

DIN ISO 11929-1
(VDE 0493-9291)
DIN

Diese Norm ist zugleich eine **VDE-Bestimmung** im Sinne von VDE 0022. Sie ist nach Durchführung des vom VDE-Präsidium beschlossenen Genehmigungsverfahrens unter der oben angeführten Nummer in das VDE-Vorschriftenwerk aufgenommen und in der „etz Elektrotechnik + Automation“ bekannt gegeben worden.

VDE

ICS 17.240

Einsprüche bis 2017-01-18

 Vorgesehen als Ersatz für
 DIN ISO 11929:2011-01

Entwurf
Bestimmung der charakteristischen Grenzen (Erkennungsgrenze, Nachweisgrenze und Grenzen des Überdeckungsintervalls) bei Messungen ionisierender Strahlung – Teil 1: Elementare Anwendungen (ISO/CD 11929-1:2016)

Determination of the characteristic limits (decision threshold, detection limit and limits of the coverage interval) for measurements of ionizing radiation –

Part 1: Elementary applications
 (ISO/CD 11929-1:2016)

Détermination des limites caractéristiques (seuil de décision, limite de détection et extrémités de l'intervalle de dispersion) pour mesurages de rayonnements ionisants –

Partie 1: Applications élémentaires –
 (ISO/CD 11929-1:2016)

Anwendungswarnvermerk

Dieser Norm-Entwurf mit Erscheinungsdatum 2016-11-18 wird der Öffentlichkeit zur Prüfung und Stellungnahme vorgelegt.

Weil die beabsichtigte Norm von der vorliegenden Fassung abweichen kann, ist die Anwendung dieses Entwurfs besonders zu vereinbaren.

Stellungnahmen werden erbeten

- vorzugsweise online im Norm-Entwurfs-Portal des DIN unter www.entwuerfe.din.de bzw. für Norm-Entwürfe der DKE auch im Norm-Entwurfs-Portal der DKE unter www.entwuerfe.normenbibliothek.de, sofern dort wiedergegeben;
- oder als Datei per E-Mail an dke@vde.com möglichst in Form einer Tabelle. Die Vorlage dieser Tabelle kann im Internet unter www.din.de/stellungnahme oder für Stellungnahmen zu Norm-Entwürfen der DKE unter www.dke.de/stellungnahme abgerufen werden;
- oder in Papierform an die DKE Deutsche Kommission Elektrotechnik Elektronik Informationstechnik in DIN und VDE, Stresemannallee 15, 60596 Frankfurt am Main.

Die Empfänger dieses Norm-Entwurfs werden gebeten, mit ihren Kommentaren jegliche relevanten Patentrechte, die sie kennen, mitzuteilen und unterstützende Dokumentationen zur Verfügung zu stellen.

Gesamtumfang 95 Seiten

DKE Deutsche Kommission Elektrotechnik Elektronik Informationstechnik in DIN und VDE
 DIN-Normenausschuss Radiologie (NAR)
 DIN-Normenausschuss Materialprüfung (NMP)

Anwendungsbereich

Anwendungsbereich dieser Norm ist ...

Inhalt	Seite
Nationales Vorwort.....	4
Einleitung	6
1 Anwendungsbereich	8
2 Zusammenfassung der Verfahren zur Auswertung einer Messung und zur Berechnung der charakteristischen Grenzen.....	8
2.1 Allgemeines	8
2.2 Modellierung der Messung	9
2.3 Allgemeine Überlegungen über die Anwendbarkeit des GUM.....	10
2.4 Auswertung der Eingangsgrößen, ihrer Standardunsicherheiten und Kovarianzen, des primären Messergebnisses und der ihm zugeordneten Standardunsicherheit.....	10
2.5 Berechnung der Standardunsicherheit als Funktion eines angenommenen wahren Wertes der Messgröße	11
2.6 Berechnung der Erkennungsgrenze und zu fällende Entscheidungen	12
2.7 Berechnung der Nachweisgrenze und Beurteilung des Messverfahrens	12
2.8 Berechnung des Überdeckungsintervalls der Messgröße	13
2.9 Berechnung des besten Schätzwertes und der ihm zugeordneten Standardunsicherheit	14
2.10 Prüfbericht	14
3 Normative Verweisungen	15
4 Begriffe	16
5 Größen und Formelzeichen.....	21
6 Grundlagen und Auswertung der Messung.....	22
6.1 Allgemeines zur Messgröße	22
6.2 Modell der Auswertung.....	23
6.2.1 Allgemeines Modell	23
6.2.2 Model in ionizing radiation counting measurements	24
6.3 Berechnung des primären Messergebnisses	25
6.4 Standardunsicherheit zum primären Messergebnis.....	25
7 Berechnung der Standardunsicherheit als Funktion eines angenommenen Wertes der Messgröße.....	26
8 Erkennungsgrenze, Nachweisgrenze und Beurteilungen	27
8.1 Vorgaben	27
8.2 Erkennungsgrenze	27
8.3 Nachweisgrenze	28
8.4 Beurteilungen	29
9 Grenzen des Überdeckungsintervalls	29
9.1 Allgemeines	29
9.2 Das probabilistisch symmetrische Überdeckungsintervall	30

9.3	Das kürzeste Überdeckungsintervall.....	30
10	Der beste Schätzwert und die ihm zugeordnete Standardunsicherheit.....	31
11	Prüfbericht.....	31
Anhang A (normativ)	Wiederholte zählende Messungen mit zufälligen Einflüssen.....	33
A.1	Allgemeines.....	33
A.2	Verfahren bei unbekannten Einflüssen.....	33
A.3	Verfahren bei bekannten Einflüssen.....	34
Anhang B (normativ)	Messungen mit Ratemetern.....	36
Anhang C (informativ)	Berechnung der Nachweisgrenze mittels Iteration.....	38
Anhang D (informativ)	Berechnungen mit einer generalisierten Nettozählrate.....	40
D.1	Modell der Auswertung mit einer generalisierten Nettozählrate.....	40
D.2	Primäres Messergebnis und die ihm zugeordnete Standardunsicherheit.....	40
D.3	Standardunsicherheit als Funktion eines angenommenen wahren Wertes der Messgröße.....	41
D.4	Erkennungsgrenze und Nachweisgrenze.....	42
Anhang E (informativ)	Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung.....	44
Literaturhinweise		46

Bilder

Bild 1 – Flussdiagramm für DIN ISO 11929-1 bei Anwendung des GUM.....	15
Bild C1 – Iterative Berechnung der Nachweisgrenze.....	39

Tabellen

Tabelle E.1 – Verteilungsfunktion $\Phi(t)$ der standardisierten Normalverteilung.....	45
--	----

Nationales Vorwort

Das internationale Dokument ISO/CD 11929-1 „Determination of the characteristic limits (decision threshold, detection limit and limits of the coverage interval) for measurements of ionizing radiation – Part 1: Elementary applications“ (CD, en: Committee Draft) ist unverändert in diesen Norm-Entwurf übernommen worden. Dieser Norm-Entwurf enthält eine noch nicht autorisierte deutsche Übersetzung.

Um Zweifelsfälle in der Übersetzung auszuschließen, ist die englische Originalfassung des CD entsprechend der diesbezüglich durch die IEC erteilten Erlaubnis beigelegt. Die Nutzungsbedingungen für den deutschen Text des Norm-Entwurfes gelten gleichermaßen auch für den englischen IEC-Text.

Das internationale Dokument wurde vom SC 2 „Radiation protection“ des TC 85 „Nuclear Energy“ der Internationalen Organisation für Normung (ISO) erarbeitet und den nationalen Komitees zur Stellungnahme und Abstimmung vorgelegt.

Die erste Ausgabe ISO 11929:2010 ersetzte ISO 11929-1:2000, ISO 11929-2:2000, ISO 11929-3:2000, ISO 11929-4:2001, ISO 11929-5:2005, ISO 11929-6:2005, ISO 11929-7:2005 und ISO 11929-8:2005, die einer technischen Revision unterzogen wurden, speziell bzgl. der benutzten statistischen Verfahren zur Behandlung der Daten.

Diese zweite Ausgabe von ISO 11929 ersetzt ISO 11929:2010, die einer technischen Revision unterzogen und erweitert wurde bzgl. der Methoden der Unsicherheitsbeurteilung, wie sie in ISO/IEC Guide 98-3:2009, Uncertainty of measurement – Part 1: Guide to the expression of uncertainty in measurement, (JCGM 100:2008), im Folgenden GUM genannt, und ISO/IEC Guide 98-3-1:2008, Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Propagation of distributions using a Monte Carlo method, (JGCM 101:2008), im Folgenden GUM Supplement 1 genannt, niedergelegt sind.

Diese zweite Ausgabe von ISO 11929 besteht aus vier Teilen:

Teil 1: Elementare Anwendungen

Teil 2: Fortgeschrittene Anwendungen

Teil 3: Anwendung von Entfaltungsmethoden

Teil 4: Leitfaden zur Anwendung.

Dieser Teil der ISO 11929 basiert wie die vorangegangenen ISO 11929-5 bis -8 auf der Bayes-Statistik, d. h. entsprechend [1] bis [5] können bei ihrer Anwendung auch solche unsicheren Größen und Einflüsse berücksichtigt werden, die sich bei mehrmals wiederholten oder bei zählenden Messungen nicht zufällig verhalten.

Im Zuge der Revision wurde entschieden, dass die überarbeiteten ISO 11929-1 bis -3 und die ISO 11929-4 bis -8 in ein einziges konsistentes Dokument zusammengeführt werden, weil sie alle auf der gleichen Prozedur aufbauen, die zur Berechnung von charakteristischen Grenzen gebraucht wird.

Ebenso wie ISO 11929:2010 alle Publikationen der Reihe ISO 11929 ersetzt, werden mit dieser Norm alle Normen der Reihe DIN 25482 ersetzt. Die Zuordnung zwischen beiden Normenreihen ist **DIN VDE 0493 Beiblatt 1 (VDE 0493 Beiblatt 1):2006-09** zu entnehmen.

In der Normenreihe DIN 25482 gab es eine historisch bedingte systematische Inkonsistenz. DIN 25482-1 bis -7 beruhten auf konventioneller Statistik während DIN 25482-10 bis -13 bereits auf der Grundlage der Bayes-Statistik entwickelt wurden. Diese Inkonsistenz wird durch die Übernahme von ISO 11929:2010 behoben.

Für diese Norm ist das nationale Arbeitsgremium GUK 967.2 „Aktivitätsmessgeräte für den Strahlenschutz“ der DKE Deutsche Kommission Elektrotechnik Elektronik Informationstechnik im DIN und VDE (www.dke.de), Gemeinschaftsgremium mit dem Normenausschuss Radiologie (NAR) im DIN, zuständig. Für die konzentrierte Detailbehandlung hat dieses den Arbeitskreis GAK 967.2.1 „Nachweis- und Erkennungsgrenzen bei Kernstrahlungsmessungen“ eingesetzt.

Es wird auf die Möglichkeit hingewiesen, dass einige Elemente dieses Dokuments Patentrechte berühren können. ISO [und/oder] IEC sind nicht dafür verantwortlich, einige oder alle diesbezüglichen Patentrechte zu identifizieren.

Änderungen

Gegenüber DIN ISO 11929:2011-01 wurden folgende Änderungen vorgenommen:

- a) Aufteilung der Norm in vier Teile, von denen der erste Teil elementare Anwendungen behandelt, bei denen die Messunsicherheiten nach dem GUM ermittelt werden. Der zweite Teil behandelt fortgeschrittene Anwendungen, bei denen die Messunsicherheiten nach GUM Supplement 1 ermittelt werden, und der dritte Teil Anwendungen, bei denen Entfaltungsverfahren auf der Grundlage des GUM angewendet werden. Der vierte Teil gibt mit Beispielen Anleitung zur Anwendung der Norm;
- b) Durchgängige Anwendung der Bayes-Statistik nach dem Vorbild der DIN ISO 11929:2010-1, um die Messunsicherheiten nach GUM und GUM Supplement 1 vollständig berücksichtigen zu können (Typ-B-Unsicherheiten konnten mit der konventionellen Statistik nicht behandelt werden);
- c) Bereinigung der Terminologie und sprachlichen Formulierungen, um eine klarere Abgrenzung der Bayes-Statistik von der konventionellen oder frequentistischen Statistik zu erreichen;
- d) Korrektur eines Fehlers in DIN ISO 11929:2010-1 bei der Berechnung der Varianz bei wiederholten Messungen mit unbekannten zufälligen Einflüssen ([Anhang A.2](#));
- e) Verlagerung der theoretisch anspruchsvollen Darstellung der Grundlagen in den zweiten Teil der Norm;
- f) Konsistente Behandlung des Falls kleiner Ereigniszahlen auf der Grundlage des GUM Supplement 1 in Teil 2 der Norm;
- g) Explizitere Darstellung des Formelwerks, um die Anwendung zu erleichtern;
- h) Das DIN ISO 11929:2010 Beiblatt 1:2014-08 bleibt gültig;
- i) Der nationale Anhang zur Albedodosimetrie sollte erhalten bleiben und an DIN ISO 11929-1 angefügt werden, da er auf der Grundlage des GUM arbeitet.

Einleitung

Messunsicherheiten und charakteristische Grenzen, wie die Erkennungsgrenze, die Nachweisgrenze und die Grenzen des Überdeckungsintervalls, sowie der beste Schätzwert und die ihm zugeordnete Standardunsicherheit sind in der Metrologie allgemein und im Strahlenschutz von besonderer Bedeutung. Die Quantifizierung der Unsicherheit, die einem Messergebnis zuzuordnen ist, stellt eine Grundlage dar für das Vertrauen, das ein Individuum in das Messergebnis setzen kann. Konformität mit regulatorischen Grenzen, Richtwerten oder Referenzwerten kann nur durch Berücksichtigung und Quantifizierung aller Quellen der Unsicherheit gezeigt werden. Charakteristische Grenzen sind schließlich eine Grundlage für Entscheidungen unter Unsicherheit.

Diese Norm behandelt speziell charakteristische Grenzen für eine nicht-negative Messgröße bei der Messung ionisierender Strahlung. Sie ist jedoch anwendbar für einen weiten Bereich von Messverfahren, der weit über die Messung ionisierender Strahlung hinausgeht.

Die nach dieser Norm zu vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten für falsche Entscheidungen festzulegenden Grenzen gestatten es, Nachweismöglichkeiten für eine Messgröße und den durch diese Messgröße quantifizierten physikalischen Effekt wie folgt zu beurteilen:

- Die „Erkennungsgrenze“ erlaubt eine Entscheidung darüber, ob der durch die Messgröße quantifizierte physikalische Effekt vorliegt oder nicht.
- Die „Nachweisgrenze“ gibt an, welcher kleinste wahre Wert der Messgröße mit einem anzuwendenden Messverfahren noch nachgewiesen werden kann. Sie erlaubt damit eine Entscheidung darüber, ob das Messverfahren gestellten Anforderungen genügt und damit für den vorgesehenen Messzweck geeignet ist oder nicht.
- Die „Grenzen des Überdeckungsintervalls“ schließen im Fall, dass das Vorliegen des physikalischen Effektes erkannt wird, ein Überdeckungsintervall ein, der mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit den wahren Wert der Messgröße enthält.

Die genannten Grenzen werden im Folgenden zusammenfassend „charakteristische Grenzen“ genannt.

ANMERKUNG Gemäß dem ISO/IEC Guide 99:2007 aktualisiert in JCGM 200:2012 wird der Begriff „Überdeckungsintervall“ (engl.: “coverage interval”) anstatt “Konfidenzintervall” (engl.: “confidence interval”) benutzt, um die Wortwahl der Bayesschen Terminologie von der der konventionellen Statistik zu unterscheiden.

Alle diese charakteristischen Grenzen basieren auf der Bayes Statistik und auf dem ISO/IEC 98-3 Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement sowie auf dem ISO/IEC Guide 98-3-1 und ISO/IEC 98-3-2 (im Folgenden GUM, GUM Supplement 1, und GUM Supplement 2 genannt). Wie im Detail in Teil 2 dieser Norm beschrieben, werden die charakteristischen Grenzen mathematisch als Momente und Quantile von Wahrscheinlichkeitsdichten (engl.: probability density distributions) der mögliche Werte der Messgröße definiert.

Weil der Messunsicherheit in dieser Norm eine wichtige Rolle zukommt, werden die Auswertung von Messungen und die Behandlung von Messunsicherheiten nach den allgemeinen Verfahren gemäß GUM und GUM Supplement 1 (siehe auch Literaturhinweise [1] bis [5]) durchgeführt. Dies ermöglicht die strikte Trennung der Auswertung der Messungen einerseits und der Festlegung und Berechnung der charakteristischen Grenzen andererseits. Diese Norm basiert auf einer Theorie der Messunsicherheiten [14] bis [16], die ihrerseits auf der Bayes-Statistik [z.B. 17 bis 22] beruht und es erlaubt, auch solche unsichere Größen und Einflüsse zu berücksichtigen, die sich bei mehrmals wiederholten oder bei zählenden Messungen nicht zufällig verhalten. Die letztgenannten Unsicherheiten können mit der konventionellen oder frequentistischen Statistik nicht berücksichtigt werden.

Wegen der Entwicklungen der Metrologie in Bezug auf Messunsicherheiten, wie sie im GUM niedergelegt wurden, wurde ISO 11929:2010 auf der Grundlage des GUM entwickelt. Jedoch wurde die Bayes-Statistik und eine Bayesische Theorie der Messunsicherheiten benutzt. Diese Theorie liefert eine Bayesische Begründung für den GUM. Darüber hinaus basierte ISO 11929:2010 auf den Definitionen der charakteristischen Grenzen [1], einem Vorschlag für eine Norm [2], und einer einführenden Publikation [3]. ISO 11929:2010 vereinigt und ersetzt frühere Teile von ISO 11929 und war für eine Vielzahl von

Messverfahren ionisierender Strahlung sowie, in analoger Weise, auch für andere Messverfahren anwendbar.

Seitdem wurde das GUM Supplement 1 publiziert, in dem eine generellere Behandlung der Messunsicherheiten ausführlich beschrieben wurde und Monte Carlo Methoden für komplexe Auswertungen von Messungen herangezogen wurden. Die war die Motivation, ein entsprechendes Monte Carlo Supplement [4] zu ISO 11929:2010 zu schreiben und ISO 11929:2010 zu revidieren. Die Revision von ISO 11929 beruht weiterhin auf der Bayes-Statistik und kann als Brücke zwischen den Dokumenten ISO 11929:2010 und dem GUM Supplement 1 dienen. Darüber hinaus erlauben eine generellere Definition der charakteristischen Grenzen (Teil 2 dieser internationalen Norm) und die Monte Carlo Berechnung der charakteristischen Grenzen einen Schritt über den gegenwärtigen Stand der Normung, wie er in ISO 11929:2010 niedergelegt ist, hinauszugehen, da Wahrscheinlichkeitsverteilungen anstatt von Unsicherheiten fortgepflanzt werden können. Die Revision ist daher umfassender und erweitert den Bereich der Anwendungen.

Die revidierte ISO 11929 ist darüber hinaus expliziter bei der Berechnung der charakteristischen Grenzen. Sie korrigiert auch ein Problem in ISO 11929:2010 bzgl. unsicherer Größen und Einflüsse, die sich bei wiederholten Messungen nicht zufällig verhalten. Die Publikation [5] gibt eine Übersicht über die Grundlagen dieser Revision. Außerdem werden in Teil 3 dieser Norm detaillierte Anleitungen gegeben, wie charakteristische Grenzen im Falle multivariater Messungen und Entfaltungsverfahren zu berechnen sind. Für solche Messungen bietet GUM Supplement 2 die Grundlage für die Auswertung der Messunsicherheiten.

In dieser Norm werden Formeln für die Berechnung der charakteristischen Grenzen einer Messgröße der Messung ionisierender Strahlung angegeben, sowohl mittels der „Standardmessunsicherheit“ der Messgröße (im Folgenden „Standardunsicherheit“) nach dem GUM als auch mittels Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (engl.: probability density functions, PDFs) der Messgröße, die auf der Grundlage des GUM Supplement 1 ermittelt werden. Die Standardunsicherheiten oder die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen berücksichtigen sowohl die Unsicherheiten der aktuellen Messung als auch solche der Probenbehandlung, der Kalibrierung von Messsystemen und andere Einflüsse. Bei letzteren wird angenommen, dass sie aus früheren Untersuchungen bekannt sind.

Bestimmung der charakteristischen Grenzen (Erkennungsgrenze, Nachweisgrenze und Grenzen des Überdeckungsintervalls) bei Messungen ionisierender Strahlung – Teil 1: Elementare Anwendungen

1 Anwendungsbereich

Diese Norm legt im Bereich der Metrologie ionisierender Strahlung ein Verfahren zur Berechnung der „Erkennungsgrenze“, der „Nachweisgrenze“ und der „Grenzen des Überdeckungsintervalls“ für eine nicht-negative Messgröße der ionisierenden Strahlung bei Messungen mit Zeit- und Impulsvorwahl fest. Das Messergebnis ergibt sich aus den Ergebnissen von Messungen einer Bruttozählrate und einer Nulleffektzählrate sowie weiteren Größen aufgrund eines Modells der Auswertung. Speziell kann die Messgröße die Nettozählrate als Differenz der Bruttozählrate und der Nulleffektzählrate oder die Nettoaktivität einer Probe sein. Sie kann auch durch Kalibrierung der Messeinrichtung, Probenbehandlung und andere Faktoren beeinflusst sein.

Diese Norm ist in vier Teile aufgeteilt: elementare Anwendungen auf der Grundlage des GUM in Teil 1, fortgeschrittene Anwendungen auf der Grundlage von GUM Supplement 1 in Teil 2, Anwendungen auf Entfaltungungsverfahren in Teil 3 und Anleitungen zur Anwendung in Teil 4.

Teil 1 behandelt elementare Anwendungen zählender Messungen, wie sie häufig im Bereich der Metrologie ionisierender Strahlung auftreten werden. Dieser Teil beschränkt sich auf Anwendungen, bei denen die Unsicherheiten auf der Grundlage des GUM (JCGM 2008) ermittelt werden können. Im [Anhang A](#) wird der spezielle Fall wiederholter zählender Messungen mit zufälligen Einflüssen und in [Anhang B](#) Messungen mit linearen analogen Ratemetern behandelt.

Teil 2 erweitert die frühere Norm ISO 11929:2010 auf die Auswertung von Messungen, bei denen die Messunsicherheiten nach dem GUM Supplement 1 ermittelt werden. Zusätzlich decken die fortgeschrittenen Anwendungen wie Auswertung der Messung mittels Entfaltungsmethoden und mittels Entfaltungsmethoden ausgewertete zählende spektrometrische Vielkanalmessungen, insbesondere spektrometrische Messungen von Alpha- und von Gammastrahlung. Teil 2 enthält außerdem Erläuterungen zu allgemeinen Aspekten zählender Messungen und zur Anwendung der Bayes-Statistik auf Messungen.

Teil 3 behandelt die Auswertung von Messungen mit Hilfe von Entfaltungungsverfahren, zählende Vielkanalmessungen insofern sie mit Entfaltungsmethoden ausgewertet werden, insbesondere alpha- und gamma-spektrometrische Messungen. Außerdem gibt Teil 3 Anleitungen, wie mit Korrelationen und Kovarianzen zu verfahren ist.

Teil 4 gibt nach einer kurzen Darstellung des Verfahrens mit einer Fülle von numerischen Beispielen Anleitungen zur Anwendung dieser Norm.

Sinngemäß gilt diese Norm auch bei anderen Messungen gleich welcher Art, wenn dasselbe Modell der Auswertung anzuwenden ist. Weitere praktische Beispiele können in anderen ISO-Normen gefunden werden, z. B. ISO 18589 [\[6\]](#), ISO 9696 [\[7\]](#), ISO 9697 [\[8\]](#), ISO 9698 [\[9\]](#), ISO 10703 [\[10\]](#), ISO 7503 [\[11\]](#), ISO 28218 [\[12\]](#), und ISO 11885 [\[13\]](#).

2 Zusammenfassung der Verfahren zur Auswertung einer Messung und zur Berechnung der charakteristischen Grenzen

2.1 Allgemeines

Abschnitt 2 beschreibt in kurzer Form die Verfahrensschritte, denen bei der Auswertung der Messung einer einzelnen Messgröße auf der Grundlage des GUM und der Berechnung der charakteristischen Grenzen, d.h. der Erkennungsgrenze, der Nachweisgrenze und den Grenzen des Überdeckungsintervalls, zu folgen ist. Das Verfahren ist für die meisten Messaufgaben bei der Messung ionisierender Strahlung anwendbar.

Es wird angenommen, dass die Messgröße nicht-negativ ist. Diese Information ist lediglich benutzt bei der Berechnung des Überdeckungsintervalls und des besten Schätzwertes und der ihm zugeordneten Standardunsicherheit. Es ist ein weiteres Charakteristikum von Messungen ionisierender Strahlung, dass diese Messungen in Gegenwart eines Strahlungsuntergrundes (Nulleffektes) ausgeführt werden müssen, der von einer Bruttomessgröße subtrahiert werden muss. Die Verfahren, die in diesem Standard beschrieben werden, sind gleichermaßen anwendbar auf alle Messverfahren, bei denen der Beitrag eines Untergrundes oder analytischen Blanks von einer Brutto Messgröße subtrahiert werden muss.

Es gibt jedoch wichtige Ausnahmen, bei denen die hier beschriebenen Verfahren keine zuverlässigen Ergebnisse liefern und bei denen andere Verfahren anzuwenden sind, die im GUM Supplement 1 beschrieben sind. Solche Verfahren sind in Teil 2 dieser Norm behandelt. Sowohl die Charakteristika der Verfahren als auch die Werkzeuge zur Entscheidungsfindung, ob Teil 1 oder Teil 2 dieser Norm auf eine spezielles Messproblem anzuwenden sind, sind in späteren Abschnitten dieser Norm beschrieben.

Die Anwendung von DIN ISO 11929-1 erfolgt in 9 aufeinander folgenden Schritten, die in den folgenden Unterabschnitte 2.2 bis 2.10 beschrieben sind. Ein detaillierter Ablaufplan für DIN ISO 11929-1 ist in [Bild 1](#) gegeben.

Schritt 1: Modellierung der Messung

Schritt 2: Generelle Überlegungen über die Anwendbarkeit des GUM und Entscheidung, ob nach dem GUM und DIN ISO 11929-1 oder nach GUM Supplement 1 und DIN ISO 11929-2 vorzugehen ist.

Schritt 3: Auswertung der Eingangsgrößen, ihrer Standardunsicherheiten und Kovarianzen, des primären Messergebnisses und der ihm zugeordneten Standardunsicherheit

Schritt 4: Berechnung der Standardunsicherheit als Funktion eines angenommenen wahren Wertes der Messgröße

Schritt 5: Berechnung der Erkennungsgrenze und zu fällende Entscheidungen

Schritt 6: Berechnung der Nachweisgrenze und Beurteilung des Messverfahrens

Schritt 7: Berechnung des Überdeckungsintervalls der Messgröße

Schritt 8: Berechnung des besten Schätzwertes und der ihm zugeordneten Standardunsicherheit

Schritt 9: Prüfbericht

2.2 Modellierung der Messung

Das Ziel der Auswertung einer Messung ist es, einen Schätzwert y einer Messgröße Y und der ihm zugeordneten Standardunsicherheit $u(y)$ zu erhalten. In den meisten Fällen wird die Messgröße nicht direkt gemessen, sondern sie wird bestimmt aus anderen Größen $X_1, \dots, X_m$ durch eine funktionale Beziehung G ,

$$Y = G(X_1, \dots, X_m) \quad (1)$$

die als Modell der Auswertung bezeichnet wird. Im Modell der Auswertung ist die Messgröße die Ergebnisgröße und die Größen von der sie abhängt sind Eingangsgrößen. Die Eingangsgröße X_1 , so wie zum Beispiel eine Bruttozählrate, ist insofern besonders, als ausschließlich sie die Information über den zu messenden Effekt enthält. Das Modell der Auswertung ist entweder eine mathematischer funktionaler Zusammenhang oder eine Computeralgorithmus, mit dem man einen Schätzwert y der Messgröße Y zu plausiblen Schätzwerten der Eingangsgrößen $x_1, \dots, x_m$ über die Beziehung $y = G(x_1, \dots, x_m)$ erhält. y ist ein Schätzwert des wahren Wertes $\tilde{y}$ der Messgröße Y , der selbst unbekannt und unerkennbar und daher unsicher ist. Die dem Schätzwert y zugeordnete Standardunsicherheit $u(y)$ quantifiziert die Unsicherheit bezüglich $\tilde{y}$.

ANMERKUNG Es wird angenommen, dass die Annahme eines wahren Wertes (siehe [2.5](#)) ausschließlich einer Veränderung des Wertes der Größe x_1 zu $\tilde{x}_1$ entspricht. Für einen gegebenen Wert von Y , ist es im Allgemeinen möglich den zugehörigen Wert von $\tilde{x}_1$ zu bestimmen. Dies kann formelmäßig als $\tilde{x}_1 = G^{-1}(\tilde{y}, x_2, \dots, x_m)$ beschrieben werden. Siehe [2.5](#) bezüglich Beispielen.

2.3 Allgemeine Überlegungen über die Anwendbarkeit des GUM

Die Auswertung einer Messung nach diesem Teil der Norm erfolgt ausschließlich auf der Grundlage der Verfahren, die im GUM empfohlen werden. Die Anwendung des GUM ist jedoch beschränkt auf Modelle der Auswertung, die – zumindest lokal – linearisiert werden können. Der GUM nutzt zudem eine Taylorreihenentwicklung erster Ordnung. Unabhängig von diesen Einschränkungen kann der GUM erfolgreich für eine Vielzahl von Anwendungen eingesetzt werden, häufig sogar in Fällen die eigentlich die Grenzen der erklärten Anforderungen überschreiten.

Der GUM bedient sich einer Bayes-Theorie der Messunsicherheiten [14 bis 16]. Jedoch findet man eine klare Aussage über die statistischen Grundlagen und Methoden und Vorschriften für die mangelnde Allgemeingültigkeit des GUM erst im GUM Supplement 1. Das GUM Supplement 1 stellt fest, dass die Methodik ausschließlich auf der Bayes-Statistik [z.B. 17 bis 22] beruht und dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen, die die Unsicherheit vollständig beschreiben, mit Hilfe des Prinzips der maximalen Informationsentropie (PME) [23] auf der Basis aller verfügbaren Information abgeleitet werden. Ein besonderer Aspekt ist, dass nur die Bayes-Statistik in der Lage ist, sogenannte Typ B Unsicherheiten zu berücksichtigen, die nicht durch wiederholte oder zählende Messungen bestimmt werden können, sondern aus anderen Quellen stammen.

Der originale GUM ist im GUM Supplement 1 als ein Spezialfall enthalten, nämlich dass die verfügbare Information lediglich aus den Schätzwerten x_i und den ihnen zugeordneten Standardunsicherheiten $u(x_i)$ besteht. Detaillierte Ausführungen über die statistischen Grundlagen von DIN ISO 11929 sind im [Anhang C](#) von ISO 11929-2 gegeben. Dort werden auch weitere Informationen zur Notwendigkeit einer Entscheidungstheorie, z.B. [24], für die Definition der Erkennungsgrenze gegeben.

Der Anwender dieser Norm ist verantwortlich zu entscheiden, ob der GUM anwendbar ist, d.h. ob das Modell der Auswertung linear ist oder zumindest lokal durch eine lineare Funktion angenähert werden kann. Wenn der GUM zur Berechnung des primären Messergebnisses y und der ihm zugeordneten Standardunsicherheit $u(y)$ benutzt wird und wenn während der nachfolgenden Berechnungen der charakteristischen Grenzen festgestellt wird, dass die Gleichung für die Nachweisgrenze keine Lösung besitzt, muss der Anwender dieser Norm entscheiden, ob dieser Mangel akzeptabel ist. Ist das nicht der Fall, ist DIN ISO 11929-2 in Verbindung mit dem GUM Supplement 1 anzuwenden, dessen Ansatz auch die Berücksichtigung großer relativer Unsicherheiten zulässt.

2.4 Auswertung der Eingangsgrößen, ihrer Standardunsicherheiten und Kovarianzen, des primären Messergebnisses und der ihm zugeordneten Standardunsicherheit

Um einen Schätzwert y der Messgröße zu erhalten, ist es zuerst erforderlich Schätzwerte x_i der X_i zu bestimmen. Die dem Schätzwert y zugeordnete Standardunsicherheit $u(y)$ wird dann aus den Schätzwerten x_i zugeordneten Standardunsicherheiten $u(x_i)$ und ihren Kovarianzen $u(x_i, x_j)$ berechnet. Anleitung hierzu findet sich in [6.4](#).

Der primäre Schätzwert y von Y ist gegeben durch:

$$y = G(x_1, \dots, x_m) \quad (2)$$

Zur Bestimmung der Standardunsicherheit $u(y)$ bestimmt man zuerst die Sensitivitätskoeffizienten $c_1, \dots, c_m$. der i te Sensitivitätskoeffizient, c_i , ist $\partial G / \partial X_i$, die erste partielle Ableitung von G nach X_i genommen bei $x_1, \dots, x_m$.

Die Standardunsicherheit $u(y)$, die y zugeordnet ist, ist durch das Gesetz zur Fortpflanzung von Unsicherheiten gegeben:

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^m c_i^2 \cdot u^2(x_i). \quad (3)$$

Ansonsten können auch Kovarianzen berücksichtigt werden:

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^m c_i^2 \cdot u^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=i+1}^m c_i \cdot c_j \cdot u(x_i, x_j) \quad (4)$$

In vielen Fällen von Messungen ionisierender Strahlung sind die Eingangsgrößen X_i nicht korreliert und Gleichung (3) kann angewendet werden. Anleitungen zur Behandlung von Korrelationen und Kovarianzen sind in Anhang A von DIN ISO 11929-3 gegeben.

Die Gleichungen (2), (3) und (4) gelten, wenn Y als Linearkombination der x_i dargestellt werden kann oder wenn man entscheidet, dass die Nichtlinearität von G in der Umgebung der Schätzwerte x_i vernachlässigbar ist. Wenn man entscheidet, dass das Modell der Auswertung nicht hinreichend linearisierbar ist, oder in Zweifelsfällen, sollten die Monte Carlo Methoden nach GUM Supplement 1 und DIN ISO 11929-2 angewendet werden, um die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF = probability density function) für Y zu ermitteln und damit y und $u(y)$ sowie die charakteristischen Grenzen zu bestimmen.

2.5 Berechnung der Standardunsicherheit als Funktion eines angenommenen wahren Wertes der Messgröße

Zur Bestimmung der Erkennungsgrenze und der Nachweisgrenze ist es erforderlich, Berechnungen für modifizierte oder angenommene wahre Werte $\tilde{y}$ der Messgröße durchzuführen, die dabei als gegebene Werte angesehen werden. Ein solcher gegebener Wert entspricht ausschließlich einem modifizierten Wert der Eingangsgröße, die die Information über den Messeffekt trägt. Gewöhnlich ist diese Größe die Bruttozählrate X_1 . Alle anderen Eingangsgrößen sind nicht betroffen. In den bei Radioaktivitätsmessungen üblichen Modellen der Auswertung, die hier betrachtet werden, hängt der angenommene (gegebene) wahre Wert $\tilde{y}$ linear vom zugehörigen Wert $\tilde{x}_1$ ab, während x_2 bis x_m unverändert bleiben. Dies ermöglicht es, $\tilde{x}_1$ als lineare Funktion von $\tilde{y}$ zu berechnen. Man kann dies schreiben als $\tilde{x}_1 = G^{-1}(\tilde{y}, x_2, \dots, x_m)$. Da $\tilde{x}_1$ eine Bruttozählrate ist, ist die Standardunsicherheit in den allermeisten Fällen gegeben durch $\tilde{u}(\tilde{x}_1) = \sqrt{\tilde{x}_1 / t}$. Indem man das Paar $(x_1, u(x_1))$ in der Formel für die Fortpflanzung der Unsicherheiten durch $(\tilde{x}_1, \tilde{u}(\tilde{x}_1))$ ersetzt, erhält man die Standardunsicherheit für einen angenommenen wahren Wert $\tilde{y}$. Die Standardunsicherheit zu $\tilde{y}$ ist dann basierend auf $\tilde{y} = G(\tilde{x}_1, x_2, \dots, x_m)$ gegeben durch:

$$\tilde{u}^2(\tilde{y}) = \left(\frac{\partial G}{\partial \tilde{x}_1} \right)^2 \tilde{u}^2(\tilde{x}_1) + \sum_{i=2}^m \left(\frac{\partial G}{\partial x_i} \right)^2 u^2(x_i) \quad (5)$$

Ist das Modell der Auswertung zum Beispiel von der Form $Y = (X_1 - X_2) \cdot W$ mit der Bruttozählrate X_1 , der Nulleffektzählrate X_2 und einem Kalibrierfaktor W , ergibt sich, dass $\tilde{u}^2(\tilde{y})$ eine quadratische Funktion von $\tilde{y}$ ist mit einem quadratischen Term $\tilde{y}^2 \cdot u_{\text{rel}}^2(w)$. Siehe Abschnitt 7 bezüglich weiterer Einzelheiten.

In einigen Fällen kann $\tilde{u}^2(\tilde{y})$ jedoch nur näherungsweise durch Interpolation bestimmt werden. Eine solche Interpolation erfordert die Bestimmung von $\tilde{u}^2(0)$ und zumindest einem Messergebnis $y > 0$ und der ihm zugeordneten Standardunsicherheit $u(y)$ mittels $\tilde{u}^2(\tilde{y}) = \tilde{u}^2(0) \cdot (1 - \tilde{y}/y) + u^2(y) \cdot \tilde{y}/y$.

Für ein Modell der Auswertung der Form $Y = (X_1 - X_2) \cdot W$ mit einer beliebigen Bruttogröße X_1 , eine beliebigen Nulleffekt- oder Blankgröße X_2 und einem Kalibrierfaktor W kann $\tilde{u}^2(0)$ bestimmt werden indem man $\tilde{y} = 0$ annimmt, dass man für erwartet, das $x_1 = x_2$ ist, und daher $\tilde{u}^2(0) = 2 \cdot u^2(x_2)$ gilt. Anhang A.2 enthält detaillierte Anweisungen für einen solchen Fall.

Wenn die Anwendung dieser Norm über die Messung ionisierender Strahlung hinaus ausgedehnt wird, muss Information über $\tilde{u}(\tilde{y})$ beschafft werden, zum Beispiel durch wiederholte Messungen unterschiedlicher Referenzmaterialien, oder es ist die Interpolationsmethode zu benutzen.

2.6 Berechnung der Erkennungsgrenze und zu fällende Entscheidungen

Die Erkennungsgrenze erlaubt es eine Entscheidung zu fällen, ob der physikalische Effekt, der durch die Messgröße quantifiziert wird, vorhanden ist oder nicht. Die Modelle der Auswertung in dieser Norm haben das Charakteristikum, dass immer ein Beitrag des Nulleffektes von einer Bruttogröße zu subtrahieren ist. Der Nulleffekt kann ein Beitrag der Hintergrundstrahlung oder irgendeines Blanks des Messverfahrens sein. Die Existenz eines unsicheren Nulleffektes oder Blanks führt zu der Frage, ob ein Beitrag der Probe erkannt werden kann oder nicht. Da alle Schätzwerte der Eingangsgrößen und folglich auch die Messgröße selbst unsicher sind, kann diese Frage nur auf der Grundlage einer Entscheidungstheorie, z.B. [24], beantwortet werden. Dabei wird eine vorher festgelegte Wahrscheinlichkeit α für eine falsche Entscheidung zugrunde gelegt. Dies führt zur Definition der Erkennungsgrenze y^* :

$$P(y > y^* | \tilde{y} = 0) = \alpha \quad (6)$$

Mit einer quadratischen Verlustfunktion (siehe 8.2) und Anwendung des GUM für die Ermittlung der Unsicherheiten ist die Erkennungsgrenze gegeben durch

$$y^* = k_{1-\alpha} \cdot \tilde{u}(0) \quad (7)$$

wobei $k_{1-\alpha}$ das $(1-\alpha)$ -Quantil der Standardnormalverteilung ist; siehe Anhang E.

Wenn das primäre Messergebnis, y , größer ist als die Erkennungsgrenze, wird entschieden, dass der Messgröße entsprechende physikalische Effekt vorhanden ist, d.h. dass ein Beitrag der Probe erkannt wurde.

Wenn das primäre Messergebnis, y , kleiner ist als die Erkennungsgrenze y^* , wird entschieden, dass das Ergebnis nicht dem physikalischen Effekt zugeschrieben werden kann. Gleichwohl kann daraus nicht geschlossen werden, dass der Effekt nicht vorhanden ist. Wenn der physikalische Effekt wirklich nicht vorhanden ist, ist die Wahrscheinlichkeit, die falsche Entscheidung, er sei vorhanden, zu treffen, gleich dem vorher festgelegten Wert, α (Wahrscheinlichkeit einer falschen Entscheidung; siehe 8.1).

2.7 Berechnung der Nachweisgrenze und Beurteilung des Messverfahrens

Die Nachweisgrenze ist der kleinste wahre Wert der Messgröße, der mit dem Messverfahren mit hoher Wahrscheinlichkeit erkannt werden kann. Die Nachweisgrenze erlaubt eine Entscheidung, ob ein Messverfahren Anforderungen genügt und daher für den Messzweck geeignet ist.

Für jedes primäre Messergebnis y besteht die Möglichkeit, dass man aufgrund der durch die Erkennungsgrenze y^* gegebenen Entscheidungsregel fälschlicher Weise entscheidet, der physikalische Effekt sei nicht vorhanden, obwohl er in der Realität vorhanden ist. Um die Wahrscheinlichkeit für eine solche falsche Entscheidung unter einem vorher festgelegten Wert β zu begrenzen, wird die Nachweisgrenze als kleinster wahrer Wert der Messgröße definiert, die die Bedingung erfüllt:

$$P(y < y^* | \tilde{y} = y^*) = \beta \quad (8)$$

Wenn der GUM zur Ermittlung der Messunsicherheit benutzt wird, ist die Nachweisgrenze gegeben durch die implizite Gleichung

$$y^\# = y^* + k_{1-\beta} \cdot \tilde{u}(y^\#) \quad (9)$$

wobei $k_{1-\beta}$ das $(1-\beta)$ -Quantil der Standardnormalverteilung ist; siehe [Anhang E](#).

Iterative Lösungen der [Gleichung \(9\)](#) sind in [Anhang C](#) und explizite Lösungen in [Anhang D](#) beschrieben.

Eine Nicht-Existenz der Nachweisgrenze deutet darauf hin, dass zu große Unsicherheiten der Eingangsgrößen vorliegen und dass die Näherung des GUM nicht hinreicht. In einem solchen Fall ist die Lösung, die Unsicherheiten auf der Basis von Verteilungen gemäß GUM Supplement 1 zu ermitteln und gemäß DIN ISO 11929-2 zu verfahren.

2.8 Berechnung des Überdeckungsintervalls der Messgröße

Wenn das primäre Messergebnis y größer ist als die Erkennungsgrenze y^* werden die unteren und oberen Grenzen eines Überdeckungsintervalls y_{low} und y_{up} berechnet. Ein Überdeckungsintervall $[y_{\text{low}}, y_{\text{up}}]$ ist ein Intervall, dass den wahren Wert einer nicht-negativen Messgröße mit einer festgelegten Überdeckungswahrscheinlichkeit $(1-\gamma)$, häufig mit dem Wert 0,95, enthält.

$$P\left(\tilde{y} \in [y_{\text{low}}, y_{\text{up}}] \mid y, u(y), Y \geq 0\right) = 1 - \gamma \quad (10)$$

Die Definition des Überdeckungsintervalls ist ohne weitere Festlegungen mehrdeutig. In dieser Norm werden die Grenzen von zwei häufig benutzten Überdeckungsintervalle alternativ berechnet.

Die Grenzen des probabilistisch symmetrischen Überdeckungsintervalls $y^{\triangleleft}$ und $y^{\triangleright}$ zur Überdeckungswahrscheinlichkeit $(1-\gamma)$ sind eindeutig definiert durch

$$P\left(\tilde{y} < y^{\triangleleft} \mid y, u(y), Y \geq 0\right) = P\left(\tilde{y} > y^{\triangleright} \mid y, u(y), Y \geq 0\right) = \gamma/2 \quad (11)$$

Wenn der GUM zur Ermittlung der Unsicherheit benutzt wird, werden die Grenzen des probabilistisch symmetrischen Überdeckungsintervalls mit der Hilfsgröße $\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{y/u(y)} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv = \Phi(y/u(y))$ berechnet durch

$$y^{\triangleleft} = y - k_p u(y) \text{ mit } p = \omega \cdot (1 - \gamma/2) \text{ und } y^{\triangleright} = y + k_q u(y) \text{ mit } q = (1 - \omega\gamma)/2 \quad (12)$$

wobei k_p , k_q die Quantile der Standardnormalverteilung zu den Wahrscheinlichkeiten p und q sind; siehe [Anhang E](#).

Die Grenzen des kürzesten Überdeckungsintervalls $y^<$ und $y^>$ zur Überdeckungswahrscheinlichkeit $(1-\gamma)$ sind eindeutig definiert durch

$$P\left(\tilde{y} \in [y^<, y^>] \mid y, u(y), Y \geq 0, (y^> - y^<) = \min\right) = 1 - \gamma \quad (13)$$

Wenn der GUM zur Ermittlung der Unsicherheit benutzt wird, werden die Grenzen des kürzesten Überdeckungsintervalls mit der Hilfsgröße ω berechnet durch

$$y^{\diamond} = y \pm k_p u(y) \text{ mit } p = \omega \cdot (1 - \omega(1 - \gamma)/2). \text{ Wenn } y^< < 0: y^< = 0; y^> = y + k_q u(y); q = 1 - \omega\gamma, \quad (14)$$

wobei k_p , k_q die Quantile der Standardnormalverteilung zu den Wahrscheinlichkeiten p und q sind; siehe [Anhang E](#).

2.9 Berechnung des besten Schätzwertes und der ihm zugeordneten Standardunsicherheit

Wenn das primäre Messergebnis y größer ist als die Erkennungsgrenze y^* kann auch der beste Schätzwert $\hat{y}$ und die ihm zugeordnete Standardunsicherheit $u(\hat{y})$ berechnet werden. Im Gegensatz zum primären Messergebnis y und der ihm zugeordneten Standardunsicherheit $u(y)$ berücksichtigt der beste Schätzwert $\hat{y}$ und die ihm zugeordnete Standardunsicherheit $u(\hat{y})$, dass die Messgröße nicht-negativ ist.

Wenn der GUM zur Ermittlung der Unsicherheit benutzt wird, wird der beste Schätzwert und die ihm zugeordnete Standardunsicherheit berechnet durch

$$\hat{y} = y + \frac{u(y) \cdot \exp\left\{-y^2 / \left[2u^2(y)\right]\right\}}{\omega\sqrt{2\pi}} \quad \text{und} \quad u(\hat{y}) = \sqrt{u^2(y) - (\hat{y} - y)\hat{y}} \quad (15)$$

Für $y \geq 4u(y)$ sind die Näherungen $\hat{y} = y; \hat{u}(y) = u(y)$ hinreichend und eine separate Berechnung des besten Schätzwertes $\hat{y}$ und der ihm zugeordneten Standardunsicherheit $u(\hat{y})$ ist nicht erforderlich.

2.10 Prüfbericht

Festlegungen zum Prüfbericht werden in [Abschnitt 11](#) gemacht.

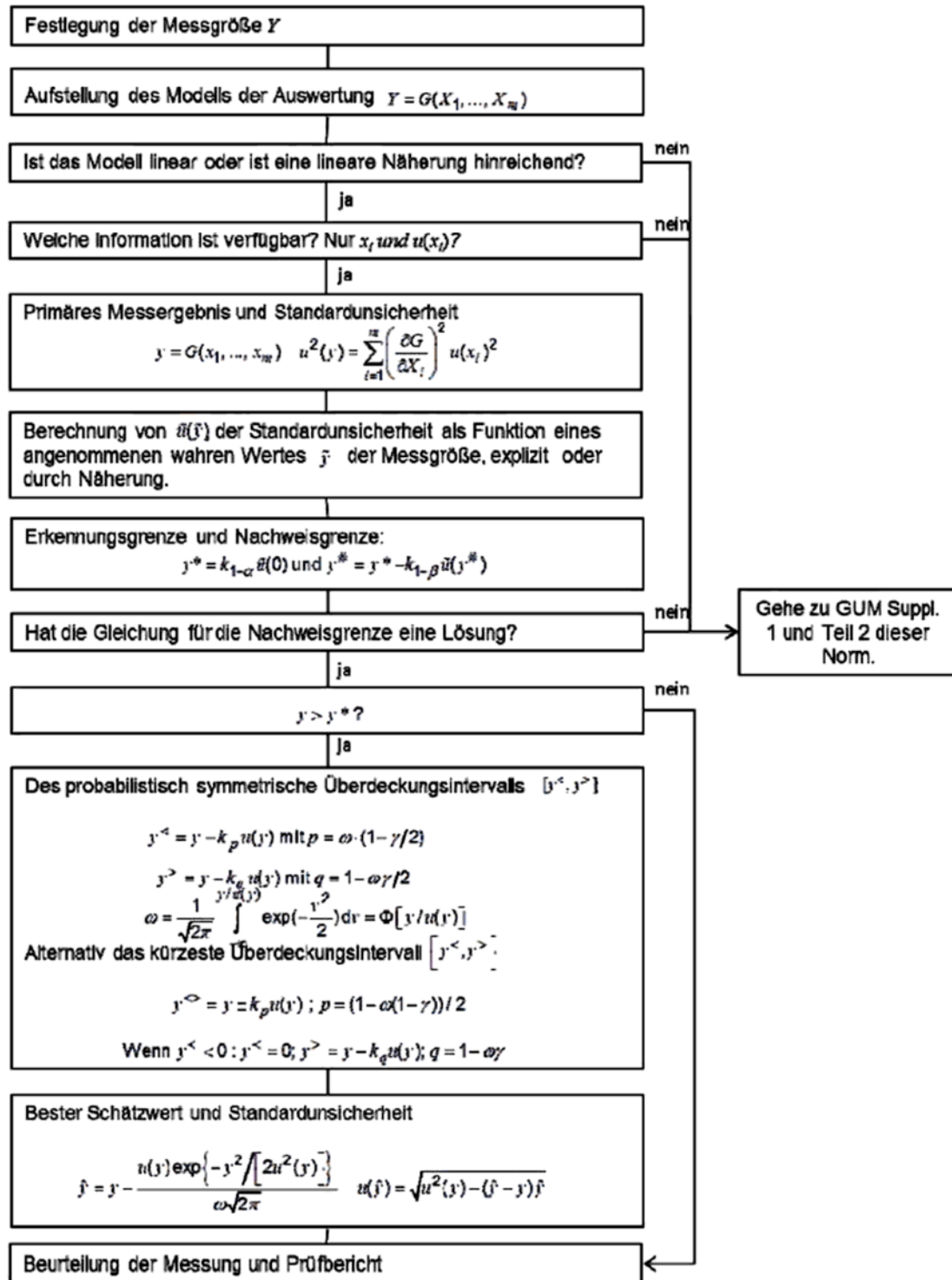


Bild 1 – Flussdiagramm für DIN ISO 11929-1 bei Anwendung des GUM

3 Normative Verweisungen

Die folgenden Dokumente, die in diesem Dokument teilweise oder als Ganzes zitiert werden, sind für die Anwendung dieses Dokuments erforderlich. Bei datierten Verweisungen gilt nur die in Bezug genommene Ausgabe. Bei undatierten Verweisungen gilt die letzte Ausgabe des in Bezug genommenen Dokuments (einschließlich aller Änderungen).

– Entwurf –

E DIN ISO 11929-1 (VDE 0493-9291):2016-12

EN ISO 80000-1:2013, *Größen und Einheiten – Teil 1: Allgemeines*

EN ISO 80000-10:2013, *Größen und Einheiten – Teil 10: Atom- und Kernphysik*

ISO/IEC Guide 98-3:2008, *Uncertainty of measurement – Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement (ISO/IEC GUIDE 98-3:1995)*

ISO/IEC Guide 99:2007, *International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM)*

ISO/IEC Guide 98-1:2009, *Uncertainty of measurement - An introduction to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement", JCGM 104:2009*

ISO/IEC Guide 98-3:2009, *Uncertainty of measurement - Part 1: Guide to the expression of uncertainty in measurement, JCGM 100:2008; referred to as GUM for short in this standard*

ISO/IEC Guide 98-3-1:2008, *Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" – a Propagation of distributions using a Monte Carlo method, JCGM 101:2008; referred to as GUM Supplement 1 for short in this standard.*

ISO/IEC Guide 98-3-2:2008, *Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" – Models with any number of output quantities, JCGM 102:2011; referred to as GUM Supplement 2 for short in this standard*

ISO/IEC Guide 98-4:2012, *Evaluation of measurement data – The role of measurement uncertainty in conformity assessment, JCGM 106:2012*

ISO 3534-1, *Statistics – Vocabulary and symbols – Part 1: General statistical terms and terms used in probability*

4 Begriffe

Für die Anwendung dieses Dokuments gelten die Begriffe aus EN ISO 80000-1, EN ISO 80000-10, ISO/IEC Guide 98-3, ISO/IEC Guide 98-3-1, ISO/IEC 98-3-2, ISO/IEC Guide 99 und ISO 3534-1 sowie die folgenden Begriffe.

4.1

Größenwert

Wert einer Größe

(en: quantity value, value of a quantity, value)

Zahl und Einheit, die zusammen den Wert einer Größe ausdrücken

[QUELLE: JCGM 200:2012, 1.19]

4.2

Messung

(en: measurement)

Prozess, experimentell einen oder mehrere Werte einer Größe zu bestimmen, die sinnvoller Weise der Größe zugeordnet werden können

[QUELLE: JCGM 200:2012, 2.1]

4.3

Messgröße

(en: measurand)

zu messende Größe

der Praxis unerkennbar ist. Andere Ansätze verzichten vollständig auf das Konzept des wahren Wertes und stützen sich auf das Konzept der metrologischen Kompatibilität von Messergebnissen für die Beurteilung ihrer Gültigkeit.

Anmerkung 2 zum Begriff: Im speziellen Fall einer Naturkonstante nimmt man an, dass die Größe einen einzelnen wahren Wert besitzt.

Anmerkung 3 zum Begriff: Wenn die Unsicherheit aufgrund der Definition der Messgröße als vernachlässigbar verglichen mit anderen Komponenten der Messunsicherheit angehen werden kann, mag angenommen werden, dass die Messgröße einen "wirklichen wahren Wert" besitzt. Das ist der Ansatz, der im GUM und dazugehörigen Dokumenten benutzt wird, wobei das Wort "wahr" als redundant angesehen wird.

4.10

Messfehler

Fehler der Messung

Fehler

(en: **measurement error, error of measurement, error**)

Gemessener Größenwert minus einem Referenzgrößenwert

[QUELLE: JCGM 200:2012, 2.16]

Anmerkung 1 zum Begriff: Das Konzept des "Messfehlers" kann benutzt werden, wenn

- a) es einen einzigen Referenzgrößenwert als Bezug gibt, der vorliegt, wenn eine Kalibrierung mit Hilfe eines Messstandards mit vernachlässigbarer Messunsicherheit vorgenommen wird oder wenn ein konventioneller Größenwert gegeben ist, in welchem Fall der Messfehler bekannt ist.
- b) angenommen wird, dass eine Messgröße einen einzigen wahren Wert besitzt oder einen Satz von wahren Werten in einem Bereich vernachlässigbarer Größe, in dem die Messunsicherheit unbekannt ist.

4.11

Messunsicherheit

Unsicherheit der Messung

Unsicherheit

(en: **measurement uncertainty, uncertainty of measurement, uncertainty**)

nichtnegativer Parameter, der die Streuung der Werte charakterisiert, die vernünftigerweise der Messgröße auf der Grundlage der benutzten Information zugeordnet werden können

[QUELLE: JCGM 200:2012, 2.26]

Anmerkung 1 zum Begriff: Messunsicherheiten enthalten Beiträge von systematischen Effekten, wie Korrekturen und zugewiesene Größenwerte gemessener Standards, als auch definitorische Unsicherheiten. Bisweilen werden systematische Effekte nicht korrigiert, sondern stattdessen zugeordnete Messunsicherheiten berücksichtigt.

Anmerkung 2 zum Begriff: Der Parameter kann zum Beispiel eine Standardabweichung, genannt Standardunsicherheit (oder ein Vielfaches davon) sein oder die Halbwertsbreite eines Intervalls mit einer angegebenen statistischen Überdeckungswahrscheinlichkeit.

Anmerkung 3 zum Begriff: Die Messunsicherheit enthält üblicherweise mehrere Komponenten. Einige dieser Komponenten können aus statistischen Verteilungen als Ergebnisse von wiederholten Messungen ermittelt und als Standardunsicherheiten charakterisiert werden. Die übrigen Komponenten, die auch als Standardunsicherheiten charakterisiert werden können, werden aus Wahrscheinlichkeitsverteilungen gewonnen, die auf Erfahrung und anderen Informationen beruhen.

Anmerkung 4 zum Begriff: Allgemein gilt für einen Satz von Informationen, dass die Messunsicherheit einem gemessenen Größenwert der Messgröße zugeordnet ist. Eine Veränderung dieses Größenwerts bewirkt auch eine Veränderung der zugeordneten Unsicherheit.

4.12

Modell der Auswertung

(en: **model of evaluation**)

Menge mathematischer Relationen zwischen allen gemessenen und anderen Größen, die bei der Auswertung der Messung einbezogen werden

Anmerkung 1 zum Begriff: Das Modell der Auswertung muss nicht eine explizite Funktion sein. Es kann auch ein Algorithmus sein, der mit einem Computerprogramm abgearbeitet wird.

4.13

Erkennungsgrenze

(en: decision threshold)

Schätzwert der Messgröße, bei dessen Überschreitung durch ein aktuelles Ergebnis einer Messung mit einem Messverfahren, das einen physikalischen Effekt quantifiziert, man entscheidet, dass der physikalische Effekt vorliegt.

Anmerkung 1 zum Begriff: Für den Fall, dass das Messergebnis y größer ist als die Erkennungsgrenze y^* , ist die Nachweisgrenze so festgelegt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert der Messgröße Null ist, kleiner oder gleich einem vorgegebenen Wert α ist.

Anmerkung 2 zum Begriff: Wenn das Messergebnis y kleiner als die Erkennungsgrenze y^* ist, kann das Ergebnis nicht dem physikalischen Effekt zugeordnet werden. Trotzdem kann daraus nicht geschlossen werden, dass der physikalische Effekt nicht vorliegt.

4.14

Nachweisgrenze

(en: detection limit)

kleinster wahrer Wert der Messgröße, der mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit durch das Messverfahren erkannt wird

Anmerkung 1 zum Begriff: Mit der Erkennungsgrenze nach 4.13 ist die Nachweisgrenze der kleinste wahre Wert der Messgröße, für den die Wahrscheinlichkeit für die falsche Entscheidung, dass der wahre Wert der Messgröße Null ist, gleich einem vorgegebenen Wert β ist, wenn der wahre Wert in Wirklichkeit nicht Null ist.

Anmerkung 2 zum Begriff: Die Begriffe Nachweisgrenze und Erkennungsgrenze werden in unterschiedlichen Normen nicht eindeutig verwendet, z.B. in Normen der chemischen Analytik und der Qualitätssicherung. Wenn diese Begriffe benutzt werden, ist jeweils anzugeben nach welcher Norm sie benutzt werden.

4.15

Überdeckungsintervall

(en: coverage interval)

Intervall, das den wahren Wert einer Größe auf der Grundlage der verfügbaren Information mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit enthält

Anmerkung 1 zum Begriff: Ein Überdeckungsintervall wird bisweilen auch als glaubwürdiges Intervall (en: credible interval) oder Bayessches Intervall bezeichnet.

Anmerkung 2 zum Begriff: Allgemein gibt es mehr als ein Überdeckungsintervall zu einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit

[QUELLE: JCGM 101:2008, 3.12]

4.16

Probabilistische symmetrisches Überdeckungsintervall

(en : probabilistically symmetric coverage interval)

Überdeckungsintervall einer Messgröße mit der Eigenschaft, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert der Messgröße kleiner ist als der kleinste Wert des Intervalls, gleich der Wahrscheinlichkeit ist, dass der wahre Wert der Messgröße größer ist als der größte Wert des Intervalls.

[QUELLE: JCGM 101:2008, 3.15]

4.17

Kürzestes Überdeckungsintervall

(en : shortest coverage interval)

Überdeckungsintervall einer Messgröße mit der kürzesten Länge aller Überdeckungsintervalle derselben Überdeckungswahrscheinlichkeit

[QUELLE: JCGM 101:2008, 3.16]

4.18

Grenzen des Überdeckungsintervalls

(en: limits of the coverage interval)

Werte, die ein Überdeckungsintervall definieren

Anmerkung 1 zum Begriff: Die Grenzen werden in dieser Norm so berechnet, dass das Überdeckungsintervall den wahren Wert der Messgröße mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit $(1-\gamma)$ enthält.

Anmerkung 2 zum Begriff: Die Definition des Überdeckungsintervalls ist mehrdeutig ohne weitere Festlegungen. In dieser Norm werden alternativ das probabilistisch symmetrische und das kürzeste Überdeckungsintervall benutzt.

4.19

bester Schätzwert für den wahren Wert der Messgröße

(en: best estimate of the true value of the measurand)

Erwartungswert der Wahrscheinlichkeitsverteilung des wahren Wertes der Messgröße, gegeben durch das experimentelle (primäre) Messergebnis und unter Berücksichtigung aller Informationen, die vor der Durchführung der Messung vorlagen

Anmerkung 1 zum Begriff: Zum besten Schätzwert unter allen möglichen Schätzwerten der Messgröße bei gegebener Information gehört die kleinste Standardunsicherheit.

4.20

Richtwert

(en: guideline value)

Wert entsprechend wissenschaftlicher, legaler oder anderer Anforderungen in Bezug auf das Nachweisvermögen, der zur Beurteilung, ob ein Messverfahren für die Messgröße genügt, zum Vergleich mit der Nachweisgrenze herangezogen wird.

Anmerkung 1 zum Begriff: Ein Richtwert kann z. B. als Aktivität, spezifische Aktivität oder Aktivitätskonzentration, Oberflächenaktivität oder Dosisrate gegeben sein.

Anmerkung 2 zum Begriff: Der Vergleich der Nachweisgrenze mit dem Richtwert erlaubt eine Entscheidung darüber, ob das für die Messung vorgesehene Messverfahren gestellten Anforderungen genügt und damit für den Messzweck geeignet ist oder nicht. Das Messverfahren genügt den Anforderungen, wenn die Nachweisgrenze kleiner ist als der Richtwert.

Anmerkung 3 zum Begriff: Der Richtwert darf nicht verwechselt werden mit anderen Werten zu Festlegung von Konformitätsanforderungen oder gesetzlichen Grenzwerten.

4.21

Nulleffekt

(en: background effect)

Messeffekt, der durch andere Strahlungsquellen als die des Messobjektes selbst bewirkt wird

4.22

Untergrund bei spektrometrischen Messungen

(en: background effect in spectrometric measurement)

Anzahl der nicht interessierenden Ereignisse im Bereich einer betrachteten Linie im Spektrum

4.23

Nettoeffekt

(en: net effect)

Beitrag der möglichen Strahlung eines Messobjektes (z. B. einer Strahlungsquelle oder eines Strahlungsfeldes) zum Messeffekt

4.24

Bruttoeffekt

(en: gross effect)

Messeffekt, der durch den Nulleffekt und den Nettoeffekt bewirkt wird

4.25

Abschirmfaktor

(en: shielding factor)

Faktor, der die Reduzierung der Nulleffektzählrate durch die Abschirmwirkung des Messobjektes beschreibt

4.26

Dämpfungszeitkonstante

(en: relaxation time constant)

Zeitdauer, in der das Ausgangssignal eines linearen Ratemeters auf das 1/e-fache des Anfangswertes abklingt, nachdem die Folge der Eingangsimpulse abgebrochen ist

5 Größen und Formelzeichen

Die Formelzeichen für Hilfsgrößen sowie die nur in den Anhängen benutzten Formelzeichen sind nicht aufgeführt. Physikalische Größen werden mit Großbuchstaben bezeichnet und müssen sorgfältig von ihren Werten unterschieden werden, die mit den entsprechenden Kleinbuchstaben bezeichnet werden.

ANMERKUNG Diese Norm geht davon aus, dass die Messgröße einen wahren Wert besitzt, der unbekannt und unerkennbar ist. In einigen Anwendungen muss ein wahrer Wert angenommen werden.

m	Anzahl der Eingangsgrößen
X_i	Eingangsgröße ($i = 1, \dots, m$)
x_i	Schätzwert der Eingangsgröße X_i
$u(x_i)$	Standardunsicherheit der Eingangsgröße X_i zum Schätzwert x_i
$u_{\text{rel}}(w)$	relative Standardunsicherheit einer Größe W zum Schätzwert w
G	Modellfunktion
Y	nicht-negative Messgröße, die den betrachteten physikalischen Effekt quantifiziert
Y_0	Zufallsvariable als Schätzer von ohne Berücksichtigung, dass die Messgröße nicht-negativ ist
Y_1	Zufallsvariable als Schätzer von mit Berücksichtigung, dass die Messgröße nicht-negativ ist
$\bar{y}$	wahrer Wert der Messgröße. Liegt der betrachtete physikalische Effekt nicht vor, so ist $\bar{y} = 0$, andernfalls ist $\bar{y} > 0$
y	ermittelter Wert des Schätzers Y_0 primäres Messergebnis für die Messgröße; auch benutzt als Variable, die mögliche Messergebnisse beschreibt
y_j	y -Werte aus unterschiedlichen Messungen ($j = 0, 1, 2, \dots$)
$u(y)$	Standardunsicherheit der Messgröße zugeordnet zum primären Messergebnis
$\bar{u}(\bar{y})$	Standardunsicherheit des Schätzers als Funktion eines angenommenen wahren Wertes der Messgröße
c_i	Sensitivitätskoeffizient. $c_i = \left. \frac{\partial G}{\partial X_i} \right _{X_1=x_1, \dots, X_m=x_m}$
$\hat{y}$	bester Schätzwert der Messgröße auf der Grundlage des Schätzers Y_1
ω, κ	Hilfsgrößen
$u(\hat{y})$	Standardunsicherheit der Messgröße zugeordnet zum besten Schätzwert $\hat{y}$
y^*	Erkennungsgrenze für die Messgröße

$y^{\#}$	Nachweisgrenze für die Messgröße
$\tilde{y}_i$	Näherungen der Nachweisgrenze $y^{\#}$
x_r	Richtwert für die Messgröße
$y_{\text{low}}, y_{\text{up}}$	untere bzw. obere Grenze eines nicht näher spezifizierten Überdeckungsintervalls der Messgröße
$y^{<}, y^{>}$	untere bzw. obere des probabilistisch symmetrischen Überdeckungsintervalls der Messgröße
$y^{<}, y^{>}$	untere bzw. obere des kürzesten Überdeckungsintervalls der Messgröße
n_i	Anzahl der gezählten Impulse bei der Messung der Zählrate R_i
n_g, n_0	Anzahl der gezählten Impulse des Bruttoeffektes bzw. Nulleffektes
t_i	Messdauer der Zählrate R_i
t_g, t_0	Messdauer des Bruttoeffektes bzw. Nulleffektes
R_g, R_0	Bruttozählrate bzw. Nulleffektzählrate
r_g, r_0	Schätzwert der Zählrate des Bruttoeffektes bzw. Nulleffektes
τ_g, τ_0	Dämpfungszeitkonstante eines Ratemeters bei der Messung des Bruttoeffektes bzw. Nulleffektes
α, β	Wahrscheinlichkeit einer falsch positive bzw. falsch negative Entscheidung
$1-\gamma$	Wahrscheinlichkeit zum Überdeckungsintervall der Messgröße
k_p, k_q	Quantile der Standardnormalverteilung zur Wahrscheinlichkeit p bzw. q ; z. B. $p = 1-\alpha$, $1-\beta$ oder $1-\gamma/2$
$\Phi(t)$	Verteilungsfunktion der standardisierten Normalverteilung. Es gilt

6 Grundlagen und Auswertung der Messung

6.1 Allgemeines zur Messgröße

Dem zu untersuchenden physikalischen Effekt einer gestellten Messaufgabe ist eine nicht-negative Messgröße zuzuweisen, die den Effekt quantifiziert und den wahren Wert $\tilde{y} = 0$ annimmt, wenn der Effekt in einem aktuellen Fall nicht vorliegt.

Der Messgröße ist dann eine Zufallsvariable Y_0 als ein Schätzer zuzuordnen. Das Formelzeichen Y wird im Folgenden auch für die Messgröße selbst verwendet. Ein aus Messungen ermittelter Wert y des Schätzers Y_0 ist ein Schätzwert der Messgröße. Er ist als primäres Messergebnis zusammen mit der ihm zugehörenden primären Standardunsicherheit $u(y)$ der Messgröße als primäres vollständiges Messergebnis für die Messgröße nach GUM (siehe auch Literaturhinweise [1-5]) zu berechnen, und zwar durch Auswertung von Messdaten und anderer Information mittels eines Modells (der Auswertung), das alle beteiligten Größen mathematisch miteinander verknüpft. Im Allgemeinen wird bei dieser Auswertung nicht explizit berücksichtigt, dass die Messgröße nicht-negativ ist. Deshalb darf y negativ sein, zumal wenn die Messgröße nahezu den wahren Wert $\tilde{y} = 0$ hat. Das primäre Messergebnis y unterscheidet sich von dem in [Abschnitt 10](#) berechneten besten Schätzwert $\hat{y}$ der Messgröße. Bei diesem ist die Kenntnis berücksichtigt, dass die Messgröße nichtnegativ ist. Die zu $\hat{y}$ gehörende Standardunsicherheit $u(\hat{y})$ ist kleiner als $u(y)$.

Teil 1 dieser Norm gilt für Fälle, in denen die Auswertung der Messung nach dem GUM erfolgt. In der Methodik des GUM stellen lediglich die Messergebnisse als Schätzwerte x_i der Eingangsgrößen X_i und ihre zugeordneten Standardunsicherheiten $u(x_i)$ die verfügbare Information dar. Diese Information wird benutzt, um einen Schätzwert y der Messgröße Y zu erhalten und die den Eingangsgrößen zugeordneten Standardunsicherheiten fortzupflanzen und die Standardunsicherheit $u(y)$ zu berechnen, die y zugeordnet ist.

Da die Fortpflanzung der Unsicherheiten nach dem GUM das Ergebnis eine Taylorreihen-Entwicklung erster Ordnung ist, ist es erforderlich, dass das Modell der Auswertung linear ist oder dass es zumindest lokal linearisierbar ist. Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, ist die Methodik nach GUM Supplement 1 anzuwenden. Dies ist zum Beispiel bei großen und dominierenden relativen Unsicherheiten der Fall. Siehe [Abschnitt 2](#) dieser Norm bzgl. der Entscheidungen, die im Hinblick auf die Anwendung des GUM oder des GUM Supplement 1 zu treffen sind. Wenn der GUM nicht angewendet werden kann, weil die ihm zugrundeliegenden Annahmen nicht erfüllt sind (siehe GUM 5.3), ist die Methodik nach GUM Supplement 1 zu benutzen. Dieser letztgenannte Fall ist in DIN ISO 11929-2 behandelt.

ANMERKUNG Allgemein wird die Unsicherheit, die einem Messergebnis y der Messgröße Y auf der Grundlage einer Menge von Information a zugeordnet ist, vollständig beschrieben durch eine bedingte Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF) $f_Y(\tilde{y}|a)$. Wie im GUM Supplement 1 festgelegt, wird diese PDF mit Hilfe des Prinzips der maximalen (Information-) Entropie (Principle of Maximum Entropy, PME) [23] abgeleitet unter Verwendung der verfügbaren Information a als Nebenbedingungen. Der beste Schätzwert $\hat{y}$ des wahren Wertes der Messgröße Y ist der Erwartungswert der PDF $f_Y(\tilde{y}|a)$ und die zugeordnete Standardunsicherheit $u(\hat{y})$ ist die Quadratwurzel der Varianz von $f_Y(\tilde{y}|a)$. Das GUM Supplement 1 stellt fest, dass diese Methodik ausschließlich auf der Bayes-Statistik gegründet ist. In der GUM Näherung ist die PDF $f_Y(\tilde{y}|a)$ eine Gauß- oder Normalverteilung, da nur y und $u(y)$ verfügbar sind. Siehe [Anhang C](#) von ISO 11929-2 für weitere Erläuterungen.

6.2 Modell der Auswertung

6.2.1 Allgemeines Modell

In vielen Fällen ist die Messgröße Y eine Funktion mehrerer Eingangsgrößen X_i in Form von Gleichung 16):

$$Y = G(X_1, \dots, X_m) \quad (16)$$

Gleichung (16) ist das Modell der Auswertung. Durch Einsetzen gegebener Schätzwerte x_i der Eingangsgrößen X_i in die Modellfunktion G nach Gleichung (16) ergibt sich das primäre Messergebnis y der Messgröße:

$$y = G(x_1, \dots, x_m) \quad (17)$$

Bei Anwendung dieser Norm sind die Standardunsicherheiten auf der Grundlage aller verfügbaren Information über das Messverfahren sowie über die beteiligten Größen und Werte unter Berücksichtigung aller bekannten Quellen der Unsicherheit zu ermitteln. Diese Ermittlung soll nach dem GUM oder GUM Supplement 1 durchgeführt werden.

Wenn das Modell der Auswertung – zumindest lokal – linearisierbar ist und wenn nur die x_i und ihre zugeordneten Standardunsicherheiten $u(x_i)$ bekannt sind und wenn es keine großen, dominierenden Unsicherheiten gibt, kann die Näherung des GUM benutzt werden; siehe den GUM bzgl. näherer Angaben. Anderenfalls sind die Methoden, die im GUM Supplement 1 beschrieben sind, anzuwenden und die charakteristischen Grenzen sind nach DIN ISO 11929-2 zu berechnen.

Für das allgemeine Modell nach Gleichung (16) wird die Standardunsicherheit $u(y)$ der Messgröße zum primären Messergebnis y bei unabhängig gemessenen Eingangsgrößen X_i und gegebenen Standardunsicherheiten $u(x_i)$ zu den Schätzwerten x_i aus der Beziehung in Gleichung (18) ermittelt,

$$u^2(y) = \sum_{i=1}^m c_i^2 u^2(x_i) \text{ mit den Sensitivitätskoeffizienten } c_i = \left. \frac{\partial G}{\partial X_i} \right|_{X_1=x_1, \dots, X_m=x_m}. \quad (18)$$

ANMERKUNG Wenn die Eingangsgrößen nicht voneinander unabhängig sondern korreliert sind, ist die Standardunsicherheit mit Hilfe von Kovarianzen zu berechnen. Anleitungen zur Behandlung von Kovarianzen finden sich in DIN ISO 11929-2.

In die partiellen Ableitungen von G in Gleichung (18) sind anstelle der Eingangsgrößen X_i deren Schätzwerte x_i einzusetzen. Zur Ermittlung der Schätzwerte x_i und der zugehörigen Standardunsicherheiten $u(x_i)$ sowie zur numerischen oder experimentellen Ermittlung der partiellen Ableitungen nach dem GUM; siehe auch Literaturhinweise [1, 2]. Für eine Zählrate $X_i = R_i$ sind bei vorliegendem Zählergebnis n_i während der Messdauer t_i anzusetzen: $x_i = r_i = n_i / t_i$ und $u^2(x_i) = n_i / t_i^2 = r_i / t_i$; siehe [Anhang C](#) von DIN ISO 11929-2. Wenn die Eingangsgrößen nicht unabhängig voneinander gemessen werden und für kompliziertere Auswertungen, z. B. Entfaltungen, siehe DIN ISO 11929-3.

In [Abschnitt 7](#) wird die Eingangsgröße X_1 als diejenige Größe aufgefasst, deren Wert x_1 bei Vorgabe eines wahren Wertes $\tilde{y}$ der Messgröße Y im Rahmen der Berechnung der Erkennungsgrenze und Nachweisgrenze nicht vorliegt, z. B. als Zählrate des Bruttoeffektes. Entsprechend wird die Eingangsgröße X_2 dem Nulleffekt auf geeignete Weise zugeordnet. Die Daten zu den übrigen Eingangsgrößen seien aus unabhängigen Voruntersuchungen gegeben.

Wenn die partiellen Ableitungen nicht explizit verfügbar sind, zum Beispiel weil das Modell der Auswertung nur in Form eines Computerprogramms vorliegt, ist es hinreichend, sie durch Differentialquotienten nach Gleichung (19) anzunähern:

$$c_i = \frac{1}{u(x_i)} \cdot (G(x_1, \dots, x_i + u(x_i)/2, \dots, x_m) - G(x_1, \dots, x_i - u(x_i)/2, \dots, x_m)) \quad (19)$$

6.2.2 Model in ionizing radiation counting measurements

In dieser Norm bezieht sich die Messgröße Y mit dem wahren Wert $\tilde{y}$ auf eine Probe radioaktiven Materials und ist aus Zählungen des Bruttoeffektes und des Nulleffektes bei Zeit- oder Impulsvorwahl zu ermitteln. Y kann speziell die Nettozählrate R_n oder die Nettoaktivität A der Probe sein. Die Formelzeichen zu den Zählungen des Bruttoeffektes und des Nulleffektes werden im Folgenden durch den Index g bzw. 0 gekennzeichnet.

In dieser Norm wird das Modell der Auswertung wie folgt angesetzt:

$$Y = G(X_1, \dots, X_m) = (X_1 - X_2 X_3 - X_4) \cdot \frac{X_6 X_8 \dots}{X_5 X_7 \dots} = (X_1 - X_2 X_3 - X_4) \cdot W \quad (20)$$

mit

$$W = \frac{X_6 X_8 \dots}{X_5 X_7 \dots} \quad (21)$$

Hierbei sind $X_1 = R_g$ die Zählrate des Bruttoeffektes und $X_2 = R_0$ die Zählrate des Nulleffektes. Die übrigen Eingangsgrößen X_i sind Kalibrier-, Korrektions- oder Einflussgrößen oder Umrechnungsfaktoren, z. B. die Emissions- oder Ansprechwahrscheinlichkeit, speziell X_3 z. B. ein Abschirmfaktor und X_4 ein zusätzlicher Untergrundkorrekturfaktor. Falls einige dieser Eingangsgrößen nicht vorkommen, sind für diese $x_i = 1$ ($i = 3; i > 4$), $x_4 = 0$ und $u(x_i) = 0$ zu setzen. Für die Zählraten sind $x_1 = r_g = n_g / t_g$ und $u^2(x_1) = n_g / t_g^2 = r_g / t_g$ sowie $x_2 = r_0 = n_0 / t_0$ und $u^2(x_2) = n_0 / t_0^2 = r_0 / t_0$.

ANMERKUNG Wenn das Modell der Auswertung nicht die allgemeine Form von Gleichung (20) hat, ist nach [Abschnitt 6.2.1](#) zu verfahren. Einige Beispiele komplizierterer Modell der Auswertung sind in DIN ISO 11929-3 gegeben.

6.3 Berechnung des primären Messergebnisses

Aus Gleichung (20) ergibt sich durch Einsetzen der Schätzwerte x_i der primäre Schätzwert y der Messgröße Y :

$$y = G(x_1, \dots, x_m) = (x_1 - x_2 x_3 - x_4) \cdot w = (r_g - r_0 x_3 - x_4) \cdot w = \left(\frac{n_g}{t_g} - \frac{n_0}{t_0} x_3 - x_4 \right) \cdot w \quad (22)$$

mit

$$w = \frac{x_6 x_8 \dots}{x_5 x_7 \dots} \quad (23)$$

ANMERKUNG Es wird angenommen, dass die Schätzwerte w und $x_5, x_6, \dots$ des Kalibrierfaktors W und seiner Komponenten $X_5, X_6, \dots$ sowie die ihnen zugeordneten Standardunsicherheiten in separaten Experimenten ermittelt wurden und dass diese Größen nicht mit den Größen X_1 bis X_4 korreliert sind.

6.4 Standardunsicherheit zum primären Messergebnis

Im Falle eines allgemeinen Modells der Auswertung bei der Messung ionisierender Strahlung nach Gleichung (20) und wenn die x_i nicht korreliert sind, wird die dem Messergebnis y zugeordnete Standardunsicherheit $u(y)$ wie folgt berechnet.

Für die Zählraten gilt, $x_1 = r_g = n_g/t_g$ und $u^2(x_1) = n_g/t_g^2 = r_g/t_g$ sowie $x_2 = r_0 = n_0/t_0$ und $u^2(x_2) = n_0/t_0^2 = r_0/t_0$.

Mit den partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial G}{\partial X_1} = w; \quad \frac{\partial G}{\partial X_2} = -X_3 w; \quad \frac{\partial G}{\partial X_3} = -X_2 w; \quad \frac{\partial G}{\partial X_4} = -w; \quad \frac{\partial G}{\partial X_i} = \pm \frac{Y}{X_i} \quad (i \geq 5); \quad \frac{\partial G}{\partial W} = \frac{Y}{W} \quad (24)$$

entsteht aus Gleichung (22) durch Einsetzen der Schätzwerte x_i , w und y die dem primären Messergebnis y der Messgröße zugeordnete Standardunsicherheit $u(y)$:

$$\begin{aligned} u(y) &= \sqrt{w^2 \cdot [u^2(x_1) + x_3^2 u^2(x_2) + x_2^2 u^2(x_3) + u^2(x_4)] + y^2 u_{\text{rel}}^2(w)} \\ &= \sqrt{w^2 \cdot [r_g/t_g + x_3^2 r_0/t_0 + r_0^2 u^2(x_3) + u^2(x_4)] + y^2 u_{\text{rel}}^2(w)} \end{aligned} \quad (25)$$

Dabei ist

$$u_{\text{rel}}^2(w) = \sum_{i=5}^m \frac{u^2(x_i)}{x_i^2} \quad (26)$$

die Summe der quadrierten relativen Standardunsicherheiten der Größen X_5 bis X_m . Für $m < 5$ sind $w = 1$ und $u_{\text{rel}}^2(w) = 0$.

Schätzwerte x_i und Standardunsicherheiten $u(x_i)$ von X_i ($i = 3, \dots, m$) wurden in Vorversuchen experimentell ermittelt oder als Erfahrungswerte aus anderen Informationen übernommen. Bei Vorversuchen können x_i als Mittelwerte und $u^2(x_i)$ als empirische Varianzen ermittelt werden.

7 Berechnung der Standardunsicherheit als Funktion eines angenommenen Wertes der Messgröße

Für die Festlegung und numerische Berechnung der Erkennungsgrenze in [Abschnitt 8.2](#) und der Nachweisgrenze in [Abschnitt 8.3](#) wird die Standardunsicherheit der Messgröße als Funktion $\tilde{u}(\tilde{y})$ eines angenommenen wahren Wertes $\tilde{y} \geq 0$ der Messgröße benötigt. Diese Funktion ist im Rahmen der Auswertung der Messungen auf ähnliche Weise wie $u(y)$ unter Anwendung des GUM oder des GUM Supplement 1 zu ermitteln; siehe hierzu auch die Literaturhinweise [1 bis 5]. Meist ist $\tilde{u}(\tilde{y})$ als positive Quadratwurzel aus einer vorher zu berechnenden Varianz $\tilde{u}^2(\tilde{y})$ zu bilden. Diese Funktion muss für alle $\tilde{y} \geq 0$ erklärt, eindeutig und stetig sein und darf keine negativen Werte annehmen.

In den meisten Fällen kann $\tilde{u}(\tilde{y})$ nach [Gleichung \(22\)](#) explizit angegeben werden. Voraussetzung dafür ist, dass $u(x_1)$ als Funktion von x_1 vorliegt. Dann ist y formal durch $\tilde{y}$ zu ersetzen, und [Gleichung \(17\)](#) ist nach x_1 aufzulösen und dies ergibt die Funktion $x_1 = g(\tilde{y}, x_2, \dots, x_m)$. Für einen angenommenen wahren Wert $\tilde{y}$ kann x_1 auch numerisch, z. B. mittels eines Iterationsverfahrens, ermittelt werden, was wiederum die Funktion $x_1 = g(\tilde{y}, x_2, \dots, x_m)$ ergibt. Diese Funktion soll x_1 in [Gleichung \(25\)](#) ersetzen und die Berechnung von $u(x_1)$ ergibt mit [Gleichung \(18\)](#) $\tilde{u}(\tilde{y})$ anstatt von $u(y)$.

Ist im Fall des Modells nach [Gleichung \(22\)](#) die Standardunsicherheit $u(x_1)$ der Zählrate $X_1 = R_g$ des Bruttoeffektes gegeben als Funktion des Schätzwertes $x_1 = r_g$, gelten entweder $\sqrt{x_1/t_g}$ bei Vorwahl der Messdauer t_g (Zeitvorwahl) oder $x_1/\sqrt{n_g}$ bei Vorwahl der Impulsanzahl n_g (Impulsvorwahl).

Es wird y formal durch $\tilde{y}$ in [Gleichung \(22\)](#) ersetzt. Dadurch können x_1 im allgemeinen Fall und speziell n_g bei Zeitvorwahl und t_g bei Impulsvorwahl in [Gleichung \(25\)](#) mittels [Gleichung \(22\)](#) eliminiert werden. Diese Werte liegen bei Annahme eines wahren Wertes der Messgröße $\tilde{y}$ nicht vor. Das ergibt allgemein nach [Gleichung \(22\)](#)

$$x_1 = \tilde{y}/w + x_2x_3 + x_4 \quad (27)$$

Bei Zeitvorwahl erhält man aus [Gleichung \(22\)](#):

$$n_g = t_g \cdot (\tilde{y}/w + r_0x_3 + x_4) \quad (28)$$

[Gleichung \(25\)](#) führt mit $u^2(x_1) = x_1/t_g = n_g/t_g^2$ und durch Substitution von n_g nach [Gleichung \(28\)](#) und mit $u^2(x_2) = r_0/t_0$ im Falle der **Zeitvorwahl** zu

$$\tilde{u}(\tilde{y}) = \sqrt{w^2 \cdot \left[(\tilde{y}/w + r_0x_3 + x_4)/t_g + x_3^2 r_0/t_0 + r_0^2 u^2(x_3) + u^2(x_4) \right] + \tilde{y}^2 u_{\text{rel}}^2(w)} \quad (29)$$

Bei Impulsvorwahl erhält man in gleicher Weise:

$$t_g = \frac{n_g}{\tilde{y}/w + r_0x_3 + x_4} \quad (30)$$

Dann führt nach Gleichung (25) mit $u^2(x_1) = x_1/t_g = n_g/t_g^2$ und durch Substitution von t_g nach Gleichung (30) und mit $u^2(x_2) = r_0^2/n_0$ im Fall von **Impulsvorwahl** zu

$$\tilde{u}(\tilde{y}) = \sqrt{w^2 \cdot \left[(\tilde{y}/w + r_0 x_3 + x_4)^2 / n_g + x_3^2 r_0^2 / n_0 + r_0^2 u^2(x_3) + u^2(x_4) \right] + \tilde{y}^2 u_{\text{rel}}^2(w)} \quad (31)$$

Wenn die Standardunsicherheit nicht explizit als Funktion eines angenommenen wahren Wertes der Messgröße angegeben werden kann, sind Näherungsverfahren, wie in [Anhang C](#) beschrieben, zu verwenden.

Wenn keine explizite Darstellung von $\tilde{u}(\tilde{y})$ verfügbar ist, ist es oft hinreichend die folgende Näherung für die Funktion $\tilde{u}(\tilde{y})$ zu benutzen. Dies gilt insbesondere, wenn die Standardunsicherheit $u(x_1)$ als Funktion von x_1 unbekannt ist. Eine Voraussetzung ist, dass Messergebnisse y_j und die ihnen zugeordneten Standardunsicherheiten $u(y_j)$, berechnet aus früheren Experimenten derselben Art, verfügbar sind ($j = 0, 1, 2, \dots$). Diese Messungen sollen an unterschiedlichen Proben mit unterschiedlichen Aktivitäten durchgeführt worden sein, aber anderweitig soweit wie möglich unter ähnlichen Bedingungen. Eine dieser Messungen kann eine Nulleffekt- oder Blankmessung sein mit $\tilde{y} = 0$ und, zum Beispiel, $j = 0$. Dann sollen $y_0 = 0$ und $\tilde{u}(0) = u(y_0)$ gesetzt werden. Die aktuell ausgeführte Messung kann als weitere Messung mit $j = 1$ benutzt werden. Siehe [Anhang A.2](#) bzgl. weiterer Erläuterungen.

$\tilde{u}(\tilde{y} = 0)$ ist verfügbar sobald eine Nulleffekt- oder Blankmessung durchgeführt wurde und die Standardunsicherheit $u(x_0)$ für $\tilde{y} = 0$ ermittelt wurde, im Fall des einfachsten Modells der Auswertung $y = w \cdot (x_1 - x_0)$ erwartet man zum Beispiel $x_1 = x_0$ und folglich $\tilde{u}^2(\tilde{y} = 0) = w^2 \cdot 2 \cdot u^2(x_0)$.

8 Erkennungsgrenze, Nachweisgrenze und Beurteilungen

8.1 Vorgaben

Die Wahrscheinlichkeit α für eine falschen Entscheidung zugunsten des Vorliegens des untersuchten physikalischen Effektes, die Wahrscheinlichkeit β für eine falsche Entscheidung zugunsten des Nicht-Vorliegens des untersuchten physikalischen Effektes und die Wahrscheinlichkeit $1 - \gamma$ zum Überdeckungsintervall müssen vorgegeben werden. Die Wahl der geeigneten Werte hängt von der jeweiligen Anwendung ab. Häufig werden $\alpha = \beta$ und der Wert 0,05 für α und β gesetzt. Dann gilt $k_{1-\alpha} = k_{1-\beta} = 1,65$. Für das Überdeckungsintervall wird für γ häufig der Wert 0,05 gewählt, dann gilt $k_{1-\gamma/2} = 1,96$ (siehe [Anhang E](#)).

Wenn beurteilt werden soll, ob ein Messverfahren für die Messgröße aus wissenschaftlichen, gesetzlichen oder anderen Gründen gestellten Anforderungen genügt, muss auch ein Richtwert y_r als Wert der Messgröße, z. B. als Aktivität, vorgegeben werden.

8.2 Erkennungsgrenze

Die Erkennungsgrenze y^* für die nicht-negative Messgröße nach 5.1, die einen betrachteten physikalischen Effekt quantifiziert, ist derjenige Wert des Schätzers Y_0 , bei dessen Überschreitung durch einen ermittelten Wert von Y , das primäre Messergebnis y , gefolgert wird, dass der physikalische Effekt vorliegt. Anderenfalls wird angenommen, dass dieser Effekt nicht vorliegt. Liegt der physikalische Effekt in Wirklichkeit nicht vor, führt diese Entscheidungsregel höchstens mit der vorzugebenden Wahrscheinlichkeit α zu der dann falschen Entscheidung, der Effekt liege vor; siehe Abschnitt 8.1.

Ein ermitteltes primäres Messergebnis y für die nichtnegative Messgröße weist nur dann signifikant darauf hin, dass der wahre Wert der Messgröße von Null verschieden ist ($\tilde{y} > 0$), wenn es unter der Annahme $\tilde{y} = 0$ genügend unwahrscheinlich ist. Das primäre Messergebnis y muss dazu größer sein als die Erkennungsgrenze.

ANMERKUNG Die durch die Erkennungsgrenze dargestellte Entscheidungsregel benutzt eine Entscheidungstheorie mit einer quadratischen Verlustfunktion. See Literaturstelle [24] in Bezug auf eine Einführung in die Entscheidungstheorie.

Ein ermitteltes Messergebnis y einer nicht-negativen Messgröße weicht nur dann signifikant in Bezug auf den wahren Wert der Messgröße von Null ab ($\tilde{y} > 0$), wenn es größer ist als die Erkennungsgrenze gegeben durch:

$$y^* = k_{1-\alpha} \cdot \tilde{u}(0) \quad (32)$$

Mit den Gleichungen (29) und (31) erhält man die Erkennungsgrenze für das Modell der Auswertung bei Messungen ionisierender Strahlung in den Fällen von Zeitvorwahl und Impulsvorwahl

$$y^* = k_{1-\alpha} \cdot \tilde{u}(0) = k_{1-\alpha} \cdot w \cdot \sqrt{(x_3 \cdot n_0 / t_0) / t_g + x_3^2 \cdot n_0 / t_0^2 + u^2(x_3) \cdot n_0^2 / t_0^2 + u^2(x_4)} \quad (33)$$

8.3 Nachweisgrenze

Die Nachweisgrenze $y^\#$ ist der kleinste wahre Wert der Messgröße, für den bei Anwendung der Entscheidungsregel nach Abschnitt 8.2 die Wahrscheinlichkeit dafür, fälschlich anzunehmen, dass der physikalische Effekt nicht vorliegt, höchstens gleich der vorzugebenden Wahrscheinlichkeit β ist (siehe Abschnitt 8.1).

Zur Prüfung, ob ein Messverfahren für den Messzweck geeignet ist, wird die Nachweisgrenze $y^\#$ mit dem vorzugebenden Richtwert y_r für die Messgröße verglichen (siehe Abschnitt 8.1). Die Nachweisgrenze $y^\#$ ist der kleinste wahre Wert der Messgröße, der mit dem anzuwendenden Messverfahren noch nachgewiesen werden kann. Sie liegt so hoch über der Erkennungsgrenze y^* , dass die Wahrscheinlichkeit einer falschen Entscheidung, d.h. dass der Effekt nicht vorliegt, höchstens gleich β ist.

Die Nachweisgrenze $y^\#$ erhält man im Fall von **Zeitvorwahl** als die kleinste Lösung von Gleichung (34):

$$y^\# = y^* + k_{1-\beta} \cdot \tilde{u}(y^\#) = y^* + k_{1-\beta} \cdot \sqrt{w^2 \cdot \left((y^\# / w + x_3 \cdot n_0 / t_0) / t_g + x_3^2 \cdot n_0 / t_0^2 + u^2(x_3) \cdot n_0^2 / t_0^2 + u^2(x_4) \right) + y^{\#2} \cdot u_{\text{rel}}^2(w)} \quad (34)$$

Gleichung (34) hat eine Lösung für die Nachweisgrenze $y^\#$, wenn bei Zeitvorwahl die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$k_{1-\beta} u_{\text{rel}}(w) < 1 \quad (35)$$

Die Nachweisgrenze $y^\#$ erhält man im Fall von **Impulsvorwahl** als die kleinste Lösung von Gleichung (36):

$$y^\# = y^* + k_{1-\beta} \cdot \tilde{u}(y^\#) = y^* + k_{1-\beta} \cdot \sqrt{w^2 \cdot \left[(\tilde{y}^\# / w + r_0 x_3 + x_4)^2 / n_g + x_3^2 r_0^2 / n_0 + r_0^2 u^2(x_3) + u^2(x_4) \right] + \tilde{y}^{\#2} u_{\text{rel}}^2(w)} \quad (36)$$

Gleichung (36) hat eine Lösung für die Nachweisgrenze $y^{\#}$, wenn bei Impulsvorwahl die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$k_{1-\beta} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_g} + u_{\text{rel}}^2(w)} < 1 \quad (37)$$

ANMERKUNG 1 Bzgl. iterativer Lösungen der Gleichungen (34) und (36) siehe Anhang C und bzgl. expliziter Lösungen für die Nachweisgrenze siehe Anhang D.

ANMERKUNG 2 Wenn die linken Seiten der Gleichungen (35) oder (36) größer sind als 0,5, wird die Nachweisgrenze signifikant durch die Gleichungen (34) bzw. (36) überschätzt. In diesem Fall führt die Anwendung von DIN ISO 11929-2 in Verbindung mit der Anwendung des GUM Supplement 1 zu besseren Schätzwerten für die Nachweisgrenze.

Eine Nichtexistenz der Nachweisgrenze weist auf zu große relative Unsicherheiten der Größen X_5 bis X_m hin, die zusammenfassend als $u_{\text{rel}}(w)$ ausgedrückt werden, und darauf, dass die Näherung des GUM nicht hinreichend ist (siehe 6.2). In einem solchen Fall ist die Lösung, die erforderliche Information zu beschaffen, um eine Ermittlung der Unsicherheit auf der Grundlage von Verteilungen nach dem GUM Supplement 1 vornehmen zu können und nach DIN ISO 11929-2 vorzugehen.

8.4 Beurteilungen

Das ermittelte primäre Messergebnis y für die Messgröße ist mit der Erkennungsgrenze y^* zu vergleichen. Ist $y > y^*$, so gilt der durch die Messgröße quantifizierte physikalische Effekt als vorliegend erkannt. Andernfalls wird entschieden, dass der Effekt nicht dem physikalischen Effekt zugeordnet werden kann. Nichtsdestotrotz kann nicht geschlossen werden, dass der physikalische Effekt nicht vorliegt.

Die Entscheidung, ob ein anzuwendendes Messverfahren gestellten Anforderungen bezüglich des Nachweises des durch die Messgröße quantifizierten physikalischen Effektes genügt, wird durch Vergleich der Nachweisgrenze $y^{\#}$ mit dem vorgegebenen Richtwert y_r getroffen. Ist $y^{\#} > y_r$, so ist das Messverfahren für den vorgesehenen Messzweck hinsichtlich der Anforderungen nicht geeignet.

Um im Fall $y^{\#} > y_r$ Abhilfe zu schaffen, kann es oftmals genügen, im Messverfahren größere Messdauern bzw. Impulsanzahlen vorzuwählen, wodurch die Nachweisgrenze verkleinert wird.

Wenn Gleichung (34) oder (36) keine Lösung $y^{\#}$ haben, ist die Näherung des GUM, die die Grundlage für Teil 1 dieser Norm darstellt, nicht hinreichend, die Unsicherheiten zu ermitteln. In diesem Fall ist GUM Supplement 1 anzuwenden und die charakteristischen Grenzen sind nach DIN ISO 11929-2 zu berechnen.

9 Grenzen des Überdeckungsintervalls

9.1 Allgemeines

Die Grenzen des Überdeckungsintervalls sind zu einem nach Abschnitt 8.2 erkannten physikalischen Effekt so angegeben, dass das Überdeckungsintervall den wahren Wert der Messgröße mit der vorzugebenden Wahrscheinlichkeit $1-\gamma$ enthält (siehe Abschnitt 8.1). Die Grenzen des Überdeckungsintervalls berücksichtigen, dass die Messgröße nicht-negativ ist, durch Benutzung einer abgeschnittenen Normalverteilung (siehe Anhang C von DIN ISO 11929-2).

Es gibt keine eindeutige Definition des Überdeckungsintervalls, wenn nur die Festlegung $1-\gamma$ gegeben ist. Weitere Bedingungen sind erforderlich, die u.a. zu den Definitionen des probabilistische symmetrischen Überdeckungsintervalls und zum kürzesten Überdeckungsintervall führen. Diese Norm stellt Gleichungen zur Berechnung der Grenzen beider Arten des Überdeckungsintervalls zur Verfügung für den Fall, dass die Unsicherheiten nach dem GUM ermittelt werden können.

ANMERKUNG Im Strahlenschutz hat der Regulator zu entscheiden, welche Art von Überdeckungsintervall zu benutzen ist. Vergleicht man die oberen Grenzen der zwei Überdeckungsintervalle, so hat man zu berücksichtigen, dass sie unterschiedliche Überdeckungswahrscheinlichkeiten darstellen können.

9.2 Das probabilistisch symmetrische Überdeckungsintervall

Mit einem primären Messergebnis y der Messgröße und der ihm zugeordneten Standardunsicherheit $u(y)$ sind die untere Grenze des probabilistisch symmetrischen Überdeckungsintervalls $y^<$ und die obere Grenze des probabilistisch symmetrischen Überdeckungsintervalls $y^>$ festgelegt durch

$$y^< = y - k_p \cdot u(y) \text{ mit } p = \omega \cdot (1 - \gamma/2) \quad (38)$$

$$y^> = y + k_q \cdot u(y) \text{ mit } q = 1 - \omega \cdot \gamma/2 \quad (39)$$

mit

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y/u(y)} \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv = \Phi[y/u(y)]. \quad (40)$$

Bzgl. der Verteilungsfunktion, $\Phi(t)$, der Standardnormalverteilung und ihrer Inversen, $k_p = t$ für $\Phi(t) = p$, siehe [Tabelle E.1](#). Methoden zu ihrer Berechnung sind in [Anhang E](#) oder, zum Beispiel, in [26] gegeben.

Die Grenzen des Überdeckungsintervalls liegen in der Regel weder symmetrisch zu y noch zum besten Schätzwert $\hat{y}$, jedoch sind die Wahrscheinlichkeiten, dass die Messgröße kleiner $y^<$ oder größer $y^>$ ist, beide gleich $\gamma/2$. Es gelten die Beziehungen $0 < y^< < y^>$.

Es darf $\omega = 1$ gesetzt werden, wenn $y \geq 4u(y)$. In diesem Fall gelten die zu y symmetrischen Näherungen:

$$y^< = y - k_{1-\gamma/2} \cdot u(y) \quad \text{und} \quad y^> = y + k_{1-\gamma/2} \cdot u(y) \quad (41)$$

9.3 Das kürzeste Überdeckungsintervall

Wie in Literaturstelle [5] ausführlich beschrieben, werden die untere Grenze des kürzesten Überdeckungsintervalls $y^<$ und die obere Grenze des kürzesten Überdeckungsintervalls $y^>$ berechnet mit Hilfe des primären Messergebnisses y der Messgröße und der ihm zugeordneten Standardunsicherheit $u(y)$ entweder durch

$$y^> = y \pm k_p \cdot u(y) ; p = (1 + \omega \cdot (1 - \gamma)) / 2 \quad (42)$$

oder, wenn $y^< < 0$ das Ergebnis wäre, durch

$$y^< = 0 ; y^> = y + k_q \cdot u(y) ; q = 1 - \omega \cdot \gamma \quad (43)$$

mit ω nach Gleichung (40). Es gelten die Beziehungen $0 \leq y^< < y^>$ und die Näherung nach Gleichung (41) ist gültig.