender Statistik** (1.5) könnten darauf hindeuten, dass ein unterstelltes Modell eine unzulängliche Darstellung der Daten liefert, wie es zum Beispiel ein Maß für die Güte der Anpassung des Modells an die Daten erkennen lässt. In solchen Fällen könnten andere Modelle in Betracht gezogen und der Prozess der Schätzung fortgesetzt werden.

1.37

Maximum-Likelihood-Schätzung

Schätzung (1.36), die auf einem **Maximum-Likelihood-Schätzer** (1.35) beruht

ANMERKUNG 1 Für die **Normalverteilung** (2.50) ist der **Stichprobenmittelwert** (1.15) ein **Maximum-Likelihood-Schätzer** (1.35) für den Wert des **Parameters** (2.9) μ , während die **Stichprobenvarianz** (1.16) mit dem Nenner n anstelle von $n - 1$ den Maximum-Likelihood-Schätzer von σ^2 bildet. Üblicherweise wird der Nenner $n - 1$ verwendet, da dieser Wert einen **erwartungstreuen Schätzer** (1.34) liefert.

ANMERKUNG 2 Maximum-Likelihood-Schätzung wird manchmal verwendet, um auf die Herkunft eines **Schätzers** (1.12) von der Likelihood-Funktion hinzuweisen.

ANMERKUNG 3 Wenngleich sich bei der Verwendung der Maximum-Likelihood-Schätzung in manchen Fällen ein geschlossener Ausdruck ergibt, gibt es andere Situationen, in denen der Maximum-Likelihood-Schätzer die iterative Lösung eines Satzes von Gleichungen erfordert.

ANMERKUNG 4 Die Abkürzung MLE wird üblicherweise sowohl für Maximum-Likelihood-Schätzer als auch für Maximum-Likelihood-Schätzung verwendet, wobei aus dem Kontext hervorgeht, was gemeint ist.

1.38

Likelihoodfunktion

Wahrscheinlichkeitsdichte (2.26), berechnet bei den **beobachteten Werten** (1.4) und aufgefasst als eine Funktion der **Parameter** (2.9) der **Verteilungsfamilie** (2.8)

NOTE 1 In particular, the procedure involved in progressing from an **estimator** (1.12) to a specific **estimate** (1.31) constitutes estimation.

NOTE 2 Estimation is understood in a rather broad context to include point estimation, interval estimation or estimation of properties of populations.

NOTE 3 Frequently, a statistical representation refers to the estimation of a **parameter** (2.9) or parameters or a function of parameters from an assumed model. More generally, the representation of the population could be less specific, such as statistics related to impacts from natural disasters (casualties, injuries, property losses and agricultural losses — all of which an emergency manager might wish to estimate).

NOTE 4 Consideration of **descriptive statistics** (1.5) could suggest that an assumed model provides an inadequate representation of the data, such as indicated by a measure of the goodness of fit of the model to the data. In such cases, other models could be considered and the estimation process continued.

1.37

maximum likelihood estimation

estimation (1.36) based upon the **maximum likelihood estimator** (1.35)

NOTE 1 For the **normal distribution** (2.50), the **sample mean** (1.15) is the **maximum likelihood estimator** (1.35) of the **parameter** (2.9) μ while the **sample variance** (1.16), using the denominator n rather than $n - 1$, provides the maximum likelihood estimator of σ^2 . The denominator $n - 1$ is typically used since this value provides an **unbiased estimator** (1.34).

NOTE 2 Maximum likelihood estimation is sometimes used to describe the derivation of an **estimator** (1.12) from the likelihood function.

NOTE 3 Although in some cases, a closed-form expression emerges using maximum likelihood estimation, there are other situations in which the maximum likelihood estimator requires an iterative solution to a set of equations.

NOTE 4 The abbreviation MLE is commonly used both for maximum likelihood estimator and maximum likelihood estimation with the context indicating the appropriate choice.

1.38

likelihood function

probability density function (2.26) evaluated at the **observed values** (1.4) and considered as a function of the **parameters** (2.9) of the **family of distributions** (2.8)

BEISPIEL 1 Gegeben sei eine Situation, in der zehn Einheiten zufällig aus einer sehr großen **Grundgesamtheit** (1.1) ausgewählt werden, von denen drei eine bestimmte Eigenschaft aufweisen. Auf der Basis dieser Stichprobe ergibt sich ein intuitiver **Schätzwert** (1.31) des Anteils der Grundgesamtheit mit dieser Eigenschaft von 0,3 (3 aus 10). Unter dem Modell der **Binomialverteilung** (2.46) erreicht die Likelihoodfunktion (Wahrscheinlichkeitsfunktion^{N14}) als eine Funktion von p mit festem n bei 10 und x bei 3) ihr Maximum bei $p = 0,3$ und stimmt so mit der Intuition überein.

[Das kann durch Auftragen der Wahrscheinlichkeitsfunktion der **Binomialverteilung** (2.46) $120 p^3 (1 - p)^7$ über p weiter verifiziert werden.]

BEISPIEL 2 Für die **Normalverteilung** (2.50) mit bekannter **Standardabweichung** (2.37) kann allgemein gezeigt werden, dass die Likelihoodfunktion ihr Maximum bei μ , dem Erwartungswert^{N15}, annimmt.

1.39 Profil-Likelihood-Funktion

Likelihoodfunktion (1.38) als Funktion eines einzelnen **Parameters** (2.9), bei der die Werte aller anderen Parameter so gewählt sind, dass sie maximiert wird

1.40 Hypothese

H

Behauptung über eine **Grundgesamtheit** (1.1)

ANMERKUNG Üblicherweise betrifft die Behauptung über eine Grundgesamtheit die Werte eines oder mehrerer **Parameter** (2.9) in einer **Verteilungsfamilie** (2.8) oder die Familie der Verteilungen.

1.41 Nullhypothese

H_0

Hypothese (1.40), die mit einem **statistischen Test** (1.48) geprüft wird

BEISPIEL 1 In einer **Zufallsstichprobe** (1.6) von unabhängigen **Zufallsvariablen** (2.10) mit derselben **Normalverteilung** (2.50) mit unbekanntem **Erwartungswert** (2.35) und unbekannter **Standardabweichung** (2.37) darf eine Nullhypothese für den Erwartungswert μ sein, dass der Erwartungswert kleiner oder gleich einem gegebenen Wert μ_0 ist, und dies wird gewöhnlich wie folgt geschrieben: $H_0: \mu \leq \mu_0$.

EXAMPLE 1 Consider a situation in which ten items are selected at random from a very large **population** (1.1) and 3 of the items are found to have a specific characteristic. From this sample, an intuitive **estimate** (1.31) of the population proportion having the characteristic is 0,3 (3 out of 10). Under a **binomial distribution** (2.46) model, the likelihood function (probability mass function as a function of p with n fixed at 10 and x at 3) achieves its maximum at $p = 0,3$, thus agreeing with intuition.

[This can be further verified by plotting the probability mass function of the **binomial distribution** (2.46) $120 p^3 (1 - p)^7$ versus p .]

EXAMPLE 2 For the **normal distribution** (2.50) with known **standard deviation** (2.37), it can be shown in general that the likelihood function takes its maximum at μ equal to the sample mean^{N15}.

1.39 profile likelihood function

likelihood function (1.38) as a function of a single **parameter** (2.9) with all other parameters set to maximize it

1.40 hypothesis

H

statement about a **population** (1.1)

NOTE Commonly the statement about the population concerns one or more **parameters** (2.9) in a **family of distributions** (2.8) or about the family of distributions.

1.41 null hypothesis

H_0

hypothesis (1.40) to be tested by means of a **statistical test** (1.48)

EXAMPLE 1 In a **random sample** (1.6) of independent **random variables** (2.10) with the same **normal distribution** (2.50) with unknown **mean** (2.35) and unknown **standard deviation** (2.37), a null hypothesis for the mean μ may be that the mean is less than or equal to a given value μ_0 and this is usually written in the following way: $H_0: \mu \leq \mu_0$.

N14) Nationale Fußnote: Siehe hierzu Definition 2.24.

N15) Nationale Fußnote: Im Englischen heißt es hier versehentlich falsch „sample mean“. Dies ist in der deutschen Übersetzung redaktionell korrigiert worden.

BEISPIEL 2 Eine Nullhypothese darf sein, dass eine Normalverteilung das statistische Modell für eine **Grundgesamtheit** (1.1) ist. Für diesen Typ von Nullhypothese sind Mittelwert und Standardabweichung nicht spezifiziert.

BEISPIEL 3 Eine Nullhypothese darf sein, dass das statistische Modell für eine **Grundgesamtheit** (1.1) eine symmetrische Verteilung ist. Für diesen Typ von Nullhypothese ist die Art der Verteilung nicht spezifiziert.

ANMERKUNG 1 Es sei ausdrücklich festgestellt, dass die Nullhypothese eine Teilmenge eines Satzes von möglichen Wahrscheinlichkeitsverteilungen betreffen kann.

ANMERKUNG 2 Diese Definition sollte nicht losgelöst von **Alternativhypothese** (1.42) und **statistischem Test** (1.48) gesehen werden, da das korrekte Testen von Hypothesen alle drei Bestandteile erfordert.

ANMERKUNG 3 In der Praxis wird die Nullhypothese nie bewiesen, sondern die Einschätzung einer bestimmten Situation kann es eher nicht zulassen, die Nullhypothese abzulehnen. Der ursprüngliche Beweggrund für die Durchführung eines Hypothesentests wird wohl die Erwartung gewesen sein, dass das Ergebnis eine bestimmte, für das vorliegende Problem relevante Alternative unterstützen würde.

ANMERKUNG 4 Wenn die Hypothese nicht abgelehnt werden kann, ist das kein „Beweis“ für ihre Gültigkeit, sondern eher ein Anzeichen dafür, dass es zu wenig Anhaltspunkte gibt, sie in Zweifel zu ziehen. Entweder die Nullhypothese (oder ein Sachverhalt in nächster Nähe) trifft tatsächlich zu, oder der Stichprobenumfang ist unzureichend, um eine Abweichung von ihr festzustellen.

ANMERKUNG 5 Manchmal ist das anfängliche Interesse auf die Nullhypothese gerichtet, doch auch die Möglichkeit einer Abweichung kann von Interesse sein. Angemessene Berücksichtigung des Stichprobenumfangs und des Vermögens, eine bestimmte Abweichung oder Alternative zu erkennen, kann zur Aufstellung eines Prüfverfahrens zur geeigneten Beurteilung der Nullhypothese führen.

ANMERKUNG 6 Die Annahme der Alternativhypothese im Gegensatz dazu, dass die Nullhypothese nicht abgelehnt werden kann, ist ein positives Ergebnis in dem Sinne, dass es die zugrunde liegende Vermutung stützt. Ablehnung der Nullhypothese zugunsten der Alternativhypothese ist ein Ergebnis mit mehr Eindeutigkeit als ein Ergebnis „die Nullhypothese kann zum jetzigen Zeitpunkt nicht abgelehnt werden“.

ANMERKUNG 7 Die Nullhypothese ist der Ausgangspunkt für die Konstruktion einer zur Beurteilung der Nullhypothese verwendeten geeigneten **Prüfgröße** (1.52).

ANMERKUNG 8 Die Nullhypothese wird oft mit H_0 bezeichnet [H mit tiefgestelltem Index Null. Diese Null wird (im Englischen) trotzdem manchmal „oh“ oder „nought“ gesprochen.].

EXAMPLE 2 A null hypothesis may be that the statistical model for a **population** (1.1) is a normal distribution. For this type of null hypothesis, the mean and standard deviation are not specified.

EXAMPLE 3 A null hypothesis may be that the statistical model for a population consists of a symmetric distribution. For this type of null hypothesis, the form of the distribution is not specified.

NOTE 1 Explicitly, the null hypothesis can consist of a subset from a set of possible probability distributions.

NOTE 2 This definition should not be considered in isolation from **alternative hypothesis** (1.42) and **statistical test** (1.48), as proper application of hypothesis testing requires all of these components.

NOTE 3 In practice, one never proves the null hypothesis, but rather the assessment in a given situation may be inadequate to reject the null hypothesis. The original motivation for conducting the hypothesis test would likely have been an expectation that the outcome would favour a specific alternative hypothesis relevant to the problem at hand.

NOTE 4 Failure to reject the null hypothesis is not “proof” of its validity but may rather be an indication that there is insufficient evidence to dispute it. Either the null hypothesis (or a close proximity to it) is in fact true, or the sample size is insufficient to detect a difference from it.

NOTE 5 In some situations, initial interest is focused on the null hypothesis, but the possibility of a departure may be of interest. Proper consideration of sample size and power in detecting a specific departure or alternative can lead to the construction of a test procedure for appropriately assessing the null hypothesis.

NOTE 6 The acceptance of the alternative hypothesis in contrast to failing to reject the null hypothesis is a positive result in that it supports the conjecture of interest. Rejection of the null hypothesis in favour of the alternative is an outcome with less ambiguity than an outcome such as “failure to reject the null hypothesis at this time”.

NOTE 7 The null hypothesis is the basis for constructing the corresponding **test statistic** (1.52) used to assess the null hypothesis.

NOTE 8 The null hypothesis is often denoted H_0 (H having a subscript of zero although the zero is sometimes pronounced “oh” or “nought”).

ANMERKUNG 9 Die die Nullhypothese kennzeichnende Teilmenge sollte, wenn möglich, so ausgewählt sein, dass die Behauptung mit der zu untersuchenden Annahme nicht vereinbar ist. Vergleiche dazu Anmerkung 2 von 1.48 und das Beispiel in 1.49.

1.42

Alternativhypothese

H_A, H_1

Behauptung, die eine Menge oder eine Teilmenge aller möglichen zugelassenen **Wahrscheinlichkeitsverteilungen** (2.11) auswählt, die nicht zur **Nullhypothese** (1.41) gehören

BEISPIEL 1 Die Alternativhypothese zur Nullhypothese in Beispiel 1 von 1.41 ist, dass der **Erwartungswert** (2.35) größer als der spezifizierte Wert ist, was wie folgt ausgedrückt wird: $H_A: \mu > \mu_0$.

BEISPIEL 2 Die Alternativhypothese zur Nullhypothese in Beispiel 2 von 1.41 ist, dass das statistische Modell für die Grundgesamtheit keine **Normalverteilung** (2.50) ist.

BEISPIEL 3 Die Alternativhypothese zur Nullhypothese in Beispiel 3 von 1.41 ist, dass das statistische Modell der Grundgesamtheit eine asymmetrische Verteilung ist. Für diese Alternativhypothese wird die spezielle Ausprägung der Asymmetrie nicht spezifiziert.

ANMERKUNG 1 Die Alternativhypothese ist das Komplement zur Nullhypothese.

ANMERKUNG 2 Die Alternativhypothese kann auch mit H_1 oder H_A bezeichnet werden, ohne eindeutige Präferenz, solange die Symbolik der Darstellungsart der Nullhypothese entspricht.

ANMERKUNG 3 Die Alternativhypothese ist eine Behauptung, die der Nullhypothese widerspricht. Die dazugehörige **Prüfgröße** (1.52) wird verwendet, um zwischen der Nullhypothese und Alternativhypothesen zu unterscheiden.

ANMERKUNG 4 Die Alternativhypothese sollte nicht ohne die Nullhypothese und den **statistischen Test** (1.48) betrachtet werden.

ANMERKUNG 5 Die Annahme der Alternativhypothese im Gegensatz dazu, dass die Nullhypothese nicht abgelehnt werden kann, ist ein positives Ergebnis, in dem Sinne, dass es die zugrunde liegende Vermutung stützt.

1.43

einfache Hypothese

Hypothese (1.40), die eine einzelne Verteilung in einer **Verteilungsfamilie** (2.8) näher beschreibt

NOTE 9 The subset identifying the null hypothesis should, if possible, be selected in such a way that the statement is incompatible with the conjecture to be studied. See Note 2 to 1.48 and the example in 1.49.

1.42

alternative hypothesis

H_A, H_1

statement which selects a set or a subset of all possible admissible **probability distributions** (2.11) which do not belong to the **null hypothesis** (1.41)

EXAMPLE 1 The alternative hypothesis to the null hypothesis given in Example 1 of 1.41 is that the **mean** (2.35) is larger than the specified value, which is written in the following way: $H_A: \mu > \mu_0$.

EXAMPLE 2 The alternative hypothesis to the null hypothesis given in Example 2 of 1.41 is that the statistical model of the population is not a **normal distribution** (2.50).

EXAMPLE 3 The alternative hypothesis to the null hypothesis given in Example 3 of 1.41 is that the statistical model of the population consists of an asymmetric distribution. For this alternative hypothesis, the specific form of asymmetry is not specified.

NOTE 1 The alternative hypothesis is the complement of the null hypothesis.

NOTE 2 The alternative hypothesis can also be denoted H_1 or H_A with no clear preference as long as the symbolism parallels the null hypothesis notation.

NOTE 3 The alternative hypothesis is a statement which contradicts the null hypothesis. The corresponding **test statistic** (1.52) is used to decide between the null and alternative hypotheses.

NOTE 4 The alternative hypothesis should not be considered in isolation from the null hypothesis nor **statistical test** (1.48).

NOTE 5 The acceptance of the alternative hypothesis in contrast to failing to reject the null hypothesis is a positive result in that it supports the conjecture of interest.

1.43

simple hypothesis

hypothesis (1.40) that specifies a single distribution in a **family of distributions** (2.8)

ANMERKUNG 1 Eine einfache Hypothese ist eine **Nullhypothese** (1.41) oder **Alternativhypothese** (1.42), für die die ausgewählte Teilmenge aus einer einzigen **Wahrscheinlichkeitsverteilung** (2.11) besteht.

ANMERKUNG 2 In einer **Zufallsstichprobe** (1.6) von unabhängigen **Zufallsvariablen** (2.10) mit derselben **Normalverteilung** (2.50) mit unbekanntem **Erwartungswert** (2.35) und bekannter **Standardabweichung** (2.37) σ ist eine einfache Hypothese für den Erwartungswert μ , dass der Erwartungswert gleich einem gegebenen Wert μ_0 ist, und dies wird gewöhnlich wie folgt geschrieben: $H_0: \mu = \mu_0$.

ANMERKUNG 3 Eine einfache Hypothese legt die **Wahrscheinlichkeitsverteilung** (2.11) vollständig fest.

1.44

zusammengesetzte Hypothese

Hypothese (1.40), die mehr als eine **Verteilung** (2.11) aus einer **Verteilungsfamilie** (2.8) näher beschreibt

BEISPIEL 1 Die in den Beispielen in 1.41 und 1.42 genannten **Nullhypothesen** (1.41) und **Alternativhypothesen** (1.42) sind alle Beispiele von zusammengesetzten Hypothesen.

BEISPIEL 2 In 1.48 ist die Nullhypothese in Fall 3 eine einfache Hypothese. Die Nullhypothese in Beispiel 4 ist ebenfalls eine einfache Hypothese. Die anderen Hypothesen in 1.48 sind zusammengesetzte Hypothesen.

ANMERKUNG Eine zusammengesetzte Hypothese ist eine Null- oder Alternativhypothese, für die die ausgewählte Teilmenge aus mehr als einer einzigen Wahrscheinlichkeitsfunktion besteht.

1.45

Signifikanzniveau

α

<statistischer Test> maximale **Wahrscheinlichkeit** (2.5), die **Nullhypothese** (1.41) abzulehnen, wenn sie in Wirklichkeit zutrifft

ANMERKUNG Wenn die Nullhypothese eine **einfache Hypothese** (1.43) ist, dann wird die Wahrscheinlichkeit, die Nullhypothese abzulehnen, obwohl sie zutrifft, ein einzelner Wert.

1.46

Irrtum 1. Art^{N16)}

Ablehnung der **Nullhypothese** (1.41), obwohl sie in Wirklichkeit zutrifft

NOTE 1 A simple hypothesis is a **null hypothesis** (1.41) or **alternative hypothesis** (1.42) for which the selected subset consists of only a single **probability distribution** (2.11).

NOTE 2 In a **random sample** (1.6) of independent **random variables** (2.10) with the same **normal distribution** (2.50) with unknown **mean** (2.35) and known **standard deviation** (2.37) σ , a simple hypothesis for the mean μ is that the mean is equal to a given value μ_0 and this is usually written in the following way: $H_0: \mu = \mu_0$.

NOTE 3 A simple hypothesis specifies the **probability distribution** (2.11) completely.

1.44

composite hypothesis

hypothesis (1.40) that specifies more than one **distribution** (2.11) in a **family of distributions** (2.8)

EXAMPLE 1 The **null hypotheses** (1.41) and the **alternative hypotheses** (1.42) given in the examples in 1.41 and 1.42 are all examples of composite hypotheses.

EXAMPLE 2 In 1.48, the null hypothesis in Case 3 of Example 3 is a simple hypothesis. The null hypothesis in Example 4 is also a simple hypothesis. The other hypotheses in 1.48 are composite.

NOTE A composite hypothesis is a null hypothesis or alternative hypothesis for which the selected subset consists of more than a single probability distribution.

1.45

significance level

α

<statistical test> maximum **probability** (2.5) of rejecting the **null hypothesis** (1.41) when in fact it is true

NOTE If the null hypothesis is a **simple hypothesis** (1.43), then the probability of rejecting the null hypothesis if it were true becomes a single value.

1.46

Type I error

rejection of the **null hypothesis** (1.41) when in fact it is true

N16) Nationale Fußnote: Die deutsche Benennung dieses Begriffs war bisher „Fehler 1. Art“. Diese Benennung kann noch in anderen Dokumenten zu finden sein.