

Statistische Auswertung von Daten

Testverfahren und Vertrauensbereiche für Anteile

DIN
55 303
Teil 6

Statistical interpretation of data; tests and confidence intervals relating to proportions

Einsprüche bis 31. Jul 1989

Anwendungswarnvermerk auf der letzten Seite beachten!

Zusammenhang mit bei der International Organization for Standardization (ISO) in Vorbereitung befindlichen Normen, siehe Erläuterungen.

I N H A L T

	Seite
1 Anwendungsbereich und Zweck	2
2 Begriffe	2
3 Punktschätzung für den Anteil p	3
4 Vertrauensbereich für den Anteil p	3
5 Testverfahren für Hypothesen über Anteile p	3
5.1 Allgemeine Bemerkungen	3
5.2 Vergleich des Anteils mit einem vorgegebenen Wert p_0	3
5.2.1 Testverfahren	3
5.2.2 Operationscharakteristik	4
5.2.3 Ermittlung des Stichprobenumfangs n	4
5.3 Vergleich zweier Anteile	4
6 Formblätter	4
A Vertrauensbereich für den Anteil p	5
B Vergleich des Anteils p mit einem vorgegebenen Wert p_0	8
C Ermittlung der kritischen Werte des Tests nach Formblatt B	11
D Vergleich zweier Anteile	13
7 Tabellen und Nomogramm	18
Tabelle 1A: Obere Vertrauensgrenzen für den Anteil p im einseitigen Fall; $n \leq 30$, $q = 0,95$	18
Tabelle 1B: Obere Vertrauensgrenzen für den Anteil p im einseitigen Fall; $n \leq 30$, $q = 0,975$	19
Tabelle 1C: Obere Vertrauensgrenzen für den Anteil p im einseitigen Fall; $n \leq 30$, $q = 0,99$	20
Tabelle 1D: Obere Vertrauensgrenzen für den Anteil p im einseitigen Fall; $n \leq 30$, $q = 0,995$	21
Tabelle 2: Quantile der standardisierten Normalverteilung, u_q	22
Tabelle 3: Quantile der F-Verteilung	23
Bild 1. Nomogramm der Binomialverteilung	28
Anhang A Verwendete Zeichen	29
Anhang B Berechnung der Operationscharakteristik des Tests nach Formblatt B ...	30
Anhang C Beispiele für ausgefüllte Formblätter	31

Fortsetzung Seite 2 bis 46

1 Anwendungsbereich und Zweck

Die Norm enthält Schätz- und Testverfahren für Anteile in der Grundgesamtheit. Unter Anteil ist dabei das Verhältnis der Einheiten in der Grundgesamtheit, bei denen ein Alternativmerkmal einen festgelegten Wert von seinen beiden möglichen Werten annimmt (vergleiche Abschnitt 2, Anmerkung 2), zu der Anzahl aller Einheiten in der Grundgesamtheit zu verstehen. Folgende Fragestellungen werden behandelt:

- Punktschätzung für einen Anteil (siehe Abschnitt 3)
- Berechnung des Vertrauensbereiches für einen Anteil (siehe Abschnitt 4 und Formblatt A und Anhang C)
- Vergleich eines Anteils mit einem vorgegebenen Wert sowie Ermittlung der kritischen Werte und der Operationscharakteristik. Ferner wird der Stichprobenumfang ermittelt, wenn er nicht vorgegeben ist (siehe Abschnitt 5.2 und Formblätter B und C und Anhänge B und C)
- Vergleich zweier Anteile (siehe Abschnitt 5.3 und Formblatt D und Anhang C)

Für die Anwendung der Verfahren muß eine Stichprobe stochastisch unabhängiger Ermittlungsergebnisse aus jeder der betrachteten Grundgesamtheiten vorliegen. Durch die Probenahme darf sich der Anteil der Merkmalsträger (siehe Abschnitt 2) in der Grundgesamtheit nicht verändern. Das ist exakt nur dann erreichbar, wenn die Probenahme "mit Zurücklegen" erfolgt. Eine Veränderung ist bei beliebiger, zufälliger Probenahme vernachlässigbar, wenn der Umfang der Grundgesamtheit ausreichend groß im Verhältnis zum Stichprobenumfang ist; als Faustregel kann ein Verhältnis von 10 : 1 gelten.

2 Begriffe

Einheiten, bei denen ein Alternativmerkmal einen festgelegten Wert von seinen beiden möglichen Werten annimmt, werden in dieser Norm Merkmalsträger¹⁾ genannt.

Anmerkung 1: Beispiel für Werte von Alternativmerkmalen: "Bauteil fehlerhaft", "Verbandskasten im Fahrzeug nicht vorhanden". Es handelt sich also um eine "ja-nein-Feststellung".

Anmerkung 2: Aus jedem beliebigen anderen qualitativen oder quantitativen Merkmal läßt sich ein Alternativmerkmal ableiten, indem einem festgelegten Wertebereich des qualitativen oder quantitativen Merkmals ein festgelegter Wert des Alternativmerkmals zugeordnet wird. Beispiele: "Gewicht des Packungsinhaltes unterhalb des vorgegebenen Grenzwertes", "Länge des Tisches größer als 2,5 m", "Zahl der Leukozyten innerhalb des vorgegebenen Bereiches".

Im Folgenden werden die weiteren hier benutzten Begriffe in alphabetischer Ordnung aufgeführt.

Begriff	Definitionen nach	
	DIN 55 350	DIN 13 303
Alternativhypothese	Teil 24	Teil 2
Alternativmerkmal	Teil 12	
Beobachtungswert	Teil 12	
Einheit	Teil 11	
erreichbares Signifikanzniveau		Teil 2
erreichbares Vertrauensniveau		Teil 2
erwartungstreue, erwartungstreue Schätzfunktion	Teil 24	Teil 2
Fehler 1. Art	Teil 24	
Fehler 2. Art	Teil 24	
Grundgesamtheit	Teil 14	
kritischer Bereich	Teil 24	
kritischer Wert	Teil 24	
Merkmal	Teil 12	
Nullhypothese	Teil 24	Teil 2
Operationscharakteristik	Teil 24	Teil 2
Quantil	Teil 21	Teil 1
Schätzung, Punktschätzung	Teil 24	Teil 2
Bereichsschätzung		
Schätzwert	Teil 24	Teil 2
Signifikanzniveau	Teil 24	Teil 2
standardisierte Normalverteilung	Teil 22	Teil 1
Stichprobeneinheit, Stichprobe	Teil 14	
Stichprobenumfang	Teil 14	
Testverfahren, Test	Teil 24	Teil 2
Vertrauensbereich	Teil 24	Teil 2
Vertrauensgrenze	Teil 24	Teil 2
Vertrauensniveau	Teil 24	Teil 2

¹⁾ Diese Benennung wird terminologisch noch als unbefriedigend angesehen. Der Leser dieses Norm-Entwurfes wird gebeten, Verbesserungsvorschläge an den Ausschuss Qualitätssicherung und angewandte Statistik (AQS) einzureichen.

3 Punktschätzung für den Anteil p

Eine aus einer Stichprobe ermittelte Punktschätzung $\hat{p}$ für den Anteil p ist gegeben durch die Schätzfunktion: $\hat{p} = x/n$, wobei x die Anzahl der Merkmalsträger in der Stichprobe und n der Stichprobenumfang sind. Diese Schätzfunktion ist bei zufälliger Probenahme erwartungstreu unabhängig davon, wie groß der Stichprobenumfang n und der Umfang der Grundgesamtheit sind und unabhängig davon, ob bei der Probenahme eine Veränderung des Anteils p in der Grundgesamtheit vernachlässigbar ist oder nicht.

4 Vertrauensbereich für den Anteil p

Die Grenzen des Vertrauensbereiches für p hängen unter anderem von dem gewählten Vertrauensniveau (vergleiche "Vertrauensniveau" in DIN 13 303 Teil 2), $1-\alpha$, ab. Letzteres kann wegen des diskreten Charakters der Verteilung der Anzahl der Merkmalsträger in der Stichprobe in der Regel nicht exakt eingehalten werden. Es ist immer größer oder gleich dem erreichten Vertrauensniveau (vergleiche "erreichbares Vertrauensniveau" in DIN 13 303 Teil 2), welches in dieser Norm nicht ermittelt wird.

Die Berechnung eines Vertrauensbereiches für p ist in Formblatt A beschrieben.

5 Testverfahren für Hypothesen über Anteile p

5.1 Allgemeine Bemerkungen

Für die Praxis bieten die Formblätter B bis D eine Zusammenstellung der wichtigsten Nullhypothesen über Anteile sowie Rechenschemata für die Ausführung der Tests. Für die Anwendung der Verfahren ist es notwendig, die geeignete Nullhypothese H_0 sowie den Stichprobenumfang n (die Stichprobenumfänge n_1 und n_2) festzulegen und das Signifikanzniveau α zu wählen. Letzteres kann wegen des diskreten Charakters der Verteilung der Anzahl der Merkmalsträger in der Stichprobe in der Regel nicht exakt eingehalten werden. Es ist immer kleiner oder gleich dem erreichten Signifikanzniveau (vergleiche "erreichbares Signifikanzniveau" in DIN 13 303 Teil 2), welches nach Anhang B berechnet werden kann. Die Alternativhypothese H_1 ist in den Formblättern nicht aufgeführt, weil sie jeweils alle Werte von p umfaßt, welche nicht Gegenstand der Nullhypothese sind.

Beispielsweise muß bei der Anwendung von Formblatt B für den Vergleich des Anteils mit einem vorgegebenen Wert eine der drei folgenden Nullhypothesen H_0 (mit den daraus folgenden Alternativhypothesen H_1) gewählt werden:

- a) einseitiger Test mit $H_0: p \geq p_0$ $H_1: p < p_0$
- b) einseitiger Test mit $H_0: p \leq p_0$ $H_1: p > p_0$
- c) zweiseitiger Test mit $H_0: p = p_0$ $H_1: p \neq p_0$

mit p_0 : vorgegebener Wert

Als Testergebnis ist die jeweilige Nullhypothese zu verwerfen oder nicht zu verwerfen.

Verwerfen der Nullhypothese bedeutet Annahme der Alternativhypothese. Nichtverwerfen der Nullhypothese bedeutet nicht notwendigerweise Annahme der Nullhypothese (vergleiche Abschnitt 5.2.2).

5.2 Vergleich des Anteils mit einem vorgegebenen Wert

5.2.1 Testverfahren

Die Testverfahren für die Nullhypothesen

$$H_0: p \geq p_0$$

$$H_0: p \leq p_0$$

$$H_0: p = p_0$$

mit p_0 : vorgegebener Wert

sind in dem Formblatt B beschrieben. Sie sind besonders einfach, wenn der kritische Wert (die kritischen Werte) für die vorliegenden Werte von n , p und α bekannt ist(sind). Der kritische Wert (die kritischen Werte) kann(können) z.B. durch vorangegangene wiederholte Ausführungen des Tests nach Formblatt B erkannt worden oder nach Formblatt C ermittelt worden sein.

Kritische Werte können auch aus dem Larson-Nomogramm, Bild 1, Seite 28, wie folgt entnommen werden:

Bei $H_0: p \geq p_0$: Man suche den Schnittpunkt der Linie für den vorliegenden Stichprobenumfang n und der geraden Verbindungslinie von dem vorgegebenen Wert p_0 auf der p -Achse und α auf der P -Achse auf. Liegt der Schnittpunkt zwischen den Linien für zwei benachbarte x -Werte, x und $(x+1)$, oder genau auf der Linie eines Wertes x , so ist der kritische Wert $c_{n,p} = x+1$.

Bei $H_0 : p \leq p_0$: Man suche den Schnittpunkt der Linie für den vorliegenden Stichprobenumfang n und der geraden Verbindungslinie von dem gegebenen Wert p_0 auf der p -Achse und $1-\alpha$ auf der P -Achse auf. Liegt der Schnittpunkt zwischen den Linien für zwei benachbarte x -Werte, x und $(x+1)$, so ist der kritische Wert $c_{0,e} = x+1$. Liegt der Schnittpunkt genau auf der Linie eines Wertes x , so ist der kritische Wert $c_{0,e} = x$.

Bei $H_0 : p = p_0$: Man findet die kritischen Werte $c_{un,z}$ und $c_{ob,z}$ analog $c_{un,e}$ bzw. $c_{ob,e}$, wobei α durch $\alpha/2$ ersetzt wird.

5.2.2 Operationscharakteristik

Die Berechnung der Operationscharakteristik - einschließlich der Wahrscheinlichkeit des Fehlers 1. Art, des erreichten Signifikanzniveaus und der Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art - ist im Anhang B beschrieben. Dazu muß bei einem einseitigen Test der kritische Wert bekannt sein; bei einem zweiseitigen Test müssen die beiden kritischen Werte bekannt sein (siehe Abschnitt 5.2.1). Ferner muß der Wert unter der Alternativhypothese, $p = p_1$, gewählt werden, für den die Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art berechnet werden soll.

5.2.3 Ermittlung des Stichprobenumfangs, n für das Testverfahren

Wenn ein Stichprobenumfang nicht bereits festgelegt ist (z. B. aus wirtschaftlichen oder technischen Gründen), soll derjenige für das Testverfahren zu verwendende Stichprobenumfang n ermittelt werden, der bei gegebener Nullhypothese H_0 nach Abschnitt 5.2.1 und Alternativhypothese $H_1 : p = p_1$ (p_1 siehe Anhang A) die genauest mögliche Einhaltung des gewählten Signifikanzniveaus α und der vorgegebenen oder gewählten Wahrscheinlichkeit des Fehlers 2. Art, β , ermöglicht. Dazu werden in das Larson-Nomogramm, Bild 1., die durch die untenstehende Anleitung definierten Geraden 1 und 2 eingetragen. Dabei sind p_0 und p_1 auf der p -Skala und α , $(1-\alpha)$, $\alpha/2$, $(1-\alpha/2)$, β und $(1-\beta)$ auf der P -Skala aufzutragen.

Anleitung zur Ermittlung des Stichprobenumfangs n aus dem Larson-Nomogramm (Bild 1)

Fall	Gerade 1 von p_0 nach	Gerade 2 von p_1 nach
$H_0 : p \geq p_0$ $p_1 < p_0$	α	$1-\beta$
$H_0 : p \leq p_0$ $p_1 > p_0$	$1-\alpha$	β
$H_0 : p = p_0$ $p_1 > p_0$	$1-\alpha/2$	β
$H_0 : p = p_0$ $p_1 < p_0$	$\alpha/2$	$1-\beta$

Der Schnittpunkt beider Geraden führt mit Hilfe des Netzes des Nomogramms zu dem gesuchten Wert n auf der n -Skala. n ist, falls es nicht ganzzahlig ist, auf die nächsthöhere ganze Zahl aufzurunden.

5.3 Vergleich zweier Anteile

Der Vergleich zweier Anteile ist in Formblatt D beschrieben. Er kann z. B. von Interesse sein, wenn:

- verschiedene Merkmale mit demselben Ermittlungsverfahren an denselben Einheiten betrachtet werden, oder
- dasselbe Merkmal mit verschiedenen Ermittlungsverfahren an denselben Einheiten betrachtet wird, oder
- dasselbe Merkmal mit demselben Ermittlungsverfahren an Einheiten aus verschiedenen Grundgesamtheiten betrachtet wird.

Die Berechnung der Operationscharakteristik dieses Tests ist kompliziert. Deshalb wurde im Interesse der Praktikabilität dieser Norm darauf verzichtet.

6 Formblätter

FORMBLATT A**Vertrauensbereich für den Anteil p**

Merkmal:
 Ermittlungsverfahren:
 Einheiten:
 Kriterium für Merkmalsträger:
 Bemerkungen: -

Abgrenzung des Vertrauensbereiches für p:

- a) einseitig nach oben ☐
 b) einseitig nach unten ☐
 c) zweiseitig ☐

Gewähltes Vertrauensniveau: $1-\alpha =$

Stichprobenumfang n =

Anzahl der Merkmalsträger in der Stichprobe x =

Ermittlung der Vertrauensgrenzen:

zu a)

a.1) Verfahren für $n \leq 30$ ☐

a.1.1) Fall $x = n$ ☐
 $P_{ob,e} = 1$

a.1.2) Fall $x < n$ ☐

Tabellenwert aus Tabelle 1 für das bekannte n bei $X = x$ und $q = 1-\alpha$ ablesen (Tabellenwert ist gleich Vertrauensgrenze): $T_{n,x;1-\alpha} = P_{ob,e} =$

a.2) Verfahren für $n > 30$ ☐

a.2.1) Fall $x = 0$ ☐

Berechnung:

$$P_{ob,e} = 1 - \alpha^{1/n} =$$

a.2.2) Fall $x = n$ ☐
 $P_{ob,e} = 1$

a.2.3) Fall $0 < x < n$ ☐

Aus Tabelle 2 bei $q = 1-\alpha$ ablesen: $u_{1-\alpha} =$

Berechnung:

$$a = 16(n+1)^2 =$$

$$b = 32(n+1) \cdot (x+1) - 8u_{1-\alpha}^2(-n+2x+1) =$$

$$c = 16(x+1)^2 + u_{1-\alpha}^2(u_{1-\alpha}^2 - 8(x+1)) =$$

$$P_{ob,e} = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

zu b)

b.1) Verfahren für $n \leq 30$ ☐

b.1.1) Fall $x = 0$ ☐
 $P_{un,e} = 0$

Formblatt A (Fortsetzung)b.1.2) Fall $x > 0$ ☐Tabellenwert aus Tabelle 1 für das bekannte n bei $X = n-x$ und $q = 1-\alpha$ ablesen: $T_{n,n-x;1-\alpha} =$ Berechnung: $p_{un,e} = 1 - T_{n,n-x;1-\alpha} =$ b.2) Verfahren für $n > 30$ ☐b.2.1) Fall $x = 0$ ☐ $p_{un,e} = 0$ b.2.2) Fall $x = n$ ☐Berechnung: $p_{un,e} = \alpha^{1/n} =$ b.2.3) Fall $0 < x < n$ ☐Aus Tabelle 2 bei $q = 1-\alpha$ ablesen: $u_{1-\alpha} =$ Berechnung:

$$a = 16(n+1)^2 =$$

$$b = 32(n+1)x - 8u_{1-\alpha}^2(-n+2x-1) =$$

$$c = 16x^2 + u_{1-\alpha}^2(u_{1-\alpha}^2 - 8x) =$$

$$p_{un,e} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

zu c)c.1) Verfahren für $n \leq 30$ ☐

c.1.1) Obere Vertrauensgrenze

c.1.1.1) Fall $x = n$ ☐ $p_{ob,z} = 1$ c.1.1.2) Fall $x < n$ ☐Tabellenwert aus Tabelle 1 für das bekannte n bei $X = x$ und $q = 1-\alpha/2$ ablesen
(Tabellenwert ist gleich Vertrauensgrenze): $T_{n,x;1-\alpha/2} = p_{ob,z} =$

c.1.2) Untere Vertrauensgrenze

c.1.2.1) Fall $x = 0$ ☐c.1.2.2) Fall $x > 0$ ☐Tabellenwert aus Tabelle 1 für das bekannte n bei $X = n-x$ und $q = 1-\alpha/2$ ablesen:
 $T_{n,n-x;1-\alpha/2} =$ Berechnung: $p_{un,z} = 1 - T_{n,n-x;1-\alpha/2} =$ c.2) Verfahren für $n > 30$ ☐

c.2.1) Obere Vertrauensgrenze

c.2.1.1) Fall $x = 0$ ☐Berechnung: $p_{ob,z} = 1 - (\alpha/2)^{1/n} =$ c.2.1.2) Fall $x = n$ ☐ $p_{ob,z} = 1$ c.2.1.3) Fall $0 < x < n$ ☐Aus Tabelle 2 bei $q = 1-\alpha/2$ ablesen: $u_{1-\alpha/2} =$

Formblatt A (Fortsetzung)Berechnung:

$$a = 16(n+1)^2 =$$

$$b = 32(n+1)(x+1) - 8u^2_{1-\alpha/2}(-n+2x+1) =$$

$$c = 16(x+1)^2 + u^2_{1-\alpha/2}(u^2_{1-\alpha/2} - 8(x+1)) =$$

$$p_{ob,z} = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

c.2.2) Untere Vertrauensgrenze

c.2.2.1) Fall $x = 0$ ☐

$$p_{un,z} = 0$$

c.2.2.2) Fall $x = n$ ☐

$$\text{Berechnung: } p_{un,z} = (\alpha/2)^{1/n} =$$

c.2.2.3) Fall $0 < x < n$ ☐Aus Tabelle 2 bei $q = 1 - \alpha/2$ ablesen $u_{1-\alpha/2} =$ Berechnung:

$$a = 16(n+1)^2 =$$

$$b = 32(n+1)x - 8u^2_{1-\alpha/2}(-n+2x-1) =$$

$$c = 16x^2 + u^2_{1-\alpha/2}(u^2_{1-\alpha/2} - 8x) =$$

$$p_{un,z} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} =$$

Ergebnis:bei a) $p \leq p_{ob,e} =$ bei b) $p_{un,e} = \leq p$ bei c) $p_{un,z} =$; $p_{ob,z} =$; $p_{un,z} \leq p \leq p_{ob,z}$

FORMBLATT B

Vergleich des Anteils p mit einem vorgegebenen Wert p_0

Merkmal:
 Ermittlungsverfahren:
 Einheiten:
 Kriterium für Merkmalsträger:
 Bemerkungen:

Gewählte Nullhypothese, H_0 :

a) einseitiger Test mit $H_0 : p \geq p_0$ ☐

b) einseitiger Test mit $H_0 : p \leq p_0$ ☐

c) zweiseitiger Test mit $H_0 : p = p_0$ ☐

Vorgegebener Wert $p_0 =$

Gewähltes Signifikanzniveau: $\alpha =$

Stichprobenumfang $n =$

Anzahl der Mehrmalsträger in der Stichprobe: $x =$

Testverfahren

I) Der kritische Wert (die kritischen Werte) ist(sind) bereits bekannt (siehe Abschnitt 5.2.1 und gegebenenfalls Formblatt C): ☐

bei a) $c_{un,e} =$

bei b) $c_{ob,e} =$

bei c) $c_{un,z} =$ $c_{ob,z} =$

H_0 wird verworfen, wenn

bei a) $x < c_{un,e}$

bei b) $x > c_{ob,e}$

bei c) $x < c_{un,z}$ oder $x > c_{ob,z}$,

anderenfalls nicht verworfen.

II) Der kritische Wert (die kritischen Werte) ist(sind) nicht bekannt: ☐

zu a)

a.1) Fall $x \geq p_0 \cdot n$ ☐

H_0 wird nicht verworfen.

a.2) Fall $x < p_0 \cdot n$ ☐

a.2.1) Verfahren für $n \leq 30$ ☐

Man ermittle nach Formblatt A, a) die sich aus n und x zum geforderten Vertrauensniveau $1-\alpha$ ergebende Vertrauensgrenze für die einseitige Abgrenzung nach oben:

$p_{ob,e} =$

H_0 wird verworfen, wenn $p_{ob,e} < p_0$, anderenfalls nicht verworfen.

a.2.2) Verfahren für $n > 30$ ☐

Formblatt B (Fortsetzung)a.2.2.1) Fall $x = 0$ ☐Berechnung: $p_{ob,e} = 1 - \alpha^{1/n} =$

(vergleiche Formblatt A.a.2.1)

 H_0 wird verworfen, wenn $p_{ob,e} < p_0$, anderenfalls nicht verworfen.a.2.2.2) Fall $0 < x < n$ ☐Aus Tabelle 2 bei $q = 1 - \alpha$ ablesen $u_{1-\alpha} =$ Berechnung:

$$u_1 = 2 (\sqrt{(n-x)p_0} - \sqrt{(x+1)(1-p_0)}) =$$

 H_0 wird verworfen, wenn $u_1 > u_{1-\alpha}$, anderenfalls nicht verworfen.

zu b)

b.1) Fall $x \leq p_0 \cdot n$ ☐ H_0 wird nicht verworfen.b.2) Fall $x > p_0 \cdot n$ ☐b.2.1) Verfahren für $n \leq 30$ ☐Man ermittle nach Formblatt A, b) die sich aus n und x zum geforderten Vertrauensniveau $1 - \alpha$ ergebende Vertrauensgrenze für die einseitige Abgrenzung nach unten: $p_{un,e} =$ H_0 wird verworfen, wenn $p_{un,e} > p_0$, anderenfalls nicht verworfen.b.2.2) Verfahren für $n > 30$ ☐b.2.2.1) Fall $x = n$ ☐Berechnung: $p_{un,e} = \alpha^{1/n} =$

(vergleiche Formblatt A.b.2.2)

 H_0 wird verworfen, wenn $p_{un,e} > p_0$, anderenfalls nicht verworfen.b.2.2.2) Fall $0 < x < n$ ☐Aus Tabelle 2 bei $q = 1 - \alpha$ ablesen $u_{1-\alpha} =$ Berechnung:

$$u_2 = 2 (\sqrt{x(1-p_0)} - \sqrt{(n-x+1)p_0}) =$$

 H_0 wird verworfen, wenn $u_2 > u_{1-\alpha}$, anderenfalls nicht verworfen.

Formblatt B (Fortsetzung)zu c
c.1)Verfahren für $n \leq 30$ ☐

Man ermittle nach Formblatt A, c) die sich aus n und x zum geforderten Vertrauensniveau $1-\alpha$ ergebenden Vertrauensgrenzen für die zweiseitige Abgrenzung:

$p_{un,z} =$ und

$p_{ob,z} =$

H_0 wird verworfen, wenn $p_{un,z} > p_0$ oder wenn $p_{ob,z} < p_0$, anderenfalls nicht verworfen.

c.2) Verfahren für $n > 30$ ☐c.2.1) Fall $x = 0$ ☐

Berechnung: $p_{ob,z} = 1 - (\alpha/2)^{1/n} =$

H_0 wird verworfen, wenn $p_{ob,z} < p_0$, anderenfalls nicht verworfen.

c.2.2) Fall $x = n$ ☐

Berechnung: $p_{un,z} = (\alpha/2)^{1/n} =$

H_0 wird verworfen, wenn $p_{un,z} > p_0$, anderenfalls nicht verworfen.

c.2.3) Fall $0 < x < n$ ☐

Aus Tabelle 2 bei $q = 1-\alpha/2$ ablesen: $u_{1-\alpha/2} =$

Berechnung:

$$u_1 = 2 \left(\sqrt{(n-x)p_0} - \sqrt{(x+1)(1-p_0)} \right) =$$

$$u_2 = 2 \left(\sqrt{x(1-p_0)} - \sqrt{(n-x+1)p_0} \right) =$$

H_0 wird verworfen, wenn $u_1 > u_{1-\alpha/2}$ oder, wenn $u_2 > u_{1-\alpha/2}$, anderenfalls nicht verworfen.

Testergebnis:

H_0 wird verworfen

☐

H_0 wird nicht verworfen

☐

FORMBLATT C

Ermittlung der kritischen Werte des Tests nach Formblatt B

Merkmal:
 Ermittlungsverfahren:
 Einheiten:
 Kriterium für Merkmalsträger:
 Bemerkungen:

Gewählte Nullhypothese:

- a) einseitiger Test mit $H_0 : p \geq p_0$ ☐
 b) einseitiger Test mit $H_0 : p \leq p_0$ ☐
 c) zweiseitiger Test mit $H_0 : p = p_0$ ☐

Vorgegebener Wert $p_0 =$

Gewähltes Signifikanzniveau $\alpha =$

Stichprobenumfang $n =$

Ermittlung der kritischen Werte:

zu a) $c_{un,e}$ ist der kleinste nichtnegative ganzzahlige Wert x , für den der Test nach Formblatt B II.a) nicht zum Verwerfen von H_0 führt. Durch Anwendung des Formblattes B, II.a) auf verschiedene Werte x ist $c_{un,e}$ durch Probieren iterativ zu ermitteln¹⁾, d. h. es sind diejenigen beiden Werte für x zu finden, die sich um 1 voneinander unterscheiden und von denen der eine zum Verwerfen und der andere zum Nichtverwerfen der Nullhypothese führt. Falls nötig, kann man für x einen Startwert, x_{start} , wie folgt erhalten:

Berechnungen: $n \cdot p_0$, gerundet auf eine ganze Zahl, ist $x^* =$

$$p_{un,e}|_{x=x^*} = (p_{un,e}|_{x=x^*} \text{ aus Formblatt A.b)})$$

$$n \cdot p_{un,e}|_{x=x^*}, \text{ gerundet auf eine ganze Zahl, ist } x_{start} =$$

Auswertung der Testergebnisse von Formblatt B, II.a):

bei $x \leq c_{un,e}-1 =$ wird H_0 verworfen,

bei $x \geq c_{un,e} =$ wird H_0 nicht verworfen.

zu b) $c_{ob,e}$ ist der größte ganzzahlige Wert x , für den der Test nach Formblatt B, II.b) nicht zum Verwerfen von H_0 führt. Durch Anwendung des Formblattes B, II.b) auf verschiedene Werte x ist $c_{ob,e}$ durch Probieren iterativ zu ermitteln¹⁾, d. h. es sind diejenigen beiden Werte für x zu finden, die sich um 1 voneinander unterscheiden und von denen der eine zum Verwerfen und der andere zum Nichtverwerfen der Nullhypothese führt. Falls nötig, kann man für x einen Startwert x_{start} , wie folgt erhalten:

Berechnungen: $n \cdot p_0$, gerundet auf eine ganze Zahl, ist $x^* =$

$$p_{ob,e}|_{x=x^*} = (p_{ob,e}|_{x=x^*} \text{ aus Formblatt A.a)})$$

$$n \cdot p_{ob,e}|_{x=x^*}, \text{ gerundet auf eine ganze Zahl, ist } x_{start} =$$

Auswertung der Testergebnisse von Formblatt B, II.b):

bei $x \leq c_{ob,e} =$ wird H_0 nicht verworfen,

bei $x \geq c_{ob,e}+1 =$ wird H_0 verworfen.

¹⁾ Bei extremen Werten für p_0 und/oder bei sehr kleinem Stichprobenumfang n kann es vorkommen, daß ein kritischer Wert bzw. einer der kritischen Werte nicht existiert.

Formblatt C - Fortsetzung

- zu c) $c_{un,z}$ ist kleinste nichtnegative ganzzahlige Wert x und $c_{ob,z}$ ist der größte ganzzahlige Wert x für den der Test nach Formblatt B, II.c) nicht zum Verwerfen von H_0 führt. Durch Anwendung des Formblattes B, II.c) auf verschiedene Werte x sind $c_{un,z}$ und $c_{ob,z}$ durch Probieren iterativ zu ermitteln¹⁾, d. h. es sind für $c_{un,z}$ und $c_{ob,z}$ jeweils diejenigen beiden Werte für x zu finden, die sich um 1 voneinander unterscheiden und von denen der eine zum Verwerfen der anderen zum Nichtverwerfen der Nullhypothese führt. Falls nötig, kann man für x Startwerte, x_{start} , wie folgt erhalten:

Berechnungen: $n \cdot p_0$, gerundet auf eine ganze Zahl, ist $x^* =$

$$p_{un,z|x=x^*} =$$

$$p_{ob,z|x=x^*} =$$

($p_{un,z|x=x^*}$ und $p_{ob,z|x=x^*}$ aus Formblatt A.c))

$n \cdot p_{un,z|x=x^*}$, gerundet auf eine ganze Zahl, ist $x_{start,unten} =$

$n \cdot p_{ob,z|x=x^*}$, gerundet auf eine ganze Zahl, ist $x_{start,oben} =$

Auswertung der Testergebnisse von Formblatt B, II.c):

bei $x \leq c_{un,z}-1 =$ wird H_0 verworfen

bei $x = c_{un,z} =$ bis $x = c_{ob,z} =$ wird H_0 nicht verworfen

bei $x \geq c_{ob,z}+1 =$ wird H_0 verworfen.

Ergebnis:

zu a) $c_{un,e} =$

zu b) $c_{ob,e} =$

zu c) $c_{un,z} =$

$c_{ob,z} =$

¹⁾ Bei extremen Werten für p_0 und/oder bei sehr kleinem Stichprobenumfang n kann es vorkommen, daß ein kritischer Wert bzw. einer der kritischen Werte nicht existiert.

FORMBLATT D
Vergleich zweier Anteile

Merkmal:
 Ermittlungsverfahren:
 Einheiten:
 Kriterium für Merkmalsträger:
 Bemerkungen:

Gewählte Nullhypothese:

- a) einseitiger Test mit $H_0 : p_1 \geq p_2$ ☐
 b) einseitiger Test mit $H_0 : p_1 \leq p_2$ ☐
 c) zweiseitiger Test mit $H_0 : p_1 = p_2$ ☐

Gewähltes Signifikanzniveau: $\alpha =$

Umfang der Stichprobe 1 : $n_1 =$

Umfang der Stichprobe 2 : $n_2 =$

Anzahl der Merkmalsträger in der Stichprobe 1 : $x_1 =$

Anzahl der Merkmalsträger in der Stichprobe 2 : $x_2 =$

Prüfung auf Vorliegen eines trivialen Falls:

- bei a) $\frac{x_1}{n_1} \geq \frac{x_2}{n_2}$ trifft zu ☐ trifft nicht zu ☐
 bei b) $\frac{x_1}{n_1} \leq \frac{x_2}{n_2}$ trifft zu ☐ trifft nicht zu ☐
 bei c) $\frac{x_1}{n_1} = \frac{x_2}{n_2}$ trifft zu ☐ trifft nicht zu ☐

Im zutreffenden Fall wird die Nullhypothese nicht verworfen und das Testergebnis kann sofort angegeben werden. Anderenfalls sind die folgenden Schritte auszuführen, die endgültig sowohl zum Verwerfen als auch zum Nicht-Verwerfen von H_0 führen können.

Testverfahren für die nichttrivialen Fälle

Wenn mindestens einer der 4 Werte n_1 , n_2 , (x_1+x_2) , $(n_1+n_2-x_1-x_2)$ kleiner oder gleich $(n_1+n_2)/4$ ist, ist die Binomial-Approximation, I, anzuwenden, anderenfalls die Approximation durch die Normalverteilung, II. Falls bei Anwendung der Binomialapproximation interpolieren in der Tabelle der Quantile der F-Verteilung nötig ist, kann auch dann, wenn nicht alle Werte n_1 , n_2 , (x_1+x_2) , $(n_1+n_2-x_1-x_2)$ größer als $(n_1+n_2)/4$ sind, die Approximation durch die Normalverteilung angewendet werden, sofern entweder n_1 und n_2 oder (x_1+x_2) und $(n_1+n_2-x_1-x_2)$ in derselben Größenordnung liegen.

Entscheidung:

- Die Binomial-Approximation wird angewendet ☐
 Die Approximation durch die Normalverteilung wird angewendet ☐

Formblatt D (Fortsetzung)I Binomial-ApproximationFestlegung von Hilfsvariablen: K_1, K_2, η_1, η_2 :Wenn entweder gilt: $[n_2 < n_1 \text{ und } n_2 < (x_1 + x_2)]$ oder: $[(n_1 + n_2 - x_1 - x_2) < n_1 \text{ und } (n_1 + n_2 - x_1 - x_2) < (x_1 + x_2)]$,

werden eingesetzt:

$$\eta_1 = n_2 =$$

$$\eta_2 = n_1 =$$

$$K_1 = n_2 - x_2 =$$

$$K_2 = n_1 - x_1 =$$

anderenfalls werden eingesetzt:

$$\eta_1 = n_1 =$$

$$\eta_2 = n_2 =$$

$$K_1 = x_1 =$$

$$K_2 = x_2 =$$

Berechnung von Prüfwerten und Ermittlung von Tabellenwerten:

I.1) Fall $\eta_1 \leq K_1 + K_2$ 

$$\text{zu a) } F_2 = \frac{(\eta_1 - K_1)(K_1 + 2K_2)}{(K_1 + 1)(\eta_1 + 2\eta_2 - K_1 - 2K_2 + 1)} =$$

Freiheitsgrade der F-Verteilung:

$$f_1 = 2(K_1 + 1) =$$

$$f_2 = 1(\eta_1 - K_1) =$$

Tabellenwert aus Tabelle 3 bei $q = 1 - \alpha$ für f_1 und f_2 ablesen, gegebenenfalls interpolieren:
 $F_{f_1, f_2; 1 - \alpha} =$

$$\text{zu b) } F_1 = \frac{K_1(\eta_1 + 2\eta_2 - K_1 - 2K_2)}{(\eta_1 - K_1 + 1)(K_1 + 2K_2 + 1)} =$$

Freiheitsgrade der F-Verteilung:

$$f_1 = 2(\eta_1 - K_1 + 1) =$$

$$f_2 = 2K_1 =$$

Tabellenwert aus Tabelle 3 bei $q = 1 - \alpha$ für f_1 und f_2 ablesen, gegebenenfalls interpolieren:
 $F_{f_1, f_2; 1 - \alpha} =$ zu c)c.1) Fall $\frac{K_1}{\eta_1} > \frac{K_2}{\eta_2}$  F_1, f_1 und f_2 wie in Fall b) ermitteln:

$$F_1 = \quad f_1 = \quad f_2 =$$

Tabellenwert aus Tabelle 3 bei $q = 1 - \alpha/2$ für f_1 und f_2 ablesen, gegebenenfalls interpolieren: $F_{f_1, f_2; 1 - \alpha/2} =$