

DIN EN ISO 20501



ICS 81.060.30

Entwurf

Einsprüche bis 2022-10-19
Vorgesehen als Ersatz für
DIN EN 843-5:2007-03 und
DIN EN 843-5
Berichtigung 1:2007-06

**Hochleistungskeramik –
Weibullstatistik von Festigkeitswerten (ISO 20501:2019);
Deutsche und Englische Fassung prEN ISO 20501:2022**

Fine ceramics (advanced ceramics, advanced technical ceramics) –
Weibull statistics for strength data (ISO 20501:2019);
German and English version prEN ISO 20501:2022

Céramiques techniques –
Analyse statistique de Weibull des données de résistance à la rupture (ISO 20501:2019);
Version allemande et anglaise prEN ISO 20501:2022

Anwendungswarnvermerk

Dieser Norm-Entwurf mit Erscheinungsdatum 2022-08-19 wird der Öffentlichkeit zur Prüfung und
Stellungnahme vorgelegt.

Weil die beabsichtigte Norm von der vorliegenden Fassung abweichen kann, ist die Anwendung dieses Entwurfs
besonders zu vereinbaren.

Stellungnahmen werden erbeten

- vorzugsweise online im Norm-Entwurfs-Portal von DIN unter www.din.de/go/entwuerfe bzw. für Norm-Entwürfe der DKE auch im Norm-Entwurfs-Portal der DKE unter www.entwuerfe.normenbibliothek.de, sofern dort wiedergegeben;
- oder als Datei per E-Mail an nmp@din.de möglichst in Form einer Tabelle. Die Vorlage dieser Tabelle kann im Internet unter www.din.de/go/stellungnahmen-norm-entwuerfe oder für Stellungnahmen zu Norm-Entwürfen der DKE unter www.dke.de/stellungnahme abgerufen werden;
- oder in Papierform an den DIN-Normenausschuss Materialprüfung (NMP), 10772 Berlin oder Am DIN-Platz, Burggrafenstr. 6, 10787 Berlin.

Die Empfänger dieses Norm-Entwurfs werden gebeten, mit ihren Kommentaren jegliche relevanten Patentrechte, die sie kennen, mitzuteilen und unterstützende Dokumentationen zur Verfügung zu stellen.

Gesamtumfang 91 Seiten

DIN-Normenausschuss Materialprüfung (NMP)

Nationales Vorwort

Dieses Dokument (prEN ISO 20501:2022) wurde vom Technischen Komitee ISO/TC 206 „Fine ceramics“ in Zusammenarbeit mit dem Technischen Komitee CEN/TC 184 „Hochleistungskeramik“ erarbeitet, dessen Sekretariat von DIN (Deutschland) gehalten wird.

Das zuständige deutsche Normungsgremium ist der Arbeitsausschuss NA 062-02-91 AA „Terminologie von Hochleistungskeramik und Prüfung von monolithischen keramischen Werkstoffen und Pulvern“ im DIN-Normenausschuss Materialprüfung (NMP).

Um Zweifelsfälle in der Übersetzung auszuschließen, ist die englische Originalfassung beigelegt. Die Nutzungsbedingungen für den deutschen Text des Norm Entwurfes gelten gleichermaßen auch für den englischen Text.

Aktuelle Informationen zu diesem Dokument können über die Internetseiten von DIN (www.din.de) durch eine Suche nach der Dokumentennummer aufgerufen werden.

Änderungen

Gegenüber DIN EN 843-5:2007-03 und DIN EN 843-5 Berichtigung 1:2007-06 wurden folgende Änderungen vorgenommen:

- a) identische Übernahme der aktuelleren ISO 20501;
- b) Norm redaktionell überarbeitet.

<i>Titel de:</i>	Hochleistungskeramik — Weibullstatistik von Festigkeitswerten (ISO 20501:2019)
<i>Titel en:</i>	Fine ceramics (advanced ceramics, advanced technical ceramics) — Weibull statistics for strength data (ISO 20501:2019)
<i>Titel fr:</i>	Céramiques techniques — Analyse statistique de Weibull des données de résistance à la rupture (ISO 20501:2019)

Inhalt

	Seite
Europäisches Vorwort	3
Vorwort	4
Einleitung	5
1 Anwendungsbereich	6
2 Normative Verweisungen	6
3 Begriffe	6
3.1 Fehler-Grundgesamtheiten	6
3.2 Mechanische Prüfung	8
3.3 Statistische Begriffe	8
3.4 Weibull-Verteilungen	10
4 Symbole	11
5 Bedeutung und Anwendung	12
6 Verfahren A: Maximum-Likelihood-Parameter-Schätzfunktionen für Fehler, die aus einer einzigen Grundgesamtheit stammen	13
6.1 Allgemeines	13
6.2 Zensierte Daten	13
6.3 Likelihood-Funktion	14
6.4 Berichtigung der systematischen Abweichung	14
6.5 Vertrauensbereiche	16
7 Verfahren B: Maximum-Likelihood-Parameter-Schätzfunktionen für konkurrierende Fehler-Grundgesamtheiten	20
7.1 Allgemeines	20
7.2 Zensierte Daten	21
7.3 Likelihood-Funktion	21
8 Durchführung	22
8.1 Ausreißer	22
8.2 Fraktographie	23
8.3 Graphische Darstellung	23
9 Prüfbericht	25
Anhang A (informativ) Umrechnung in werkstoffspezifische Parameter der Festigkeitsverteilung	27
Anhang B (informativ) Erläuternde Beispiele	29
Anhang C (informativ) Probekörper mit nicht identifiziertem Bruchursprung	36
C.1 Die vier Optionen	36
C.1.1 Allgemeines	36
C.1.2 Option a)	36
C.1.3 Option b)	36
C.1.4 Option c)	37
C.1.5 Option d)	37
C.2 Richtige Anwendung und Umsetzung der vier Optionen	38
Anhang D (informativ) Fortran-Programm	39
Literaturhinweise	46

Europäisches Vorwort

Dieses Dokument (prEN ISO 20501:2022) wurde vom Technischen Komitee ISO/TC 206 „Fine ceramics“ in Zusammenarbeit mit dem Technischen Komitee CEN/TC 184 „Hochleistungskeramik“ erarbeitet, dessen Sekretariat von DIN gehalten wird.

Dieses Dokument ist derzeit zur parallelen Umfrage vorgelegt.

Dieses Dokument wird EN 843-5:2006 ersetzen.

Anerkennungsnotiz

Der Text von ISO/DIS 20501:2019 wurde von CEN als prEN ISO 20501:2022 ohne irgendeine Abänderung genehmigt.

Rückmeldungen oder Fragen zu diesem Dokument sollten an das jeweilige nationale Normungsinstitut des Anwenders gerichtet werden. Eine vollständige Liste dieser Institute ist auf den Internetseiten von CEN abrufbar.

Vorwort

ISO (die Internationale Organisation für Normung) ist eine weltweite Vereinigung nationaler Normungsinstitute (ISO-Mitgliedsorganisationen). Die Erstellung von Internationalen Normen wird üblicherweise von Technischen Komitees von ISO durchgeführt. Jede Mitgliedsorganisation, die Interesse an einem Thema hat, für welches ein Technisches Komitee gegründet wurde, hat das Recht, in diesem Komitee vertreten zu sein. Internationale staatliche und nichtstaatliche Organisationen, die in engem Kontakt mit ISO stehen, nehmen ebenfalls an der Arbeit teil. ISO arbeitet bei allen elektrotechnischen Normungsthemen eng mit der Internationalen Elektrotechnischen Kommission (IEC) zusammen.

Die Verfahren, die bei der Entwicklung dieses Dokuments angewendet wurden und die für die weitere Pflege vorgesehen sind, werden in den ISO/IEC-Direktiven, Teil 1 beschrieben. Es sollten insbesondere die unterschiedlichen Annahmekriterien für die verschiedenen ISO-Dokumentenarten beachtet werden. Dieses Dokument wurde in Übereinstimmung mit den Gestaltungsregeln der ISO/IEC-Direktiven, Teil 2 erarbeitet (siehe www.iso.org/directives).

Es wird auf die Möglichkeit hingewiesen, dass einige Elemente dieses Dokuments Patentrechte berühren können. ISO ist nicht dafür verantwortlich, einige oder alle diesbezüglichen Patentrechte zu identifizieren. Details zu allen während der Entwicklung des Dokuments identifizierten Patentrechten finden sich in der Einleitung und/oder in der ISO-Liste der erhaltenen Patenterklärungen (siehe www.iso.org/patents).

Jeder in diesem Dokument verwendete Handelsname dient nur zur Unterrichtung der Anwender und bedeutet keine Anerkennung.

Für eine Erläuterung des freiwilligen Charakters von Normen, der Bedeutung ISO-spezifischer Begriffe und Ausdrücke in Bezug auf Konformitätsbewertungen sowie Informationen darüber, wie ISO die Grundsätze der Welthandelsorganisation (WTO, en: World Trade Organization) hinsichtlich technischer Handelshemmnisse (TBT, en: Technical Barriers to Trade) berücksichtigt, siehe www.iso.org/iso/foreword.html.

Dieses Dokument wurde vom Technischen Komitee ISO/TC 206, *Fine ceramics* erarbeitet.

Diese zweite Ausgabe ersetzt die erste Ausgabe (ISO 20501:2003), die technisch überarbeitet wurde. Sie enthält auch die Technische Berichtigung ISO 20501:2003/Cor.1:2009.

Die wesentlichen Änderungen im Vergleich zur Vorgängerausgabe sind folgende:

- die Begriffe in Abschnitt 3 wurden aktualisiert und geändert;
- ein Verfahren zur Behandlung einer höheren Anzahl von Probekörpern ($N > 120$) wurde für Verfahren A eingeführt: Maximum-Likelihood-Parameter-Schätzfunktionen für Fehler, die aus einer einzigen Grundgesamtheit stammen;
- in Anhang D wurden Beispiel-Codes für die Berechnung der Maximum-Likelihood-Parameter der Weibull-Verteilung mit moderner Analysesoftware hinzugefügt.

Rückmeldungen oder Fragen zu diesem Dokument sollten an das jeweilige nationale Normungsinstitut des Anwenders gerichtet werden. Eine vollständige Auflistung dieser Institute ist unter www.iso.org/members.html zu finden.

Einleitung

Messungen der Bruchfestigkeit werden aus einem von zwei Gründen durchgeführt: entweder für einen Vergleich der relativen Qualität von zwei Werkstoffen bezüglich der Bruchfestigkeit, oder zur Vorhersage der Versagenswahrscheinlichkeit einer interessierenden Konstruktion. Dieses Dokument ermöglicht Schätzungen der Verteilungsparameter, die für beides benötigt werden. Darüber hinaus unterstützt dieses Dokument die Einbeziehung von mechanischen Eigenschaftsdaten und der fraktographischen Analyse.

1 Anwendungsbereich

Dieses Dokument behandelt die Angabe von uniaxialen Festigkeitsdaten sowie die Schätzung von Wahrscheinlichkeitsverteilungsparametern für sprödbrechende Hochleistungskeramik. Die Bruchfestigkeit von Hochleistungskeramik wird als stetige Zufallsgröße behandelt. Üblicherweise wird eine Anzahl von Probekörpern mit wohldefinierter Geometrie unter wohldefinierten isothermen Belastungsbedingungen zum Versagen gebracht. Die Last, bei der jeder einzelne Probekörper versagt, wird aufgezeichnet. Die resultierenden Bruchspannungen werden verwendet, um, Parameterschätzwerte, die mit der zugrunde gelegten Verteilung einer Grundgesamtheit verbunden sind, zu erhalten.

Dieses Dokument ist auf die Annahme beschränkt, dass die den Bruchfestigkeiten zugrundeliegende Verteilung die zweiparametrische Weibull-Verteilung mit Größenskalierung ist. Des Weiteren ist dieses Dokument auf Probekörper (Zugprobe, Biegeprobe, auf Druck beanspruchter Ring usw.) beschränkt, die hauptsächlich uniaxialen Spannungszuständen unterzogen werden. In 6.4 und 6.5 werden Verfahren zur Berichtigung von systematischen Abweichungen in den geschätzten Weibull-Parametern behandelt, sowie zur Berechnung von Vertrauensgrenzen derjenigen Schätzwerte aus Datensätzen, bei denen alle Fehler aus einer einzigen Fehler-Grundgesamtheit stammen (d. h. eine einzige Versagensart). Bei Stichproben, bei denen Fehler aus mehreren unabhängigen Fehler-Grundgesamtheiten stammen (z. B. konkurrierende Versagensarten), sind die in 6.4 und 6.5 behandelten Verfahren zur Berichtigung systematischer Abweichungen und für Vertrauensgrenzen nicht anwendbar.

2 Normative Verweisungen

Es gibt keine normativen Verweisungen in diesem Dokument.

3 Begriffe

Für die Anwendung dieses Dokuments gelten die folgenden Begriffe.

ISO und IEC stellen terminologische Datenbanken für die Verwendung in der Normung unter den folgenden Adressen bereit:

- ISO Online Browsing Platform: verfügbar unter <https://www.iso.org/obp>
- IEC Electropedia: verfügbar unter <http://www.electropedia.org/>

ANMERKUNG Siehe auch Literaturhinweis [1].

3.1 Fehler-Grundgesamtheiten

3.1.1

Fehler

Inhomogenität, Diskontinuität oder (Fehler)merkmal in einem Werkstoff, die/das aufgrund einer mechanischen Last als Spannungskonzentrator wirkt, und bei der/dem daher ein bestimmtes Risiko für mechanisches Versagen besteht

Anmerkung 1 zum Begriff: Der Fehler wird zum kritischen Fehler, wenn er in einem Probekörper, der versagt hat, den Bruch auslöst.

3.1.2

zensierte Daten

Festigkeitsmessungen (d. h. eine Stichprobe), die eingestellte Beobachtungen enthalten, wie beispielsweise diejenigen, die durch mehrere konkurrierende oder zusammenwirkende Fehler-Grundgesamtheiten hervorgerufen werden

Anmerkung 1 zum Begriff: Es wird eine Probe betrachtet, bei der durch Fraktographie eindeutig festgestellt wurde, dass drei zusammenwirkende Fehlerverteilungen vorliegen (wenngleich diese Diskussion für eine Stichprobe mit jeder beliebigen Anzahl zusammenwirkender Fehlerverteilungen anwendbar ist). Die drei zusammenwirkenden Fehlerverteilungen werden hier als Verteilung A, Verteilung B und Verteilung C bezeichnet. Auf der Grundlage fraktographischer Analysen wurde der Festigkeit jedes Probekörpers eine Fehlerverteilung zugeordnet, die den Bruch ausgelöst hat. Bei der Schätzung von Parametern, die die Festigkeitsverteilung im Zusammenhang mit der Fehlerverteilung A charakterisieren, sind alle Probekörper (und nicht nur diejenigen, die aufgrund von Fehlern vom Typ A versagt haben), in die Analyse einzubeziehen, um die Effizienz und Genauigkeit der resultierenden Parameterschätzwerte sicherzustellen. Die Festigkeit eines Probekörpers, der aufgrund eines Fehlers vom Typ B (oder Typ C) versagt hat, wird als *rechtszensierte* Beobachtung in Bezug auf die Fehlerverteilung A behandelt. Ein Versagen aufgrund eines Fehlers vom Typ B (oder Typ C) beschränkt oder zensiert die Informationen bezüglich der Fehler vom Typ A in einem Probekörper, indem die Prüfung eingestellt wird, bevor es aufgrund eines Fehlers vom Typ A zum Versagen kommt [2]. Die Festigkeit durch den schwerwiegendsten Fehler vom Typ A ist in denjenigen Probekörpern, die aufgrund von Fehlern vom Typ B (oder Typ C) versagt haben, höher als die beobachtete Festigkeit (und steht somit *rechts von* dieser). Jedoch werden keine Informationen bezüglich der Größenordnung dieses Unterschieds geliefert. Die in diesem Dokument enthaltenen Analyseverfahren zensierter Daten nutzen diese unvollständigen Informationen, um effiziente und relativ erwartungstreue Schätzwerte der Verteilungsparameter bereitzustellen.

3.1.3

konkurrierende Versagensarten

deutlich voneinander abweichende Arten von bruchauslösenden Ereignissen, die aus zusammenwirkenden (konkurrierenden) Fehlerverteilungen resultieren

3.1.4

zusammengesetzte Fehlerverteilung

jede Art des Vorliegens mehrerer Fehlerverteilungen, bei denen es sich weder um rein zusammenwirkende noch rein ausschließliche Fehlerverteilungen handelt

Anmerkung 1 zum Begriff: Ein einfaches Beispiel ist, wenn jeder Probekörper die Fehlerverteilung A enthält, während ein gewisser Anteil der Probekörper auch eine zweite unabhängige Fehlerverteilung B enthält.

3.1.5

zusammenwirkende Fehlerverteilung konkurrierende Fehlerverteilung

Art des Vorliegens mehrerer Fehlerverteilungen in einem homogenen Werkstoff, bei der jeder Probekörper dieses Werkstoffs repräsentative Fehler aus jeder unabhängigen Fehler-Grundgesamtheit enthält

Anmerkung 1 zum Begriff: Innerhalb eines bestimmten Probekörpers sind alle Fehler-Grundgesamtheiten gleichzeitig vorhanden und konkurrieren untereinander, um den Bruch zu verursachen.

3.1.6

ausschließliche Fehlerverteilung gemischte Fehlerverteilung

Art des Vorliegens mehrerer Fehlerverteilungen, die durch Mischen und zufälliges Auswählen von Probekörpern aus zwei oder mehr Ausführungen eines Werkstoffs erreicht wird, wobei jede Ausführung eine andere einzelne Fehler-Grundgesamtheit enthält

Anmerkung 1 zum Begriff: Demnach enthält jeder Probekörper Fehler ausschließlich aus einer einzigen Verteilung, die Gesamtdatenmenge jedoch spiegelt mehr als eine, die Festigkeit beeinflussende Fehlerart wider.

3.1.7

untypischer Fehler

die Festigkeit beeinflussender Fehler, der in einem bestimmten Anteil der Probekörper beobachtet wird, jedoch in dem konstruierten Bauteil nicht vorhanden sein kann

Anmerkung 1 zum Begriff: Ein Beispiel sind durch die maschinelle Bearbeitung auftretende Fehler in geschliffenen Biegeproben, die in gesinterten Bauteilen des gleichen Werkstoffs nicht vorkommen.

3.2 Mechanische Prüfung

3.2.1

wirksamer Messabschnitt

derjenige Teil der Probekörpergeometrie, der in den Integrationsgrenzen der Weibull-Verteilungsfunktion eingeschlossen ist (Volumen, Fläche oder Kantenlänge)

Anmerkung 1 zum Begriff: Bei Zugproben kann die Integration auf den gleichmäßig belasteten mittigen Messabschnitt beschränkt sein, oder sie kann so erweitert werden, dass Übergangs- und Schaftbereiche eingeschlossen sind.

3.2.2

Fraktographie

Analyse und Charakterisierung von Mustern, die auf der Bruchoberfläche eines Probekörpers erzeugt werden

Anmerkung 1 zum Begriff: Fraktographie kann angewendet werden, um die Art und Lage des Ursprungs eines kritischen Bruchs zu ermitteln, der zu einem katastrophalen Ausfall in einem Hochleistungskeramik-Probekörper oder -Bauteil führt.

3.3 Statistische Begriffe

3.3.1

Vertrauensbereich

Bereich, für den erwartet werden würde, dass darin der wahre Grundgesamtheitsparameter zu finden ist

Anmerkung 1 zum Begriff: Vertrauensbereiche sind funktionell abhängig von der Art der angewendeten Schätzfunktion und der Stichprobengröße. Das Erwartungsniveau ist mit einem bestimmten Vertrauensniveau verbunden. Wenn Vertrauensgrenzen mit dem Parameter-Schätzwert verglichen werden, kann die Unsicherheit quantifiziert werden, die mit einem Punkt-Schätzwert eines Grundgesamtheits-Parameters verbunden ist.

3.3.2

Vertrauensniveau

Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Grundgesamtheits-Parameter in einen festgelegten Vertrauensbereich fällt

3.3.3

Schätzfunktion

Funktion zur Berechnung eines Schätzwerts einer bestimmten Größe auf der Grundlage beobachteter Daten

Anmerkung 1 zum Begriff: Der resultierende Wert für eine bestimmte Probe kann ein Schätzwert eines Verteilungsparameters (ein Punkt-Schätzwert) sein, der mit der zugrundeliegenden Grundgesamtheit verbunden ist, z. B. ist das arithmetische Mittel einer Stichprobe eine Schätzfunktion des Verteilungsmittelwerts.

3.3.4

Grundgesamtheit

Erhebung von Daten oder Objekten, die betrachtet werden

3.3.5

Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

pdf, en: probability density function

Funktion $f(x)$ für die stetige Zufallsgröße X , wenn

$$f(x) \geq 0 \quad (1)$$

und

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \quad (2)$$

Anmerkung 1 zum Begriff: Die Wahrscheinlichkeit, dass die Zufallsgröße X einen Wert zwischen a und b annimmt, ist gegeben durch

$$Pr(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx \quad (3)$$

3.3.6

kumulative Verteilungsfunktion

Funktion $F(x)$, die die Wahrscheinlichkeit beschreibt, dass eine stetige Zufallsgröße X einen Wert von weniger oder gleich einer Zahl x annimmt

Anmerkung 1 zum Begriff: Daher steht die kumulative Verteilungsfunktion (cdf, en: cumulative distribution function) zur Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(x)$ in Zusammenhang durch

$$F(x) = Pr(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^x f(x') dx' \quad (4)$$

Die Ableitung von Gleichung (4) nach x zeigt, dass die pdf einfach die Ableitung der cdf ist:

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} \quad (5)$$

Anmerkung 2 zum Begriff: Nach 3.3.5 ist $F(x)$ eine monoton steigende Funktion im Bereich zwischen 0 und 1.

3.3.7

Rangschätzfunktion

Funktion, die die Versagenswahrscheinlichkeit bei einem bestimmten Festigkeitsmesswert innerhalb einer in Rangzahlen eingeteilten Probe abschätzt

3.3.8

Stichprobe

Erfassung von Messungen oder Beobachtungen, die aus einer festgelegten Grundgesamtheit entnommen wurden

3.3.9

statistische systematische Abweichung

Art einer gleich bleibenden numerischen Abweichung eines Schätzwertes in Bezug auf den wahren zugrunde gelegten Wert, die den meisten Schätzwerten anhaftet

3.3.10

erwartungstreue Schätzfunktion

Schätzfunktion, die hinsichtlich der statistischen systematischen Abweichung berichtigt wurde

3.4 Weibull-Verteilungen

3.4.1

Weibull-Verteilung

stetige Verteilungsfunktion, die zur Beschreibung empirischer Daten aus Messungen genutzt werden kann, bei denen die stetige Zufallsgröße x eine zweiparametrische Weibull-Verteilung aufweist, wenn die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gegeben ist durch

$$f(x) = \left(\frac{m}{\beta}\right) \left(\frac{x}{\beta}\right)^{m-1} \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^m\right] \text{ wenn } x \geq 0 \quad (6)$$

oder

$$f(x) = 0 \text{ wenn } x < 0 \quad (7)$$

und die kumulative Verteilungsfunktion gegeben ist durch

$$F(x) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{x}{\beta}\right)^m\right] \text{ wenn } x \geq 0 \quad (8)$$

oder

$$F(x) = 0 \text{ wenn } x < 0 \quad (9)$$

Dabei ist

m der Weibull-Modul (oder der Formparameter) (> 0);

β der Weibull-Skalenparameter (> 0).

Anmerkung 1 zum Begriff: Die Zufallsgröße, welche die uniaxiale Zugfestigkeit von Hochleistungskeramik repräsentiert, nimmt ausschließlich positive Werte an. Falls die Zufallsgröße, welche die uniaxiale Zugfestigkeit einer Hochleistungskeramik repräsentiert, durch Gleichung (6) bis Gleichung (9) charakterisiert wird, dann ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Hochleistungskeramik unter einer aufgetragenen uniaxialen Zugspannung σ versagen wird, durch die kumulative Verteilungsfunktion gegeben.

$$P_f = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m\right] \text{ wenn } \sigma \geq 0 \quad (10)$$

$$P_f = 0 \text{ wenn } \sigma < 0 \quad (11)$$

Dabei ist

P_f die Versagenswahrscheinlichkeit;

σ_0 die charakteristische Weibull-Festigkeit.

Anmerkung 2 zum Begriff: Die charakteristische Weibull-Festigkeit hängt vom uniaxialen Probekörper (Zug-, Biegeprobekörper oder auf Druck beanspruchter Ring) ab und ändert sich mit der Geometrie des Probekörpers. Darüber hinaus hat die charakteristische Weibull-Festigkeit Einheiten der Spannung, und ist im Bericht mittels der SI-Einheiten Pa oder wie jeweils angemessen MPa oder GPa anzugeben.

Anmerkung 3 zum Begriff: Ein alternativer Ausdruck für die Versagenswahrscheinlichkeit ist gegeben durch

$$P_f = 1 - \exp\left[-\left(\frac{1}{V_0}\right) \int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m dV\right] \text{ wenn } \sigma > 0 \quad (12)$$

$$P_f = 0 \text{ wenn } \sigma \leq 0 \quad (13)$$

Die Integration in der Exponentialfunktion wird über alle zugbeanspruchten Bereiche des Probekörpervolumens (V) durchgeführt, sofern die die Festigkeit beeinflussenden Fehler zufällig über das Volumen des Werkstoffs verteilt sind, oder über alle zugbeanspruchten Bereiche der Fläche des Probekörpers, sofern Fehler auf die Probekörper-Oberfläche beschränkt sind. Mitunter erfolgt die Integration über einen wirksamen Messabschnitt statt über das Gesamtvolumen oder die Gesamtfläche. In Gleichung (12) ist σ_0 der Weibull-Werkstoff-Skalenparameter, und kann als charakteristische Weibull-Festigkeit eines Probekörpers mit Einheitsvolumen oder -fläche beschrieben werden, der einer gleichmäßigen uniaxialen Zugbelastung unterzogen wird. Bei einer gegebenen Probekörpergeometrie können Gleichung (10) und Gleichung (12) kombiniert werden, so dass sich ein Ausdruck ergibt, der σ_0 zu σ_θ in Bezug setzt (dies bedeutet: $\sigma_\theta V_0^{1/m} = \sigma_0$). Weitere Ausführungen bezüglich dieses Problems können Anhang A entnommen werden.

4 Symbole

A	Fläche des Probekörpers
b	Messabschnittsmaß, Grundfläche einer Biegeprobe
d	Messabschnittsmaß, Tiefe einer Biegeprobe
$f(x)$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion
$F(x)$	kumulative Verteilungsfunktion
L	Likelihood-Funktion
L_i	Länge der inneren Auflagerabstände bei einer Biegeprobe
L_o	Länge der äußeren Auflagerabstände bei einer Biegeprobe
m	Weibull-Modul
$\hat{m}$	Schätzwert des Weibull-Moduls
$\hat{m}_U$	erwartungstreuer Schätzwert des Weibull-Moduls
N	Anzahl der Probekörper in einer Stichprobe
P_f	Versagenswahrscheinlichkeit
q	in 6.5.1 festgelegte Zwischengröße, die zur Berechnung der Vertrauensgrenzen genutzt wird
r	Anzahl der Probekörper der Fehler-Grundgesamtheit, die versagt haben, für die die Weibull-Schätzfunktionen berechnet werden
t	in Gleichung (22) festgelegte Zwischengröße, die zur Berechnung der Vertrauensgrenzen genutzt wird
UF	Erwartungswert-Berichtigungsfaktor
V	zugbeanspruchter Bereich des Probekörpervolumens
V_0	Einheitsvolumen
V_{eff}	effektives Volumen

x	Realisierung einer Zufallsgröße X
X	Zufallsgröße
β	Weibull-Skalenparameter
σ	uniaxiale Zugspannung
$\hat{\sigma}$	Schätzwert der mittleren Festigkeit
σ_j	Höchstspannung im j -ten Probekörper beim Versagen
σ_0	Weibull-Werkstoff-Skalenparameter (Festigkeit in Bezug zur Einheitsgröße), festgelegt in Gleichung (12)
$\hat{\sigma}_0$	Schätzwert des Weibull-Werkstoff-Skalenparameters
σ_θ	charakteristische Weibull-Festigkeit (die mit einem Probekörper verbunden ist), festgelegt in Gleichung (10)
$\hat{\sigma}_\theta$	Schätzwert der charakteristischen Weibull-Festigkeit

5 Bedeutung und Anwendung

5.1 Dieses Dokument ermöglicht es dem Experimentator, Weibull-Verteilungsparameter anhand von Versagensdaten abzuschätzen. Diese Parameter erlauben eine Beschreibung der statistischen Beschaffenheit eines Bruchs von Hochleistungskeramik-Werkstoffen für eine Vielzahl von Zwecken, insbesondere als Maß für die Zuverlässigkeit, da sich diese auf Festigkeitsdaten bezieht, die für mechanische Auslegungszwecke genutzt werden. Die beobachteten Festigkeitswerte hängen von der Größe und Geometrie des Probekörpers ab. Parameter-Schätzwerte können für eine bestimmte Probekörper-Geometrie berechnet werden ($\hat{m}$, $\hat{\sigma}_\theta$), es wird jedoch empfohlen, die Parameter-Schätzwerte umzurechnen und als werkstoffspezifische Parameter ($\hat{m}$, $\hat{\sigma}_0$) anzugeben. Darüber hinaus können unterschiedliche Fehlerverteilungen (z. B. Versagen aufgrund von Einschlüssen oder Beschädigung durch maschinelle Bearbeitung) beobachtet werden, von denen jede ihre eigenen Festigkeitsverteilungsparameter aufweist. Das Verfahren zur Umrechnung von Parameter-Schätzwerten für typische Probekörper-Geometrien und Fehlerverteilungen ist in Anhang A dargestellt.

5.2 Dieses Dokument stellt zwei Ansätze bereit, Verfahren A und Verfahren B, die jeweils für unterschiedliche Zwecke geeignet sind.

Verfahren A liefert eine einfache Analyse der Umstände, unter denen die Art der die Festigkeit bestimmenden Fehler entweder bekannt ist oder unter denen angenommen wird, dass diese von einer einzigen Grundgesamtheit stammen. Fraktographie zur Feststellung und Einteilung von Prüfobjekten mit bestimmten Fehlerarten ist somit nicht erforderlich. Dieses Verfahren ist für die Anwendung zum einfachen Werkstoff-Screening geeignet.

Verfahren B liefert eine Analyse für den allgemeinen Fall, bei dem konkurrierende Fehler-Grundgesamtheiten vorhanden sind. Dieses Verfahren ist für die abschließende Auslegung und Analyse von Bauteilen geeignet. Bei dem Verfahren ist die Durchführung von Fraktographie erforderlich, um die Art von festigkeitsbeschränkenden Fehlern festzustellen und bestimmten Arten von Fehler-Grundgesamtheiten Versagensdaten zuzuordnen.

5.3 Mit Verfahren A können Festigkeitsdaten analysiert werden, und es werden Werte des Weibull-Moduls und der charakteristischen Festigkeit ($\hat{m}$, $\hat{\sigma}_0$) erzeugt, zusammen mit Vertrauensgrenzen bezüglich dieser Parameter. Sofern erforderlich kann der Schätzwert der mittleren Festigkeit berechnet werden. Schließlich kann eine graphische Darstellung der Versagensdaten zusammen mit einem Prüfbericht erstellt werden. Es sollte beachtet werden, dass die Vertrauensgrenzen häufig weit auseinander liegen, was darauf hindeutet, dass die Ergebnisse der Analyse nicht für eine Extrapolation weit über die vorhandenen Grenzen der Versagenswahrscheinlichkeit hinaus verwendet werden sollten. Eine notwendige Voraussetzung für eine gültige Extrapolation (hinsichtlich des geprüften effektiven Volumens V_{eff} und/oder geringer Versagenswahrscheinlichkeiten) besteht darin, dass die Fehler-Grundgesamtheiten bei allen betrachteten Festigkeitsprobekörpern der gleichen Art sind.

5.4 Verfahren B beginnt mit der Durchführung einer fraktographischen Untersuchung jedes Probekörpers, der versagt hat, um die Bruchursprünge zu charakterisieren. Die mit jeder Fehlerverteilung verbundenen Daten werden auf Ausreißer durchsucht. Falls alle Fehler von einer einzigen Fehlerverteilung stammen, wird ein erwartungstreuer Schätzwert des Weibull-Moduls berechnet, und es werden Vertrauensgrenzen sowohl für den abgeschätzten Weibull-Modul als auch die abgeschätzte charakteristische Weibull-Festigkeit berechnet. Falls die Brüche von mehr als einer Fehlerart stammen, werden die mit jeder Fehlerart verbundenen Datensätze getrennt und jeweils einzeln der zensierten Analyse unterzogen. Schließlich wird eine graphische Darstellung der Versagensdaten zusammen mit einem Prüfbericht erstellt. Wenn die Ergebnisse der Analyse für Auslegungszwecke genutzt werden, sollte beachtet werden, dass implizit davon ausgegangen wird, dass die Fehler-Grundgesamtheiten in den Festigkeitsprobekörpern und den Bauteilen jeweils gleicher Art sind.

6 Verfahren A: Maximum-Likelihood-Parameter-Schätzfunktionen für Fehler, die aus einer einzigen Grundgesamtheit stammen

6.1 Allgemeines

Dieses Dokument behandelt die Anwendung von Parameter-Schätzverfahren auf der Grundlage der Maximum-Likelihood-Methode (siehe auch Literaturhinweise [13], [14], [20] und [21]). Diese Methode hat bestimmte Vorteile. Die mit der Maximum-Likelihood-Methode erhaltenen Parameter-Schätzwerte sind (für eine zweiparametrische Weibull-Verteilung) eindeutig, und mit steigender Größe der Stichprobe nähern sich die Schätzwerte statistisch den wahren Werten der Grundgesamtheit effizienter an als bei anderen Parameter-Schätzverfahren.

6.2 Zensierte Daten

Die Anwendung der in diesem Dokument vorgestellten Verfahren kann dadurch erschwert werden, dass Probekörper vorhanden sind, die aufgrund von untypischen Fehlern, Brüchen, deren Ursprung außerhalb des wirksamen Messabschnitts liegt, und nicht identifizierten Bruchursprüngen versagen. Falls diese Komplikationen auftreten, sollten die Festigkeitsdaten dieser Probekörper grundsätzlich nicht verworfen werden. Festigkeitsdaten von Probekörpern mit Bruchursprüngen außerhalb des wirksamen Messabschnitts [3] und von Probekörpern mit Brüchen, die durch untypische Fehler initiiert werden, sollten zensiert werden, und die in Verfahren B (Abschnitt 7) vorgestellten Maximum-Likelihood-Methoden sind anwendbar. Es ist zwingend erforderlich, die Anzahl nicht identifizierter Bruchursprünge, und wie diese eingestuft wurden, im Prüfbericht anzugeben. Eine Diskussion hinsichtlich der Eignung jeder Option kann 7.2.2 entnommen werden.

Die Anwendung der zensierten Analyse setzt voraus, dass von zusammenwirkenden Fehler-Grundgesamtheiten ausgegangen wird. Diese Entscheidung sollte im Prüfbericht angegeben werden.

6.3 Likelihood-Funktion

Die Likelihood-Funktion für die zweiparametrische Weibull-Verteilung einer Stichprobe mit einer einzigen Fehler-Grundgesamtheit [4] ist durch Gleichung (14) festgelegt:

$$L = \prod_{i=1}^N \left(\frac{\hat{m}}{\hat{\sigma}_0} \right) \left(\frac{\sigma_i}{\hat{\sigma}_0} \right)^{\hat{m}-1} \exp \left[- \left(\frac{\sigma_i}{\hat{\sigma}_0} \right)^{\hat{m}} \right] \quad (14)$$

ANMERKUNG σ_i ist die Höchstspannung im i -ten Probekörper bei Versagen und N ist die Anzahl der Probekörper in der analysierten Stichprobe. Die Parameter-Schätzwerte (der Weibull-Modul $\hat{m}$ und die charakteristische Festigkeit $\hat{\sigma}_0$) werden ermittelt, indem die partiellen Ableitungen des Logarithmus der Likelihood-Funktion nach $\hat{m}$ und $\hat{\sigma}_0$ gebildet und die resultierenden Ausdrücke gleich Null gesetzt werden.

Das Gleichungssystem, das durch Ableiten der Log-Likelihood-Funktion für eine Stichprobe mit einer einzigen Fehler-Grundgesamtheit erhalten wird [5], ist gegeben durch

$$\frac{\sum_{i=1}^N (\sigma_i)^{\hat{m}} \ln(\sigma_i)}{\sum_{i=1}^N (\sigma_i)^{\hat{m}}} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \ln(\sigma_i) - \frac{1}{\hat{m}} = 0 \quad (15)$$

und

$$\hat{\sigma}_0 = \left[\left(\sum_{i=1}^N (\sigma_i)^{\hat{m}} \right) \frac{1}{N} \right]^{1/\hat{m}} \quad (16)$$

Zuerst wird Gleichung (15) nach $\hat{m}$ aufgelöst. Anschließend wird $\hat{\sigma}_0$ nach Gleichung (16) berechnet. Eine geschlossene Lösung von Gleichung (15) für $\hat{m}$ zu erhalten, ist nicht möglich. Dieser Ausdruck muss numerisch gelöst werden.

Da die charakteristische Festigkeit auch die Probekörper-Geometrie und die Spannungsgradienten widerspiegelt, empfiehlt dieses Dokument, im Bericht den geschätzten Weibull-Werkstoff-Skalenparameter $\hat{\sigma}_0$ anzugeben. Ausdrücke, die $\hat{\sigma}_0$ zum Weibull-Werkstoff-Skalenparameter σ_0 in Beziehung setzen, sind für typische Probekörper-Geometrien in Anhang A angegeben.

6.4 Berichtigung der systematischen Abweichung

6.4.1 Die hier beschriebenen Verfahren zur Berichtigung von statistischen systematischen Abweichungen und zur Berechnung von Vertrauensgrenzen sind nur für Datensätze geeignet, bei denen alle Fehler aus einer einzigen Grundgesamtheit stammen (d. h. eine unzensierte Stichprobe). Verfahren zur Berichtigung der systematischen Abweichung und Berechnung von Vertrauensgrenzen bei Vorliegen von mehreren aktiven Fehler-Grundgesamtheiten sind noch nicht gut entwickelt. Es ist bekannt, dass die Maximum-Likelihood-Schätzfunktionen hinsichtlich der zweiparametrischen Weibull-Verteilung nicht erwartungstreu, aber konsistent sind (d. h. die Veränderung der Erwartungswerte der geschätzten Weibull-Parameter geht mit zunehmender Stichprobengröße gegen Null). Die mit der Schätzfunktion $\hat{\sigma}_0$ verbundene statistische systematische Abweichung ist minimal (< 0,3 % bei 20 Probekörpern, im Gegensatz zu einer systematischen Abweichung von ≈ 7 % für $\hat{m}$ bei der gleichen Anzahl von Probekörpern). Deshalb lässt dieses Dokument die Annahme zu, dass $\hat{\sigma}_0$ eine erwartungstreue Schätzfunktion des wahren Grundgesamtheitsparameters ist. Der Parameter-Schätzwert des Weibull-Moduls $\hat{m}$ weist im Allgemeinen eine statistische systematische Abweichung auf. Die Höhe der statistischen systematischen Abweichung hängt von der Anzahl der Probekörper in der Stichprobe ab. Ein erwartungstreuer Schätzwert von $\hat{m}$ muss durch Multiplikation von $\hat{m}$ mit Erwartungswert-Berichtigungsfaktoren ermittelt werden [6]. Dieses Verfahren wird in 6.4.2 diskutiert. Die mit den in diesem Dokument vorgestellten Maximum-Likelihood-Schätzverfahren verbundene statistische systematische Abweichung kann durch Vergrößerung der Stichprobengröße verringert werden.

6.4.2 Eine erwartungstreue Schätzfunktion führt zu einer statistischen systematischen Abweichung zwischen dem Wert des wahren Parameters und dem Punkt-Schätzwert von nahe Null. Die Höhe der Abweichung kann entweder als prozentualer Unterschied oder mit Erwartungswert-Berichtigungsfaktoren quantifiziert werden. In Übereinstimmung mit der anerkannten Praxis in der frei zugänglichen Literatur quantifiziert dieses Dokument die statistische systematische Abweichung durch die Verwendung von Erwartungswert-Berichtigungsfaktoren, die hier als UF bezeichnet werden. In Abhängigkeit von der Anzahl der Probekörper in einer bestimmten Stichprobe kann der Punkt-Schätzwert des Weibull-Moduls $\hat{m}$ eine signifikante statistische systematische Abweichung aufweisen. Ein erwartungstreuer Schätzwert des Weibull-Moduls (bezeichnet als $\hat{m}_U$) wird durch Multiplikation des nicht erwartungstreuen Schätzwerts mit einem geeigneten Erwartungswert-Berichtigungsfaktor ermittelt.

$$\hat{m}_U = \hat{m} \times UF \quad (17)$$

Erwartungswert-Berichtigungsfaktoren für $\hat{m}$ sind in Tabelle 1 aufgeführt. Alternativ können die Tabellenwerte durch eine einfache analytische Funktion f_{UF} approximiert werden, die festgelegt ist durch

$$f_{UF}(N) = 1 - 1,613\,94 \times N^{-1,040\,33} \quad (18)$$

Diese Funktion interpoliert die in Tabelle 1 tabellierten Werte mit Fehlern, die kleiner als 1 % sind, ist jedoch auch für Stichprobengrößen von $N > 120$ anwendbar [17].

Ein Beispiel in Anhang B veranschaulicht sowohl die Anwendung von Tabelle 1 als auch von Gleichung (18) für die Berichtigung eines nicht erwartungstreuen Schätzwerts des Weibull-Moduls.

Tabelle 1 — Erwartungswert-Berichtigungsfaktor für den Maximum-Likelihood-Schätzwert des Weibull-Moduls

Anzahl der Probekörper, N	Erwartungswert-Berichtigungsfaktor, UF	Anzahl der Probekörper, N	Erwartungswert-Berichtigungsfaktor, UF
5	0,700	42	0,968
6	0,752	44	0,970
7	0,792	46	0,971
8	0,820	48	0,972
9	0,842	50	0,973
10	0,859	52	0,974
11	0,872	54	0,975
12	0,883	56	0,976
13	0,893	58	0,977
14	0,901	60	0,978
15	0,908	62	0,979
16	0,914	64	0,980
18	0,923	66	0,980
20	0,931	68	0,981
22	0,938	70	0,981
24	0,943	72	0,982

Anzahl der Probekörper, N	Erwartungswert-Berichtigungsfaktor, UF	Anzahl der Probekörper, N	Erwartungswert-Berichtigungsfaktor, UF
26	0,947	74	0,982
28	0,951	76	0,983
30	0,955	78	0,983
32	0,958	80	0,984
34	0,960	85	0,985
36	0,962	90	0,986
38	0,964	100	0,987
40	0,966	120	0,990

6.5 Vertrauensbereiche

6.5.1 Vertrauensgrenzen quantifizieren die mit einem Punkt-Schätzwert eines Grundgesamtheits-Parameters verbundene Unsicherheit. Die Größe des Vertrauensbereichs für Maximum-Likelihood-Schätzwerte beider Weibull-Parameter nimmt mit zunehmender Stichprobengröße ab. Die zur Konstruktion von Vertrauensgrenzen verwendeten Werte beruhen auf Perzentilverteilungen, die mittels Monte-Carlo-Simulation erhalten werden; z. B. wird der 90-%-Vertrauensbereich des Weibull-Moduls aus den 5-%- und 95-%-Perzentil-Verteilungen des Verhältnisses von $\hat{m}$ zum wahren Wert der Grundgesamtheit m ermittelt. Für einen Punkt-Schätzwert des Weibull-Moduls sind die normalisierten Werte $q = (\hat{m}/m)$, die zur Konstruktion der 90-%-Vertrauensgrenzen erforderlich sind, in Tabelle 2 aufgeführt. Folglich sind die obere und untere Vertrauensgrenze für m gegeben durch

$$\hat{m}_{\text{upper}} = \hat{m}/q_{0,05} \quad (19)$$

beziehungsweise

$$\hat{m}_{\text{lower}} = \hat{m}/q_{0,95} \quad (20)$$

Das Beispiel in Anhang B veranschaulicht die Verwendung von Tabelle 2 bei der Konstruktion der oberen und unteren Vertrauensgrenzen. Es ist zu beachten, dass hier der statistisch verzerrte Schätzwert des Weibull-Moduls verwendet werden muss. Dieses Verfahren ist wiederum nicht für zensierte Statistiken geeignet.

Eine praktische Möglichkeit zur Berechnung von Vertrauensgrenzen ist die Anwendung einer Interpolationsfunktion der Form

$$q_p(N) = 1 + \frac{a_{1/2}}{\sqrt{N}} + \frac{a_1}{N} + \frac{a_{3/2}}{\sqrt{N^3}} + \frac{a_2}{N^2} + \frac{a_{5/2}}{\sqrt{N^5}} + \frac{a_3}{N^3} \quad (21)$$

die auch für größere Stichproben mit $N > 120$ angewendet werden kann. Die entsprechenden Koeffizienten für a_i sind in Tabelle 3 angegeben. Gleichung (21) ist für große Probekörperanzahlen N asymptotisch korrekt, und die Abweichung in Bezug auf die tabellierten Werte in Tabelle 2 ist kleiner als 0,5 % [17]. Darüber hinaus sind die Koeffizienten zur Berechnung der Vertrauensgrenzen in Bezug auf das 95-%-Vertrauensniveau in Tabelle 4 aufgeführt.

6.5.2 Vertrauensgrenzen können für die geschätzte charakteristische Weibull-Festigkeit konstruiert werden. Jedoch sind die für die Konstruktion der Grenzen benötigten Perzentilverteilungen nicht mit den gleichen normalisierten Verhältnissen oder den gleichen Tabellen verbunden, die für den Weibull-Modul verwendet werden. Es wird die Funktion festgelegt:

$$t = \hat{m} \ln(\hat{\sigma}_\theta / \sigma_\theta) \quad (22)$$

Der 90-%-Vertrauensbereich der charakteristischen Festigkeit wird aus den 5-%- und 95-%-Perzentilverteilungen von t erhalten, so dass die obere und untere Vertrauensgrenze gegeben sind durch:

$$(\hat{\sigma}_\theta)_{\text{upper}} = (\hat{\sigma}_\theta) \exp(-t_{0,05} / \hat{m}) \quad (23)$$

$$(\hat{\sigma}_\theta)_{\text{lower}} = (\hat{\sigma}_\theta) \exp(-t_{0,95} / \hat{m}) \quad (24)$$

Für den Punkt-Schätzwert der charakteristischen Festigkeit sind diese Perzentilverteilungen in Tabelle 5 angegeben. Wiederum wird eine Interpolationsfunktion für t_p festgelegt durch

$$t_p(N) = 1 + \frac{b_{1/2}}{\sqrt{N}} + \frac{b_1}{N} + \frac{b_{3/2}}{\sqrt{N^3}} + \frac{b_2}{N^2} + \frac{b_{5/2}}{\sqrt{N^5}} + \frac{b_3}{N^3} \quad (25)$$

welche eine analytische und genaue Berechnung der Vertrauensgrenzen ermöglicht. In Tabelle 6 und Tabelle 7 sind die entsprechenden Koeffizienten b_i hinsichtlich des 90-%- beziehungsweise des 95-%-Vertrauensniveaus aufgeführt.

Ein Beispiel in Anhang B veranschaulicht die Verwendung von Tabelle 5 zur Konstruktion der oberen und unteren Grenzen von $\hat{\sigma}_\theta$. Es ist zu beachten, dass hier der verzerrte Schätzwert des Weibull-Moduls (d. h. das Ergebnis des Maximum-Likelihood-Verfahrens [siehe Gleichung (15)] verwendet werden muss. Dieses Verfahren ist nicht für zensierte Statistiken geeignet. Gleichung (22) ist nicht für die Entwicklung von Vertrauensgrenzen von $\hat{\sigma}_\theta$ anwendbar, weshalb die Vertrauensgrenzen von $\hat{\sigma}_\theta$ nicht durch Anwendung von Gleichung (10) und Gleichung (12) umgerechnet werden sollten.

Tabelle 2 — Normalisierte obere und untere Grenzen des Maximum-Likelihood-Schätzwerts des Weibull-Moduls — 90-%-Vertrauensbereich

Anzahl der Probekörper, N	$q_{0,05}$	$q_{0,95}$	Anzahl der Probekörper, N	$q_{0,05}$	$q_{0,95}$
5	0,683	2,779	42	0,842	1,265
6	0,697	2,436	44	0,845	1,256
7	0,709	2,183	46	0,847	1,249
8	0,720	2,015	48	0,850	1,242
9	0,729	1,896	50	0,852	1,235
10	0,738	1,807	52	0,854	1,229
11	0,745	1,738	54	0,857	1,224
12	0,752	1,682	56	0,859	1,218
13	0,759	1,636	58	0,861	1,213
14	0,764	1,597	60	0,863	1,208
15	0,770	1,564	62	0,864	1,204

Anzahl der Probekörper, N	$q_{0,05}$	$q_{0,95}$	Anzahl der Probekörper, N	$q_{0,05}$	$q_{0,95}$
16	0,775	1,535	64	0,866	1,200
17	0,779	1,510	66	0,868	1,196
18	0,784	1,487	68	0,869	1,192
19	0,788	1,467	70	0,871	1,188
20	0,791	1,449	72	0,872	1,185
22	0,798	1,418	74	0,874	1,182
24	0,805	1,392	76	0,875	1,179
26	0,810	1,370	78	0,876	1,176
28	0,815	1,351	80	0,878	1,173
30	0,820	1,334	85	0,881	1,166
32	0,824	1,319	90	0,883	1,160
34	0,828	1,306	95	0,886	1,155
36	0,832	1,294	100	0,888	1,150
38	0,835	1,283	110	0,893	1,141
40	0,839	1,273	120	0,897	1,133

Tabelle 3 — Koeffizienten nach Gleichung (16) für die normalisierten oberen und unteren Grenzen des Maximum-Likelihood-Schätzwerts des Weibull-Moduls — 90%-Vertrauensbereich

	$a_{1/2}$	a_1	$a_{3/2}$	a_2	$a_{5/2}$	a_3
$p = 0,05$	–1,280 61	2,088 03	–2,365 01	–1,941 65	13,623 8	–14,666 1
$p = 0,95$	1,283 79	2,136 0	3,451 5	8,520 81	–19,55 11	65,739 1

Tabelle 4 — Koeffizienten nach Gleichung (16) für die normalisierten oberen und unteren Grenzen des Maximum-Likelihood-Schätzwerts des Weibull-Moduls — 95%-Vertrauensbereich

	$a_{1/2}$	a_1	$a_{3/2}$	a_2	$a_{5/2}$	a_3
$p = 0,025$	–1,523 97	2,531 61	–2,673 06	–4,644 68	22,357 7	–22,903 6
$p = 0,975$	1,521 37	2,993 89	–0,318 37	44,728 8	–123,859	202,815

Tabelle 5 — Normalisierte obere und untere Grenzen der Funktion t — 90-%-Vertrauensbereich

Anzahl der Probekörper, N	$t_{0,05}$	$t_{0,95}$	Anzahl der Probekörper, N	$t_{0,05}$	$t_{0,95}$
5	−1,247	1,107	42	−0,280	0,278
6	−1,007	0,939	44	−0,273	0,271
7	−0,874	0,829	46	−0,266	0,264
8	−0,784	0,751	48	−0,260	0,258
9	−0,717	0,691	50	−0,254	0,253
10	−0,665	0,644	52	−0,249	0,247
11	−0,622	0,605	54	−0,244	0,243
12	−0,587	0,572	56	−0,239	0,238
13	−0,557	0,544	58	−0,234	0,233
14	−0,532	0,520	60	−0,230	0,229
15	−0,509	0,499	62	−0,226	0,225
16	−0,489	0,480	64	−0,222	0,221
17	−0,471	0,463	66	−0,218	0,218
18	−0,455	0,447	68	−0,215	0,214
19	−0,441	0,433	70	−0,211	0,211
20	−0,428	0,421	72	−0,208	0,208
22	−0,404	0,398	74	−0,205	0,205
24	−0,384	0,379	76	−0,202	0,202
26	−0,367	0,362	78	−0,199	0,199
28	−0,352	0,347	80	−0,197	0,197
30	−0,338	0,334	85	−0,190	0,190
32	−0,326	0,323	90	−0,184	0,185
34	−0,315	0,312	95	−0,179	0,179
36	−0,305	0,302	100	−0,174	0,175
38	−0,296	0,293	110	−0,165	0,166
40	−0,288	0,285	120	−0,158	0,159

Tabelle 6 — Koeffizienten nach Gleichung (19) und Gleichung (20) für die Funktion t , die zur Berechnung der oberen und unteren Grenzen des Maximum-Likelihood-Schätzwerts der charakteristischen Festigkeit verwendet werden — 90%-Vertrauensbereich

	$b_{1/2}$	b_1	$b_{3/2}$	b_2	$b_{5/2}$	b_3
$p = 0,05$	–1,726 2	–0,187 398	0,059 163	–17,199 8	40,928 9	–59,972 8
$p = 0,95$	1,731 0	0,055 668	2,308 3	1,671 11	–4,038 37	13,695 1

Tabelle 7 — Koeffizienten nach Gleichung (19) und Gleichung (20) für die Funktion t , die zur Berechnung der oberen und unteren Grenzen des Maximum-Likelihood-Schätzwerts der charakteristischen Festigkeit verwendet werden — 95%-Vertrauensbereich

	$b_{1/2}$	b_1	$b_{3/2}$	b_2	$b_{5/2}$	b_3
$p = 0,025$	–2,059 32	–0,048 120 6	–1,388 13	–19,065 2	51,812 7	–93,808 2
$p = 0,975$	2,063 75	0,122 882	3,496 57	2,904 76	–10,659 3	30,435 5

7 Verfahren B: Maximum-Likelihood-Parameter-Schätzfunktionen für konkurrierende Fehler-Grundgesamtheiten

7.1 Allgemeines

Dieses Dokument behandelt die Anwendung von Parameter-Schätzverfahren auf der Grundlage der Maximum-Likelihood-Methode. Diese Methode hat bestimmte Vorteile, insbesondere, wenn Parameter aus zensierten Fehler-Grundgesamtheiten zu bestimmen sind. Wenn eine Stichprobe von Probekörpern zwei oder mehr klar unterscheidbare Fehlerverteilungen ergibt, wird davon ausgegangen, dass die Probe zensierte Daten enthält, und die damit verbundenen Verfahren für zensierte Daten müssen angewendet werden. Die in diesem Dokument beschriebenen Verfahren schließen Zensierungsverfahren ein, die für mehrere zusammenwirkende Fehlerverteilungen gelten. Jedoch sind die in diesem Dokument vorgestellten Verfahren zur Parameterabschätzung nicht direkt anwendbar auf Datensätze, die ausschließliche oder mehrere zusammengesetzte Fehlerverteilungen enthalten [7].

Die in diesem Dokument vorgestellten Schätzverfahren für zensierte Daten erfordern eine positive Bestätigung des Vorliegens mehrerer Fehlerverteilungen, was eine fraktographische Untersuchung erforderlich macht, um den Bruchursprung jedes Probekörpers zu charakterisieren. Mehrfach-Fehlerverteilungen dürfen des Weiteren auch durch die Abweichung von der Linearität der Daten von einer einzigen Weibull-Verteilung nachgewiesen werden.

Bei Datensätzen mit mehreren aktiven Fehlerverteilungen, bei denen eine (mittels fraktographischer Analyse festgestellte) Fehlerverteilung bei einer geringen Anzahl von Probekörpern vorkommt, ist es ausreichend, im Bericht das Vorliegen dieser Fehlerverteilung (und die Häufigkeit ihres Vorkommens) anzugeben, jedoch ist es nicht erforderlich, Weibull-Parameter abzuschätzen. Schätzwerte der Weibull-Parameter dieser Fehlerverteilung würden potenziell verzerrt sein und weit auseinanderliegende Vertrauensgrenzen aufweisen (was beides nicht quantifiziert werden könnte). Jedoch sollte im Bericht besonderes darauf hingewiesen werden, wenn die Vorkommnisse dieser Fehlerverteilung am oberen oder unteren Ende der Festigkeitsverteilung der Stichprobe auftreten.

7.2 Zensierte Daten

7.2.1 Die Anwendung der in diesem Dokument vorgestellten Zensierungsverfahren kann dadurch erschwert sein, dass Probekörper vorhanden sind, die aufgrund von untypischen Fehlern, Brüchen, deren Ursprung außerhalb des wirksamen Messabschnitts liegt, und nicht identifizierten Bruchursprüngen versagen. Falls diese Komplikationen auftreten, sollten die Festigkeitsdaten dieser Probekörper grundsätzlich nicht verworfen werden. Festigkeitsdaten von Probekörpern mit Bruchursprüngen außerhalb des wirksamen Messabschnitts [3] und von Probekörpern mit Brüchen, die durch untypische Fehler initiiert werden, sollten zensiert werden [20] [21], und die in diesem Dokument vorgestellten Maximum-Likelihood-Methoden sind anwendbar.

7.2.2 Dieses Dokument erkennt vier Optionen an, wie der Experimentator vorgehen kann, wenn während fraktographischer Untersuchungen nicht identifizierte Bruchursprünge festgestellt werden. Probekörper mit nicht identifizierten Bruchursprüngen können:

- a) einer zuvor identifizierten Fehlerverteilung zugewiesen werden, unter Nutzung von Schlussfolgerungen auf der Grundlage aller verfügbaren fraktographischen Informationen;
- b) der gleichen Fehlerverteilung zugewiesen werden wie der Probekörper, der ihnen hinsichtlich Festigkeit am nächsten kommt;
- c) einer neuen und bisher noch nicht spezifizierten Fehlerverteilung zugewiesen werden;
- d) aus der Stichprobe entfernt werden.

7.2.3 Es ist zwingend erforderlich, die Anzahl nicht identifizierter Bruchursprünge, und wie diese eingestuft wurden, im Prüfbericht anzugeben. Eine Diskussion über die Eignung jeder Option ist in Anhang C enthalten. Falls die Festigkeitsdaten und die resultierenden Parameter-Schätzwerte für die Auslegung von Bauteilen verwendet werden, muss der Ingenieur die Person, die die Fraktographie durchführt, vor und nach der Durchführung der fraktographischen Untersuchung hinzuziehen. Um die richtige Option herauszufinden, ist möglicherweise erhebliches Beurteilungsvermögen erforderlich. Wenn unvollständige fraktographische Informationen verfügbar sind, wird Option a) dringend empfohlen, insbesondere, wenn die Daten für die Auslegung von Bauteilen verwendet werden. Hingegen wird Option d) von diesem Dokument nicht empfohlen, es sei denn, es gibt eine überzeugende Begründung dafür.

7.3 Likelihood-Funktion

Die Likelihood-Funktion für die zweiparametrische Weibull-Verteilung einer zensierten Stichprobe ist durch Gleichung (26) festgelegt:

$$L = \left\{ \prod_{i=1}^r \left(\frac{\hat{m}}{\hat{\sigma}_\theta} \right) \left(\frac{\sigma_i}{\hat{\sigma}_\theta} \right)^{\hat{m}-1} \exp \left[- \left(\frac{\sigma_i}{\hat{\sigma}_\theta} \right)^{\hat{m}} \right] \right\} \left\{ \prod_{j=r+1}^N \exp \left[- \left(\frac{\sigma_j}{\hat{\sigma}_\theta} \right)^{\hat{m}} \right] \right\} \quad (26)$$

Dieser Ausdruck wird auf eine Stichprobe angewendet, bei der in einer fraktographischen Untersuchung zwei oder mehr aktive zusammenwirkende Fehlerverteilungen festgestellt wurden. Für die Anwendung der hier aufgeführten Diskussion werden die verschiedenen Verteilungen als Fehlerarten A, B, C usw. identifiziert. Wenn Gleichung (26) angewendet wird, um die Parameter im Zusammenhang mit der Fehlerverteilung „A“ abzuschätzen, dann ist r die Anzahl der Probekörper, bei denen Fehler der Fehlerart A am Bruchursprung festgestellt wurden, und i ist der damit verbundene Index im ersten Produkt. Das zweite Produkt wird für alle weiteren Probekörper gebildet, die nicht aufgrund von Fehlern der Fehlerart A versagt haben (d. h. Fehler der Fehlerart B, Fehler der Fehlerart C usw.). Daher wird das Produkt von $(j = r + 1)$ bis N (die Gesamtanzahl der Probekörper) gebildet, wobei j der Index im zweiten Produkt ist. Entsprechend sind σ_i und σ_j die Höchstspannung im i -ten und j -ten Probekörper bei Bruch. Die Parameter-Schätzwerte (der Weibull-Modul $\hat{m}$ und die charakteristische Festigkeit σ_0) werden ermittelt, indem die partiellen Ableitungen des Logarithmus der Likelihood-Funktion nach $\hat{m}$ und $\hat{\sigma}_0$ gebildet und die resultierenden Ausdrücke gleich Null gesetzt werden. Es ist zu beachten, dass $\hat{\sigma}_0$ von der Geometrie des Probekörpers und vom Schätzwert des Weibull-Moduls $\hat{m}$ abhängig ist. Ausdrücke, die $\hat{\sigma}_0$ zum Weibull-Werkstoff-Skalenparameter σ_0 in Beziehung setzen, sind für typische Probekörper-Geometrien in Anhang A angegeben.

Das Gleichungssystem, das durch Ableiten der Log-Likelihood-Funktion für eine zensierte Stichprobe erhalten wird [5], ist gegeben durch:

$$\frac{\sum_{i=1}^N (\sigma_i)^{\hat{m}} \ln(\sigma_i)}{\sum_{i=1}^N (\sigma_i)^{\hat{m}}} - \frac{1}{r} \sum_{i=1}^r \ln(\sigma_i) - \frac{1}{\hat{m}} = 0 \quad (27)$$

und

$$\hat{\sigma}_0 = \left[\left(\sum_{i=1}^N (\sigma_i)^{\hat{m}} \right) \frac{1}{r} \right]^{1/\hat{m}} \quad (28)$$

Dabei ist

- r die Anzahl der Probekörper, die versagt haben und aus einer bestimmten Gruppe einer zensierten Stichprobe stammen.

Zuerst wird Gleichung (27) nach $\hat{m}$ aufgelöst. Anschließend wird $\hat{\sigma}_0$ nach Gleichung (28) berechnet. Eine geschlossene Lösung von Gleichung (27) für $\hat{m}$ zu erhalten, ist nicht möglich. Dieser Ausdruck muss numerisch gelöst werden.

8 Durchführung

8.1 Ausreißer

Vor der Berechnung der Parameter-Schätzwerte sollten die Daten auf Ausreißer untersucht werden. Ein Ausreißer ist eine Beobachtung, die wesentlich von anderen Beobachtungen in der Stichprobe abweicht. Es sollte davon ausgegangen werden, dass ein scheinbarer Ausreißer eine extreme Form der Variabilität der Festigkeit einer Hochleistungskeramik sein kann. Ist dies der Fall, sollte der Datenpunkt gespeichert und wie alle anderen Beobachtungen in der Stichprobe, die versagt hat, behandelt werden. Jedoch kann der Ausreißer auch das Ergebnis einer groben Abweichung vom vorgeschriebenen Versuchsablauf oder ein Fehler bei der Berechnung oder Aufzeichnung des numerischen Werts des betreffenden Datenpunkts sein. Wenn der Experimentator sich im Klaren ist, dass eine grobe Abweichung vom vorgeschriebenen Versuchsablauf vorliegt, darf der Ausreißer verworfen werden, es sei denn, die Beobachtung kann sinnvoll berichtigt werden.

8.2 Fraktographie

8.2.1 Zur Charakterisierung der Bruchursprünge wird dringend eine fraktographische Untersuchung jedes Probekörpers, der versagt hat, empfohlen. Die Festigkeit von Hochleistungskeramik wird oftmals durch diskrete Bruchursprünge begrenzt, welche im Werkstoff begründet sein oder außerhalb des Werkstoffs liegen können. Porosität, Agglomerate, Einschlüsse und atypisches Großkorn werden als intrinsische Bruchursprünge betrachtet [10]. Extrinsische Bruchursprünge treten üblicherweise an der Oberfläche des Probekörpers infolge von Kontaktspannungen, Schlagereignissen oder einer ungünstigen Umgebung auf. Wenn dem Experimentator die entsprechenden Mittel zur Verfügung stehen, sollten fraktographische Verfahren angewendet werden, um den Ursprung der die Festigkeit beschränkenden Brüche, die zu einem katastrophalen Versagen in einem Hochleistungskeramik-Probekörper führen, zu lokalisieren, identifizieren und klassifizieren. Darüber hinaus muss jede Klassifizierung eines Bruchursprungs für den Zweck der Parameter-Abschätzung als ein auf der Oberfläche verteilter Bruchursprung oder ein im Volumen verteilter Bruchursprung identifiziert werden, um die in Anhang A angegebenen Ausdrücke zu nutzen. Daher können innerhalb des Volumens (oder der Oberfläche) der Probekörper in einer Stichprobe mehrere Klassifizierungen von Bruchursprüngen vorkommen. Es sollte im Prüfbericht eindeutig angegeben werden, wenn keine fraktographische Analyse durchgeführt wird.

8.2.2 Es wird eine fraktographische Analyse durchgeführt, und jeder Bezugspunkt wird mit einem Symbol gekennzeichnet, das die Art des Bruchursprungs identifiziert. Dabei darf es sich um ein Wort, eine Abkürzung oder um ein anderes Symbol für jede Art des Bruchursprungs handeln.

8.3 Graphische Darstellung

8.3.1 Ein Ziel dieses Dokuments ist die einheitliche Darstellung der Festigkeitsdaten. Zu diesem Zweck wird für die graphische Darstellung von Festigkeitsdaten die folgende Vorgehensweise empfohlen [22]. Es wird damit begonnen, dass die mittels Laborprüfungen gewonnenen Festigkeitsdaten in aufsteigender Reihenfolge geordnet mit einer Rangzahl versehen werden, und dass jedem Datenpunkt entsprechend der Rangschätzfunktion eine mit einem Rang versehene Versagenswahrscheinlichkeit P_f zugeordnet wird.

$$P_f(\sigma_i) = \frac{i - 0,5}{N} \quad (29)$$

oder

$$P_f(\sigma_i) = \frac{i - 0,3}{N + 0,4} \quad (30)$$

Dabei ist

N die Anzahl der Probekörper;

i die Rangzahl (aufsteigende Reihenfolge).

ANMERKUNG Gleichung (30) ist eine anerkannte Näherung der Mediane von Statistiken gleicher Ordnung.

Es wird der natürliche Logarithmus der i -ten Bruchspannung und der natürliche Logarithmus des natürlichen Logarithmus von $[1/(1 - P_f)]$ berechnet (d. h. der doppelte Logarithmus der in eckigen Klammern angegebenen Größe), wobei P_f der i -ten Bruchspannung zugeordnet ist.

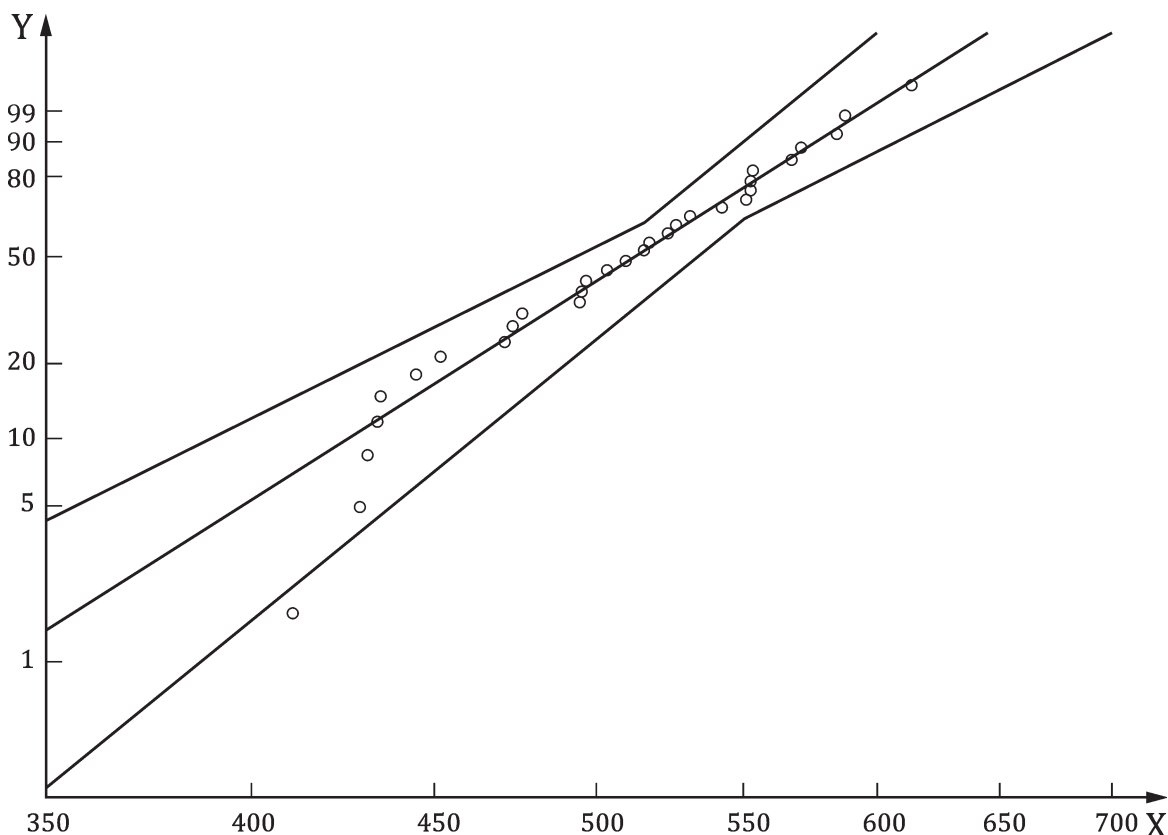
8.3.2 Es wird eine Kurve erstellt, welche die Daten wie in Bild 1 dargestellt repräsentiert. Dabei wird $\ln\{\ln[1/(1 - P_f)]\}$ als Ordinate und $\ln(\sigma)$ als Abszisse dargestellt. Eine typische Ordinaten-Skala nimmt Werte von +2 bis –6 an. Dies entspricht annähernd einem Bereich von Versagenswahrscheinlichkeiten von 0,25 % bis 99,9 %. Die Ordinatenachse muss wie in Bild 1 dargestellt als Versagenswahrscheinlichkeit P_f beschriftet werden. Ebenso muss die Abszisse als Bruchspannung (Biege-, Zugspannung usw.) beschriftet werden, vorzugsweise mit den Einheiten MPa oder GPa.

8.3.3 In der graphischen Darstellung enthalten sein sollte eine Linie, deren Lage durch die Schätzwerte der Weibull-Parameter festgelegt wird. Die Linie wird durch Gleichung (31) festgelegt:

$$P_f = 1 - \exp \left[- \left(\frac{\sigma}{\hat{\sigma}_0} \right)^{\hat{m}} \right] \quad (31)$$

Die Steigung der Linie, die der Schätzwert des Weibull-Moduls $\hat{m}$ ist, sollte wie in Bild 1 dargestellt gekennzeichnet werden. Der Schätzwert der charakteristischen Festigkeit $\hat{\sigma}_0$ sollte ebenfalls gekennzeichnet werden. Dies entspricht einer P_f von 63,2 % oder einem Wert von Null für $\ln\{\ln[1/(1 - P_f)]\}$.

8.3.4 Dieses Dokument stellt kein definitives Kriterium zur Beurteilung der relativen Anpassung der einzelnen Datenpunkte an eine lineare zweiparametrische Weibull-Kurve, die anhand der Daten abgeschätzt wurde, bereit. Theoretische Grenzen auf der Zuverlässigkeits-Kurve sind komplex und liegen nicht im Anwendungsbereich dieses Dokuments. Vertrauensgrenzen des Schätzwerts des Weibull-Moduls und der charakteristischen Weibull-Festigkeit können verwendet werden, um Konfidenzbänder in einer Weibull-Kurve zu konstruieren (siehe Bild 1). Die Bänder links von der geschätzten zweiparametrischen Weibull-Kurve werden unter Verwendung der unteren Vertrauensgrenze der charakteristischen Weibull-Festigkeit und der oberen Vertrauensgrenze des Weibull-Moduls für eine Versagenswahrscheinlichkeit über 63,2 % konstruiert. Versagenswahrscheinlichkeiten unter 63,2 % entsprechen der unteren Vertrauensgrenze des Weibull-Moduls. Die Bänder rechts von der geschätzten zweiparametrischen Weibull-Kurve werden unter Verwendung der oberen Vertrauensgrenze der charakteristischen Weibull-Festigkeit zusammen mit der unteren Vertrauensgrenze des Weibull-Moduls für eine Versagenswahrscheinlichkeit über 63,2 % konstruiert. Versagenswahrscheinlichkeiten unter 63,2 % entsprechen der oberen Vertrauensgrenze des Weibull-Moduls.



Bruchspannungen, MPa	
411	516
429	518
431	524
434	527
435	532
445	543
452	552
472	553
474	553
477	554
495	568
496	572
497	585
504	588
510	614

Legende

X $\ln(\text{Bruchspannung}), \text{MPa}$

Y $\ln[\ln 1/(1 - P_f)]$ mit P_f Versagenswahrscheinlichkeit, %

ANMERKUNG Geschätzt $m = 10,24$; $\sigma_\theta = 532 \text{ MPa}$.

Bild 1 — Weibull-Kurve

9 Prüfbericht

Der Prüfbericht muss die folgenden Angaben enthalten:

- Art des charakterisierten Werkstoffs;
- Charakterisierung des Probekörpers: Geometrie, Zustand der Oberflächen (z. B. gesintert, spanend bearbeitete Oberflächen, angefastete Kanten usw.);
- Durchführung der Prüfung, vorzugsweise mit Benennung einer entsprechenden Norm;
- Anzahl der geprüften Probekörper/der Probekörper, die versagt haben;
- Fehlerart;
- Fehler-Grundgesamtheiten: eine einzige, mehrere, angenommene zusammenwirkende Fehler-Grundgesamtheiten;
- Maximum-Likelihood-Schätzwerte der Weibull-Parameter: $\hat{m}, \hat{\sigma}_\theta$;

- h) obere und untere Vertrauensgrenzen in Bezug auf das 90-%- oder 95-%-Vertrauensniveau für die Weibull-Parameter: $[\hat{m}_{\text{lower}}, \hat{m}_{\text{upper}}], [(\hat{\sigma}_{\theta})_{\text{lower}}, (\hat{\sigma}_{\theta})_{\text{upper}}]$;
- i) Erwartungswert-Berichtigungsfaktor; erwartungstreuer Weibull-Modul: $UF, \hat{m}_U$.

In die graphische Darstellung wird (an einer passenden Stelle) eine Spalte eingefügt, oder alternativ wird eine gesonderte Tabelle bereitgestellt, welche die einzelnen Festigkeitswerte in aufsteigender Reihenfolge kennzeichnet. Dies ermöglicht es anderen Anwendern, alternative Analysen durchzuführen. Des Weiteren sollte der Experimentator eine gesonderte Skizze der Probekörper-Geometrie beifügen, die alle zugehörigen Maße enthält. Ein Schätzwert der mittleren Festigkeit kann ebenfalls in der Graphik dargestellt werden. Der Schätzwert der mittleren Festigkeit wird unter Anwendung des arithmetischen Mittels als Schätzfunktion berechnet:

$$\hat{\mu} = \left(\sum_{i=1}^N \sigma_i \right) \left(\frac{1}{N} \right) \quad (31)$$

ANMERKUNG Dieser Schätzwert der mittleren Festigkeit ist nicht für Stichproben mit mehreren Fehler-Grundgesamtheiten geeignet.