

DIN ISO 11929-2
(VDE 0493-9292)


Diese Norm ist zugleich eine **VDE-Bestimmung** im Sinne von VDE 0022. Sie ist nach Durchführung des vom VDE-Präsidium beschlossenen Genehmigungsverfahrens unter der oben angeführten Nummer in das VDE-Vorschriftenwerk aufgenommen und in der „etz Elektrotechnik + Automation“ bekannt gegeben worden.

VDE

ICS 17.240

Einsprüche bis 2017-01-18

Entwurf

Bestimmung der charakteristischen Grenzen (Erkennungsgrenze, Nachweisgrenze und Grenzen des Überdeckungsintervall) bei Messungen ionisierender Strahlung –
Teil 2: Fortgeschrittene Anwendungen
(ISO/CD 11929-2:2016)

Determination of the characteristic limits (decision threshold, detection limit and limits of the coverage interval) for measurements of ionizing radiation –
 Part 2: Advanced applications
 (ISO/CD 11929-2:2016)

Détermination des limites caractéristiques (seuil de décision, limite de détection et extrémités de l'intervalle de dispersion) pour mesurages de rayonnements ionisants –
 Partie 2: Applications avancées
 (ISO/CD 11929-2:2016)

Anwendungswarnvermerk

Dieser Norm-Entwurf mit Erscheinungsdatum 2016-11-18 wird der Öffentlichkeit zur Prüfung und Stellungnahme vorgelegt.

Weil die beabsichtigte Norm von der vorliegenden Fassung abweichen kann, ist die Anwendung dieses Entwurfs besonders zu vereinbaren.

Stellungnahmen werden erbeten

- vorzugsweise online im Norm-Entwurfs-Portal des DIN unter www.entwuerfe.din.de bzw. für Norm-Entwürfe der DKE auch im Norm-Entwurfs-Portal der DKE unter www.entwuerfe.normenbibliothek.de, sofern dort wiedergegeben;
- oder als Datei per E-Mail an dke@vde.com möglichst in Form einer Tabelle. Die Vorlage dieser Tabelle kann im Internet unter www.din.de/stellungnahme oder für Stellungnahmen zu Norm-Entwürfen der DKE unter www.dke.de/stellungnahme abgerufen werden;
- oder in Papierform an die DKE Deutsche Kommission Elektrotechnik Elektronik Informationstechnik in DIN und VDE, Stresemannallee 15, 60596 Frankfurt am Main.

Die Empfänger dieses Norm-Entwurfs werden gebeten, mit ihren Kommentaren jegliche relevanten Patentrechte, die sie kennen, mitzuteilen und unterstützende Dokumentationen zur Verfügung zu stellen.

Gesamtumfang 92 Seiten

DKE Deutsche Kommission Elektrotechnik Elektronik Informationstechnik in DIN und VDE
 DIN-Normenausschuss Radiologie (NAR)
 DIN-Normenausschuss Materialprüfung (NMP)

Anwendungsbeginn

Anwendungsbeginn dieser Norm ist ...

Inhalt

Seite

Nationales Vorwort.....	4
Einleitung	5
1 Anwendungsbereich	7
2 Zusammenfassung der Verfahren zur Auswertung einer Messung und zur Berechnung der charakteristischen Grenzen.....	7
3 Normative Verweisungen	10
4 Begriffe	10
5 Größen und Formelzeichen.....	15
6 Auswertung einer Messung auf der Grundlage des GUM Supplement 1	17
6.1 Einleitung und zu fällende Entscheidungen	17
6.2 Allgemeines zur Messgröße und zum Modells der Auswertung	18
6.3 Aufstellen der Verteilungen	18
6.4 Fortpflanzung von Verteilungen	20
6.5 Auswertung des primären Messergebnisses	21
6.6 Die dem primären Messergebnis zugeordnete Standardunsicherheit	21
7 Standardunsicherheit als Funktion eines angenommenen wahren Wertes der Messgröße	22
8 Erkennungsgrenze, Nachweisgrenze und Beurteilungen	22
8.1 Vorgaben	22
8.2 Erkennungsgrenze	23
8.3 Nachweisgrenze	23
8.4 Beurteilungen	24
9 Grenzen des Überdeckungsintervalls	25
9.1 Allgemeines	25
9.2 Der probabilistisch symmetrische Überdeckungsintervall.....	25
9.3 Der kürzeste Überdeckungsintervall	26
10 Bester Schätzwert und die ihm zugeordnete Standardunsicherheit	26
11 Prüfbericht	27
Anhang A (normativ) Messungen mit niedrigen gezählten Ereigniszahlen.....	28
Anhang B (informativ) Erläuterungen	31
B.1 Allgemeines zu zählenden Messungen.....	31
B.2 Bayes-Statistik bei Messungen und Wahrscheinlichkeitsverteilungen	31
B.3 Grenzen des Überdeckungsintervalls und bester Schätzwert	35
B.4 Standardunsicherheit als Funktion eines angenommenen wahren Wertes der Messgröße	39
B.5 Erkennungsgrenze und Nachweisgrenze.....	40
B.6 Beurteilung des Messverfahrens	42
Literaturhinweise.....	43

Bilder

Bild 1– Ablaufplan für DIN ISO 11929-2 mit Anwendung des GUM Supplement 1	9
Bild B.1 – Illustration der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion in Gleichung (B.5) für eine nicht-negative Messgröße Y	33
Bild B.2 – Beispiele eines probabilistisch symmetrischen Überdeckungsintervalls (oben) und eines kürzesten Überdeckungsintervalls (unten)	37
Bild B.3 – Bester Schätzwert $\hat{z}$ und die ihm zugeordnete Standardunsicherheit $u(\hat{z})$ der skalierten Messgröße $Z = Y / u(y)$, untere Grenze $z^<$ und obere Grenze $z^>$ des probabilistisch symmetrischen Überdeckungsintervalls und untere $z^<$ und obere Grenze $z^>$ des kürzesten Überdeckungsintervalls	38
Bild B.4 – Veranschaulichung der Funktion $\tilde{u}^2(\tilde{y})$ und der Interpolation nach Gleichung (A.8) im Anhang A.2 von DIN ISO 11929-1	40
Bild B.5 – Erkennungsgrenze y^* und Nachweisgrenze $y^\#$	42

Nationales Vorwort

Das internationale Dokument ISO/CD 11929-2 „Determination of the characteristic limits (decision threshold, detection limit and limits of the coverage interval) for measurements of ionizing radiation – Part 2: Advanced applications“ (CD, en: Committee Draft) ist unverändert in diesen Norm-Entwurf übernommen worden. Dieser Norm-Entwurf enthält eine noch nicht autorisierte deutsche Übersetzung.

Um Zweifelsfälle in der Übersetzung auszuschließen, ist die englische Originalfassung des CD entsprechend der diesbezüglich durch die IEC erteilten Erlaubnis beigelegt. Die Nutzungsbedingungen für den deutschen Text des Norm-Entwurfes gelten gleichermaßen auch für den englischen IEC-Text.

Das internationale Dokument wurde vom SC 2 „Radiation protection“ des TC 85 „Nuclear Energy“ der Internationalen Organisation für Normung (ISO) erarbeitet und den nationalen Komitees zur Stellungnahme und Abstimmung vorgelegt.

Die erste Ausgabe ISO 11929:2010 ersetzte ISO 11929-1:2000, ISO 11929-2:2000, ISO 11929-3:2000, ISO 11929-4:2001, ISO 11929-5:2005, ISO 11929-6:2005, ISO 11929-7:2005 und ISO 11929-8:2005, die einer technischen Revision unterzogen wurden, speziell bzgl. der benutzten statistischen Verfahren zur Behandlung der Daten.

Diese zweite Ausgabe von ISO 11929 ersetzt ISO 11929:2010, die einer technischen Revision unterzogen und erweitert wurde bzgl. der Methoden der Unsicherheitsbeurteilung, wie sie in ISO/IEC Guide 98-3:2009, Uncertainty of measurement – Part 1: Guide to the expression of uncertainty in measurement, (JCGM 100:2008), im Folgenden GUM genannt, und ISO/IEC Guide 98-3-1:2008, Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Propagation of distributions using a Monte Carlo method, (JGCM 101:2008), im Folgenden GUM Supplement 1 genannt, niedergelegt sind.

Diese zweite Ausgabe von ISO 11929 besteht aus vier Teilen:

Teil 1: Elementare Anwendungen

Teil 2: Fortgeschrittene Anwendungen

Teil 3: Anwendung von Entfaltungsmethoden

Teil 4: Leitfaden zur Anwendung.

Für diese Norm ist das nationale Arbeitsgremium GUK 967.2 „Aktivitätsmessgeräte für den Strahlenschutz“ der DKE Deutsche Kommission Elektrotechnik Elektronik Informationstechnik im DIN und VDE (www.dke.de), Gemeinschaftsgremium mit dem Normenausschuss Radiologie (NAR) im DIN, zuständig. Für die konzentrierte Detailbehandlung hat dieses den Arbeitskreis GAK 967.2.1 „Nachweis- und Erkennungsgrenzen bei Kernstrahlungsmessungen“ eingesetzt.

Das Original-Dokument enthält Bilder in Farbe, die in der Papierversion in einer Graustufen-Darstellung wiedergegeben werden. Elektronische Versionen dieses Dokuments enthalten die Bilder in der originalen Farbdarstellung.

Bestimmung der charakteristischen Grenzen (Erkennungsgrenze, Nachweisgrenze und Grenzen des Überdeckungsintervalls) bei Messungen ionisierender Strahlung – Fortgeschrittene Anwendungen

Einleitung

Messunsicherheiten und charakteristische Grenzen, d.h. charakteristische Grenzen wie die Erkennungsgrenze, die Nachweisgrenze und die Grenzen des Überdeckungsintervalls sowie der beste Schätzwert und die ihm zugeordnete Standardunsicherheit, sind in der Metrologie allgemein und im Strahlenschutz von besonderer Bedeutung. Die Quantifizierung der Unsicherheit, die einem Messergebnis zuzuordnen ist, stellt eine Grundlage dar für das Vertrauen, das ein Individuum in das Messergebnis setzen kann. Konformität mit regulatorischen Grenzen, Richtwerten oder Referenzwerten kann nur durch Berücksichtigung und Quantifizierung aller Quellen der Unsicherheit gezeigt werden. Charakteristische Grenzen sind schließlich eine Grundlage für Entscheidungen unter Unsicherheit.

Diese Norm behandelt speziell charakteristische Grenzen für eine nicht-negative Messgröße bei der Messung ionisierender Strahlung. Sie ist jedoch anwendbar für einen weiten Bereich von Messverfahren, der weit über die Messung ionisierender Strahlung hinausgeht.

Die nach dieser Norm zu vorgegebenen Wahrscheinlichkeiten für falsche Entscheidungen festzulegenden Grenzen gestatten es, Nachweismöglichkeiten für eine Messgröße und den durch diese Messgröße quantifizierten physikalischen Effekt wie folgt zu beurteilen:

- Die „Erkennungsgrenze“ erlaubt eine Entscheidung darüber, ob der durch die Messgröße quantifizierte physikalische Effekt vorliegt oder nicht.
- Die „Nachweisgrenze“ gibt an, welcher kleinste wahre Wert der Messgröße mit einem anzuwendenden Messverfahren noch nachgewiesen werden kann. Sie erlaubt damit eine Entscheidung darüber, ob das Messverfahren gestellten Anforderungen genügt und damit für den vorgesehenen Messzweck geeignet ist oder nicht.
- Die „Grenzen des Überdeckungsintervalls“ schließen im Fall, dass das Vorliegen des physikalischen Effektes erkannt wird, ein Überdeckungsintervall ein, der mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit den wahren Wert der Messgröße enthält.

Die genannten Grenzen werden im Folgenden zusammenfassend „charakteristische Grenzen“ genannt.

ANMERKUNG Gemäß dem ISO/IEC Guide 99:2007 aktualisiert in JCGM 200:2012 wird der Begriff „Überdeckungsintervall“ (engl.: “coverage interval”) anstatt “Konfidenzintervall” (engl.: “confidence interval”) benutzt, um die Wortwahl der Bayesschen Terminologie von der der konventionellen Statistik zu unterscheiden.

Alle diese charakteristischen Grenzen basieren auf der Bayes Statistik und auf dem ISO/IEC 98-3 Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement sowie auf dem ISO/IEC Guide 98-3-1 und ISO/IEC 98-3-2 (im Folgenden GUM, GUM Supplement 1, und GUM Supplement 2 genannt). Wie im Detail in Teil 2 dieser Norm beschrieben, werden die charakteristischen Grenzen mathematisch als Momente und Quantile von Wahrscheinlichkeitsdichten (engl.: probability density distributions) der mögliche Werte der Messgröße definiert.

Weil der Messunsicherheit in dieser Norm eine wichtige Rolle zukommt, werden die Auswertung von Messungen und die Behandlung von Messunsicherheiten nach den allgemeinen Verfahren gemäß GUM und GUM Supplement 1 (siehe auch Literaturhinweise [1] bis [5]) durchgeführt. Dies ermöglicht die strikte Trennung der Auswertung der Messungen einerseits und der Festlegung und Berechnung der charakteristischen Grenzen andererseits. Diese Norm basiert auf einer Theorie der Messunsicherheiten [14 bis 16], die ihrerseits auf der Bayes-Statistik [z.B. 17 bis 22] beruht und es erlaubt, auch solche unsichere Größen und Einflüsse zu berücksichtigen, die sich bei mehrmals wiederholten oder bei zählenden Messungen nicht zufällig verhalten. Die letztgenannten Unsicherheiten können mit der konventionellen oder frequentistischen Statistik nicht berücksichtigt werden.

Wegen der Entwicklungen der Metrologie in Bezug auf Messunsicherheiten, wie sie im GUM niedergelegt wurden, wurde ISO 11929:2010 auf der Grundlage des GUM entwickelt. Jedoch wurde die Bayes-Statistik und eine Bayesische Theorie der Messunsicherheiten benutzt. Diese Theorie liefert eine Bayessche Begründung für den GUM. Darüber hinaus basierte ISO 11929:2010 auf den Definitionen der charakteristischen Grenzen [1], einem Vorschlag für eine Norm [2], und einer einführenden Publikation [3]. ISO 11929:2010 vereinigt und ersetzt frühere Teile von ISO 11929 und war für eine Vielzahl von Messverfahren ionisierender Strahlung sowie, in analoger Weise, auch für andere Messverfahren anwendbar.

Seitdem wurde das GUM Supplement 1 publiziert, in dem eine generellere Behandlung der Messunsicherheiten ausführlich beschrieben wurde und Monte Carlo Methoden für komplexe Auswertungen von Messungen herangezogen wurden. Dies war die Motivation, ein entsprechendes Monte Carlo Supplement [4] zu ISO 11929:2010 zu schreiben und ISO 11929:2010 zu revidieren. Die Revision von ISO 11929 beruht weiterhin auf der Bayes-Statistik und kann als Brücke zwischen den Dokumenten ISO 11929:2010 und dem GUM Supplement 1 dienen. Darüber hinaus erlauben eine generellere Definition der charakteristischen Grenzen (Teil 2 dieser internationalen Norm) und die Monte Carlo Berechnung der charakteristischen Grenzen einen Schritt über den gegenwärtigen Stand der Normung, wie er in ISO 11929:2010 niedergelegt ist, hinauszugehen, da Wahrscheinlichkeitsverteilungen anstatt von Unsicherheiten fortgepflanzt werden können. Die Revision ist daher umfassender und erweitert den Bereich der Anwendungen.

Die revidierte ISO 11929 ist darüber hinaus expliziter bei der Berechnung der charakteristischen Grenzen. Sie korrigiert auch ein Problem in ISO 11929:2010 bzgl. unsicherer Größen und Einflüsse, die sich bei wiederholten Messungen nicht zufällig verhalten. Die Publikation [5] gibt eine Übersicht über die Grundlagen dieser Revision. Außerdem werden in Teil 3 dieser internationalen Norm detaillierte Anleitungen gegeben, wie charakteristische Grenzen im Falle multivariater Messungen und Entfaltungsverfahren zu berechnen sind. Für solche Messungen bietet GUM Supplement 2 die Grundlage für die Auswertung der Messunsicherheiten.

In dieser Norm werden Formeln für die Berechnung der charakteristischen Grenzen einer Messgröße der Messung ionisierender Strahlung angegeben, mittels der die „Standardmessunsicherheit“ der Messgröße (im Folgenden „Standardunsicherheit“) sowohl nach dem GUM als auch mittels Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen (engl.: probability density functions, PDFs) der Messgröße auf der Grundlage des GUM Supplement 1 ermittelt werden. Die Standardunsicherheiten oder die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen berücksichtigen sowohl die Unsicherheiten der aktuellen Messung als auch solche der Probenbehandlung, der Kalibrierung von Messsystemen und andere Einflüsse. Bei letzteren wird angenommen, dass sie aus früheren Untersuchungen bekannt sind.

1 Anwendungsbereich

Diese Norm legt im Bereich der Metrologie ionisierender Strahlung ein Verfahren zur Berechnung der „Erkennungsgrenze“, der „Nachweisgrenze“ und der „Grenzen des Überdeckungsintervalls“ für eine nicht-negative Messgröße der ionisierenden Strahlung bei Messungen mit Zeit- und Impulsvorwahl fest. Das Messergebnis ergibt sich aus den Ergebnissen von Messungen einer Bruttozählrate und einer Nulleffektzählrate sowie weiteren Größen aufgrund eines Modells der Auswertung. Speziell kann die Messgröße die Nettozählrate als Differenz der Bruttozählrate und der Nulleffektzählrate oder die Nettoaktivität einer Probe sein. Sie kann auch durch Kalibrierung der Messeinrichtung, Probenbehandlung und andere Faktoren beeinflusst sein.

Diese Norm ist in vier Teile aufgeteilt: elementare Anwendungen auf der Grundlage des GUM in Teil 1, fortgeschrittene Anwendungen auf der Grundlage von GUM Supplement 1 in Teil 2, Anwendungen auf Entfaltungsmethoden in Teil 3 und Anleitungen zur Anwendung in Teil 4.

Teil 1 behandelt elementare Anwendungen zählender Messungen, wie sie häufig im Bereich der Metrologie ionisierender Strahlung auftreten werden. Dieser Teil beschränkt sich auf Anwendungen, bei denen die Unsicherheiten auf der Grundlage des GUM (JCGM 2008) ermittelt werden können. Im [Anhang A](#) wird der spezielle Fall wiederholter zählender Messungen mit zufälligen Einflüssen und in [Anhang B](#) Messungen mit linearen Analogen Ratemetern behandelt.

Teil 2 erweitert die frühere Norm ISO 11929:2010 auf die Auswertung von Messungen, bei denen die Messunsicherheiten nach dem GUM Supplement 1 ermittelt werden, Teil 2 enthält außerdem Erläuterungen zu allgemeinen Aspekten zählender Messungen und zur Anwendung der Bayes-Statistik auf Messungen.

Teil 3 behandelt die Auswertung von Messungen mit Hilfe von Entfaltungsmethoden, zählende Vielkanalmessungen insofern sie mit Entfaltungsmethoden ausgewertet werden, insbesondere alpha- und gamma-spektrometrische Messungen. Außerdem gibt Teil 3 Anleitungen, wie mit Korrelationen und Kovarianzen zu verfahren ist.

Teil 4 gibt nach einer kurzen Darstellung des Verfahrens eine Fülle von numerischen Beispielen Anleitungen zur Anwendung dieser Norm.

Sinngemäß gilt diese Norm auch bei anderen Messungen gleich welcher Art, wenn dasselbe Modell der Auswertung anzuwenden ist. Weitere praktische Beispiele können in anderen ISO-Normen gefunden werden, z. B. ISO 18589 [6], ISO 9696 [7], ISO 9697 [8], ISO 9698 [9], ISO 10703 [10], ISO 7503 [11], ISO 28218 [12], und ISO 11885 [13].

2 Zusammenfassung der Verfahren zur Auswertung einer Messung und zur Berechnung der charakteristischen Grenzen

Abschnitt 2 beschreibt in kurzer Form die Verfahrensschritte, denen bei der Auswertung der Messung einer einzelnen Messgröße auf der Grundlage des GUM oder des GUM Supplement 1 und der Berechnung der charakteristischen Grenzen, d.h. der Erkennungsgrenze, der Nachweisgrenze und den Grenzen des Überdeckungsintervalls, zu folgen ist. Das Verfahren ist für die meisten Messaufgaben bei der Messung ionisierender Strahlung anwendbar.

Es wird angenommen, dass die Messgröße nicht-negativ ist. Diese Information ist lediglich benutzt bei der Berechnung des Überdeckungsintervalls und des besten Schätzwertes und der ihm zugeordneten Standardunsicherheit. Es ist ein weiteres Charakteristikum von Messungen ionisierender Strahlung, dass diese Messungen in Gegenwart eines Nulleffektes ausgeführt werden müssen, der von einer Bruttomessgröße subtrahiert werden muss. Die Verfahren, die in diesem Standard beschrieben werden, sind gleichermaßen anwendbar auf alle Messverfahren, bei denen der Beitrag eines Untergrundes oder analytischen Blanks von einer Brutto Messgröße subtrahiert werden muss.

Die Verfahren, die in im GUM Supplement 1 und diesem Teil 2 von DIN ISO 11929 festgelegt werden, beruhen ausschließlich auf der Bayes-Statistik. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen $f_Y(\tilde{y} | a)$, die die

Unsicherheit vollständig beschreiben, werden mit Hilfe des Prinzips der maximalen Informationsentropie (en: Maximum Information Entropy; PME) auf der Grundlage der verfügbaren Information a abgeleitet. Der originale GUM ist im GUM Supplement 1 als Spezialfall enthalten, dass die verfügbare Information lediglich $a = \{x, u(x_i)\}$ umfasst. Aber auch in diesem Fall hat das GUM Supplement 1 keine Einschränkungen in Bezug auf die Linearisierung des Modells und stellt keine Näherung dar.

Es wird in diesem Teil 2 von DIN ISO 11929 angenommen, dass der Anwender vorab die Anwendbarkeit des GUM geprüft und entschieden hat, dass es notwendig und angemessen ist, nach dem GUM Supplement 1 und Teil 2 von DIN ISO 11929 vorzugehen. Siehe bzgl. Anleitung hierzu Abschnitt von Teil 1 von DIN ISO 11929.

Die Anwendung von DIN ISO 11929-2 erfolgt in 8 aufeinander folgenden Schritten. Ein detaillierter Ablaufplan für DIN ISO 11929-2 ist in Bild (1) gegeben. Anleitung zur praktischen Anwendung von Monte Carlo Methoden ist in den [Abschnitten 6 bis 10](#) gegeben.

- Schritt 1: Modellierung der Messung beginnt mit der Definition einer nicht-negativen Messgröße Y und der Darstellung des Modells der Auswertung als Funktion $Y = G(X_1, \dots, X_m)$, wobei die Eingangsgröße X_1 den Bruttoeffekt beschreibt.
- Schritt 2: Aufstellen der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion (PDF) $f_x(\tilde{x}|a)$ der Eingangsgrößen X und Fortpflanzung zur PDF $f_y(\tilde{y}|a)$ der Ergebnisgröße Y .
- Schritt 3: Auswertung der Messung durch Berechnung des primären Messergebnisses als Erwartungswert von $f_y(\tilde{y}|a)$ und die ihm zugeordneten Standardunsicherheit als Quadratwurzel der Varianz von $f_y(\tilde{y}|a)$.
- Schritt 4: Berechnung der Erkennungsgrenze y^* durch Iteration als das $(1-\alpha)$ -Quantil der PDF $f_y(\tilde{y}|a', \tilde{y} = 0)$ und zu fällende Entscheidungen.
- Schritt 5: Berechnung der Nachweisgrenze $y^\#$ durch Iteration als das β -Quantil der PDF $f_y(\tilde{y}|a', \tilde{y} = y^\#)$ und Beurteilung des Messverfahrens.
- Schritt 6: Berechnung des Überdeckungsintervalls der Messgröße auf der Grundlage von $f_y(\tilde{y}|a)$ unter Berücksichtigung der Nicht-Negativität der Messgröße.
- Schritt 7: Berechnung des besten Schätzwertes der Messgröße und die ihm zugeordnete Standardunsicherheit auf der Grundlage von $f_y(\tilde{y}|a)$ unter Berücksichtigung der Nicht-Negativität der Messgröße.
- Schritt 8: Prüfbericht

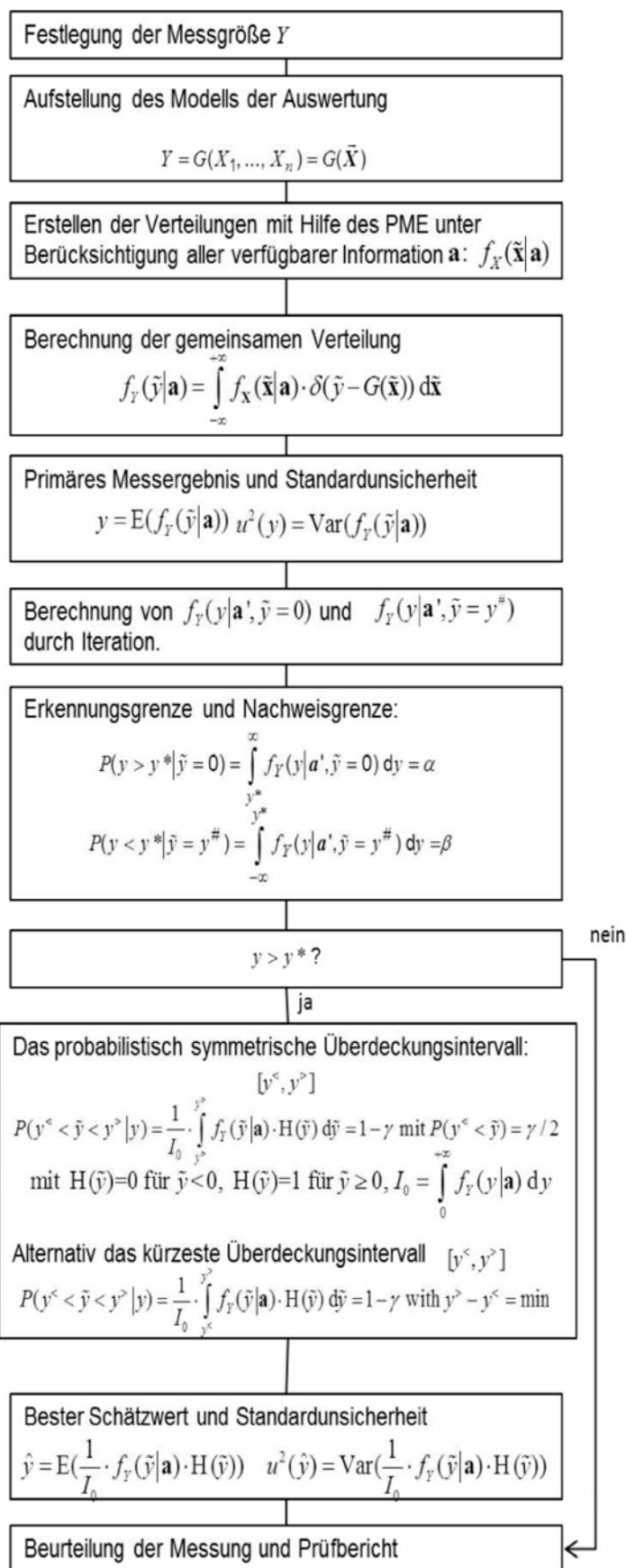


Bild 1– Ablaufplan für DIN ISO 11929-2 mit Anwendung des GUM Supplement 1

3 Normative Verweisungen

Die folgenden Dokumente, die in diesem Dokument teilweise oder als Ganzes zitiert werden, sind für die Anwendung dieses Dokuments erforderlich. Bei datierten Verweisungen gilt nur die in Bezug genommene Ausgabe. Bei undatierten Verweisungen gilt die letzte Ausgabe des in Bezug genommenen Dokuments (einschließlich aller Änderungen).

EN ISO 80000-1:2013, *Größen und Einheiten – Teil 1: Allgemeines*

EN ISO 80000-10:2013, *Größen und Einheiten – Teil 10: Atom- und Kernphysik*

ISO/IEC Guide 98-1:2009, *Uncertainty of measurement - An introduction to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement"*, JCGM 104:2009

ISO/IEC Guide 98-3:2009, *Uncertainty of measurement – Part 3: Guide to the expression of uncertainty in measurement*, JCGM 100:2008; in diesem Dokument als **GUM** bezeichnet

ISO/IEC Guide 98-3-1:2008, *Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" – a Propagation of distributions using a Monte Carlo method*, JCGM 101:2008; in diesem Dokument als **GUM Supplement 1** bezeichnet

ISO/IEC Guide 98-3-2:2008, *Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" – Models with any number of output quantities*, JCGM 102:2011; in diesem Dokument als **GUM Supplement 2** bezeichnet

ISO/IEC Guide 98-4:2012, *Evaluation of measurement data – The role of measurement uncertainty in conformity assessment*, JCGM 106:2012

ISO/IEC Guide 99:2007, *International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM)*, JCGM 200:2012

ISO 3534-1 *Statistics – Vocabulary and symbols – Part 1: General statistical terms and terms used in probability*

4 Begriffe

Für die Anwendung dieses Dokuments gelten die Begriffe nach EN ISO 80000-1, EN ISO 80000-10, ISO/IEC Guide 98-3, ISO/IEC Guide 98-3-1, ISO/IEC Guide 98-3-2, ISO/IEC Guide 99 und ISO 3534-1 und die folgenden Begriffe.

4.1

Größenwert

Wert einer Größe

(en: quantity value, value of a quantity, value)

Zahl und Einheit, die zusammen den Wert einer Größe ausdrücken

[JCGM 200:2012, 1.19]

4.2

Messung

(en: measurement)

Prozess, experimentell einen oder mehrere Werte einer Größe zu bestimmen, die sinnvoller Weise der Größe zugeordnet werden können

[JCGM 200:2012, 2.1]

4.3

Messgröße

(en: measurand)
zu messende Größe

[JCGM 200:2012, 2.3]

4.4

Überdeckungsintervall

(en: coverage interval)

Intervall, das den Bereich möglicher wahrer Werte der Messgröße auf der Grundlage der verfügbaren Information mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit enthält

[JCGM 200:2012, 2.36]

Anmerkung 1 zum Begriff: Ein Überdeckungsintervall muss nicht symmetrisch zu einem gewählten Wert der Messgröße liegen. (siehe JCGM 101:2008).

Anmerkung 2 zum Begriff: Ein Überdeckungsintervall sollte nicht als Konfidenzintervall bezeichnet werden, um eine Verwechslung des statistischen Konzepts zu vermeiden.

4.5

Messmethode

Methode der Messung

(en: measurement method, method of measurement)

generische Beschreibung der logischen Organisation der Arbeitsvorgänge, die bei einer Messung ausgeführt werden

[JCGM 200:2012, 2.4]

4.6

Messverfahren

(en: measurement procedure)

Genaue Beschreibung einer Messung gemäß einem oder mehreren Messprinzipien und einer gegebenen Messmethode basierend auf einem Modell der Messung einschließlich aller Berechnungen zur Erlangung eines Messergebnisses

[JCGM 200:2012, 2.6]

4.7

Messergebnis

Ergebnis der Messung

(en: measurement result, result of measurement)

Satz von Größenwerten, der einer Messgröße zuzuordnen ist, zusammen mit jeder ansonsten verfügbaren relevanten Information

[JCGM 200:2012, 2.9]

4.8

Gemessener Wert einer Größe

Wert einer gemessenen Größe

Messwert

(en: measured quantity value, value of a measured quantity, measured value)

Größenwert, der das Messergebnis darstellt

[JCGM 200:2012, 2.10]

4.9

Wahrer Größenwert

Wahrer Wert einer Größe

Wahrer Wert

(en: true quantity value, true value of a quantity, true value
Größenwert, der konsistent ist, mit der Definition einer Größe

[JCGM 200:2012, 2.11]

Anmerkung 1 zum Begriff: Im Fehleransatz zur Beschreibung Messungen wird angenommen, dass der wahre Wert eindeutig, aber in der Praxis unerkennbar ist. Im Unsicherheitsansatz ist anzuerkennen, dass es aufgrund des inhärent unvollständigen Detaillierungsgrades der Definition einer Größe einen einzigen wahren Wert nicht gibt sondern lediglich einen Satz von wahren Werten, die mit der Definition der Größe konsistent sind. Jedoch ist dieser Satz prinzipiell und in der Praxis unerkennbar ist. Andere Ansätze verzichten vollständig auf das Konzept des wahren Wertes und stützen sich auf das Konzept der metrologischen Kompatibilität von Messergebnissen für die Beurteilung ihrer Gültigkeit.

Anmerkung 2 zum Begriff: Im speziellen Fall einer Naturkonstante nimmt man an, dass die Größe einen einzelnen wahren Wert besitzt.

Anmerkung 3 zum Begriff: Wenn die Unsicherheit aufgrund der Definition der Messgröße als vernachlässigbar verglichen mit anderen Komponenten der Messunsicherheit angehen werden kann, mag angenommen werden, dass die Messgröße einen "wirklichen wahren Wert" besitzt. Das ist der Ansatz, der im GUM und dazugehörigen Dokumenten benutzt wird, wobei das Wort "wahr" als redundant angesehen wird.

4.10

Messfehler

Fehler der Messung

Fehler

(en: measurement error, error of measurement, error)
Gemessener Größenwert minus einen Referenzgrößenwert

[JCGM 200:2012, 2.16]

Anmerkung 1 zum Begriff: Das Konzept des "Messfehlers" kann benutzt werden, wenn

a) es einen einzigen Referenzgrößenwert als Bezug gibt, der vorliegt, wenn eine Kalibrierung mit Hilfe eines Messstandards mit vernachlässigbarer Messunsicherheit vorgenommen wird oder wenn ein konventioneller Größenwert gegeben ist, in welchem Fall der Messfehler bekannt ist.

b) angenommen wird, dass eine Messgröße einen einzigen wahren Wert besitzt oder einen Satz von wahren Werten in einem Bereich vernachlässigbarer Größe, in dem die Messunsicherheit unbekannt ist.

4.11

Messunsicherheit

Unsicherheit der Messung

Unsicherheit

(en: measurement uncertainty, uncertainty of measurement, uncertainty)
nichtnegativer Parameter, der die Streuung der Werte charakterisiert, die vernünftigerweise der Messgröße auf der Grundlage der benutzten Information zugeordnet werden können

[JCGM 200:2012, 2.26]

Anmerkung 1 zum Begriff: Messunsicherheiten enthalten Beiträge von systematischen Effekten, wie Korrekturen und zugewiesene Größenwerte gemessener Standards, als auch definitorische Unsicherheiten. Bisweilen werden systematische Effekte nicht korrigiert, sondern stattdessen zugeordnete Messunsicherheiten berücksichtigt.

Anmerkung 2 zum Begriff: Der Parameter kann zum Beispiel eine Standardabweichung, genannt Standardunsicherheit (oder rein Vielfaches davon) sein oder die Halbwertsbreite eines Intervalls mit einer angegebenen statistischen Überdeckungswahrscheinlichkeit.

Anmerkung 3 zum Begriff: Die Messunsicherheit enthält üblicherweise mehrere Komponenten. Einige dieser Komponenten können aus statistischen Verteilungen als Ergebnisse von wiederholten Messungen ermittelt und als Standardunsicherheiten charakterisiert werden. Die übrigen Komponenten, die auch als Standardunsicherheiten charakterisiert werden können, werden aus Wahrscheinlichkeitsverteilungen gewonnen, die auf Erfahrung und anderen Informationen beruhen.

Anmerkung 4 zum Begriff: Allgemein gilt für einen Satz von Informationen, dass die Messunsicherheit einem gemessenen Größenwert der Messgröße zugeordnet ist. Eine Veränderung dieses Größenwerts bewirkt auch eine Veränderung der zugeordneten Unsicherheit.

4.12

Modell der Auswertung

(en: model of evaluation)

Menge mathematischer Relationen zwischen allen gemessenen und anderen Größen, die bei der Auswertung der Messung einbezogen werden

Anmerkung 1 zum Begriff: Das Modell der Auswertung muss nicht eine explizite Funktion sein. Es kann auch ein Algorithmus sein, der mit einem Computerprogramm abgearbeitet wird.

4.13

Erkennungsgrenze

(en: decision threshold)

Schätzwert der Messgröße, bei dessen Überschreitung durch ein aktuelles Ergebnis einer Messung mit einem Messverfahren, das einen physikalischen Effekt quantifiziert, man entscheidet, dass der physikalische Effekt vorliegt.

Anmerkung 1 zum Begriff: Für den Fall, dass das Messergebnis y größer ist als die Erkennungsgrenze y^* , ist die Nachweisgrenze so festgelegt, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert der Messgröße null ist, kleiner oder gleich einem vorgegebenen Wert α ist.

Anmerkung 2 zum Begriff: Wenn das Messergebnis y kleiner als die Erkennungsgrenze y^* ist, kann das Ergebnis nicht dem physikalischen Effekt zugeordnet werden. Trotzdem kann daraus nicht geschlossen werden, dass der physikalische Effekt nicht vorliegt.

4.14

Nachweisgrenze

(en: detection limit)

kleinster wahrer Wert der Messgröße, der mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit durch das Messverfahren erkannt wird

Anmerkung 1 zum Begriff: Mit der Erkennungsgrenze nach 4.13 ist die Nachweisgrenze der kleinste wahre Wert der Messgröße, für den die Wahrscheinlichkeit für die falsche Entscheidung, dass der wahre Wert der Messgröße null ist, gleich einem vorgegebenen Wert β ist, wenn der wahre Wert in Wirklichkeit nicht null ist.

Anmerkung 2 zum Begriff: Die Begriffe Nachweisgrenze und Erkennungsgrenze werden in unterschiedlichen Normen nicht eindeutig verwendet, z.B. in Normen der chemischen Analytik und der Qualitätssicherung. Wenn diese Begriffe benutzt werden, ist jeweils anzugeben nach welcher Norm sie benutzt werden.

4.15

Überdeckungsintervall

(en: coverage interval)

Intervall, das den wahren Wert einer Größe auf der Grundlage der verfügbaren Information mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit enthält

Anmerkung 1 zum Begriff: Ein Überdeckungsintervall wird bisweilen auch als glaubwürdiges Intervall (en: credible interval) oder Bayessches Intervall bezeichnet.

Anmerkung 2 zum Begriff: Allgemein gibt es mehr als ein Überdeckungsintervall zu einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit

[JCGM 101:2008, 3.12]

4.16

Probabilistisch symmetrisches Überdeckungsintervall

(en : probabilistically symmetric coverage interval)

Überdeckungsintervall einer Messgröße mit der Eigenschaft, dass die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert der Messgröße kleiner ist als der kleinste Wert des Bereichs, gleich der Wahrscheinlichkeit ist, dass der wahre Wert der Messgröße größer ist als der größte Wert des Bereichs.

[JCGM 101:2008, 3.15]

4.17

Kürzestes Überdeckungsintervall

(en : shortest coverage interval)

Überdeckungsintervall einer Messgröße mit der kürzesten Länge aller Überdeckungsintervalle derselben Überdeckungswahrscheinlichkeit

[JCGM 101:2008, 3.16]

4.18

Grenzen des Überdeckungsintervalls

(en: limits of the coverage interval)

Werte, die ein Überdeckungsintervall definieren

Anmerkung 1 zum Begriff: Die Grenzen werden in dieser Norm so berechnet, dass das Überdeckungsintervall den wahren Wert der Messgröße mit der vorgegebenen Wahrscheinlichkeit $(1-\gamma)$ enthält.

Anmerkung 2 zum Begriff: Die Definition des Überdeckungsintervalls ist mehrdeutig ohne weitere Festlegungen. In dieser Norm werden alternativ das probabilistisch symmetrische und das kürzeste Überdeckungsintervall benutzt.

4.19

besten Schätzwert für den wahren Wert der Messgröße

(en: best estimate of the true value of the measurand)

Erwartungswert der Wahrscheinlichkeitsverteilung des wahren Wertes der Messgröße, gegeben durch das experimentelle (primäre) Messergebnis und unter Berücksichtigung aller Informationen, die vor der Durchführung der Messung vorlagen

Anmerkung 1 zum Begriff: Zum besten Schätzwert unter allen möglichen Schätzwerten der Messgröße bei gegebener Information gehört die kleinste Standardunsicherheit.

4.20

Richtwert

(en: guideline value)

Wert entsprechend wissenschaftlicher, legaler oder anderer Anforderungen in Bezug auf das Nachweisvermögen, der zur Beurteilung, ob ein Messverfahren für die Messgröße genügt, zum Vergleich mit der Nachweisgrenze herangezogen wird.

Anmerkung 1 zum Begriff: Ein Richtwert kann z. B. als Aktivität, spezifische Aktivität oder Aktivitätskonzentration, Oberflächenaktivität oder Dosisrate gegeben sein.

Anmerkung 2 zum Begriff: Der Vergleich der Nachweisgrenze mit dem Richtwert erlaubt eine Entscheidung darüber, ob das für die Messung vorgesehene Messverfahren gestellten Anforderungen genügt und damit für den Messzweck geeignet ist oder nicht. Das Messverfahren genügt den Anforderungen, wenn die Nachweisgrenze kleiner ist als der Richtwert.

Anmerkung 3 zum Begriff: Der Richtwert darf nicht verwechselt werden mit anderen Werten zu Festlegung von Konformitätsanforderungen oder gesetzlichen Grenzwerten.

4.21

Nulleffekt

(en: background effect)

Messeffekt, der durch andere Strahlungsquellen als die des Messobjektes selbst bewirkt wird

Anmerkung 1 zum Begriff: Die Auswirkung des Untergrunds durch natürliche Strahlungsquellen oder radioaktive Materialien in oder in der Umgebung des Messgeräts sowie der Probe selbst (z. B. mit anderen Linien des Spektrums).

4.22

Untergrund bei spektrometrischen Messungen

(en: background effect in spectrometric measurement)

Anzahl der nicht interessierenden Ereignisse im Bereich einer betrachteten Linie im Spektrum

4.23

Nettoeffekt

(en: net effect)

Beitrag der möglichen Strahlung eines Messobjekts (z. B. einer Strahlungsquelle oder eines Strahlungsfeldes) zum Messeffekt

4.24

Bruttoeffekt

(en: gross effect)

Messeffekt, der durch den Nulleffekt und den Nettoeffekt bewirkt wird

4.25

Abschirmfaktor

(en: shielding factor)

Faktor, der die Reduzierung der Nulleffektzählrate durch die Abschirmwirkung des Messobjektes beschreibt

4.26

Dämpfungszeitkonstante

(en: relaxation time constant)

Zeitdauer, in der das Ausgangssignal eines linearen Ratemeters auf das 1/e-fache des Anfangswertes abklingt, nachdem die Folge der Eingangsimpulse abgebrochen ist

5 Größen und Formelzeichen

Die Formelzeichen für Hilfsgrößen sowie die nur in den Anhängen benutzten Formelzeichen sind nicht aufgeführt. Physikalische Größen werden mit Großbuchstaben bezeichnet und müssen sorgfältig von ihren Werten unterschieden werden, die mit den entsprechenden Kleinbuchstaben bezeichnet werden.

ANMERKUNG Diese Norm geht davon aus, dass die Messgröße einen wahren Wert besitzt, der unbekannt und unerkennbar ist. In einigen Anwendungen muss ein wahrer Wert angenommen werden.

m	Anzahl der Eingangsgrößen
n_M	Anzahl durchgeführter Monte Carlo Versuche
X_i	Eingangsgrößen ($i = 1, \dots, m$)
x_i	Schätzwert der Eingangsgröße X_i
$\tilde{x}_i$	möglicher wahrer Wert der Eingangsgröße X_i
$x_{1,i}, \dots, x_{n,i}$	Satz $x_1, \dots, x_n$ gezogen im i -ten Monte Carlo Versuch
ζ_i	Integrationsvariable möglicher wahrer Werte der Eingangsgröße X_i
$u(x_i)$	Standardunsicherheit, die dem Schätzwert x_i der Eingangsgröße X_i zugeordnet wird

Δx_i	Breite des Bereichs möglicher Werte der Eingangsgröße X_i
$u_{\text{rel}}(w)$	relative Standardunsicherheit einer Größe Y_k , die dem Schätzwert w zugeordnet ist
G	Modellfunktion
Y	nicht-negative Messgröße, die den betrachteten physikalischen Effekt quantifiziert
$\tilde{y}$	mögliche oder wahre Werte der Messgröße; Wenn der interessierende physikalische Effekt nicht vorliegt, gilt $\tilde{y} = 0$ anderenfalls $\tilde{y} > 0$;
η	Integrationsvariable eines möglichen wahren Wertes der Ergebnisgröße Y
y	ermittelter Wert des Schätzers Y , Schätzwert der Messgröße, primäres Messergebnis
y'	Variable zur Beschreibung möglicher Messergebnisse (Schätzwerte);
y_j	Werte y aus unterschiedlichen Messungen ($j = 0, 1, 2, \dots$)
$\tilde{y}_M = \{y_1, \dots, y_{n_M}\}$	Vektor der Ergebnisse von n_M Monte Carlo Versuchen
$u(y)$	Standardunsicherheit der Messgröße zugeordnet zum primären Messergebnis
$\tilde{u}(\tilde{y})$	Standardunsicherheit des Schätzers Y als Funktion eines angenommenen wahren Wertes $\tilde{y}$ der Messgröße
$f_Y(y \tilde{y})$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion; d.h. die bedingte Wahrscheinlichkeit von Schätzwerten y gegeben ein angenommener wahrer Wert $\tilde{y}$ der Messgröße Y
$f_Y(\tilde{y} y), f_{Y,0}(\tilde{y} y)$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion möglicher wahrer Werte $\tilde{y}$ der Messgröße Y gegeben der gemessene Schätzwert y (Bayes-Statistik)
$f_Y(\tilde{y} a)$	Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion möglicher wahrer Werte $\tilde{y}$ der Messgröße Y gegeben ein Satz an Information a über die Eingangsgrößen, ihre Werte und ihre Beziehungen zur Ergebnisgröße
$f_Y(\tilde{y})$	Modellprior; er repräsentiert alle verfügbare Information über die Messgröße, bevor die Messung durchgeführt wird
$F_Y(\tilde{y} a)$	Verteilungsfunktion der PDF $f_Y(\tilde{y} a)$
$H(x)$	Heaviside Stufenfunktion: $f_H(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < 0 \\ 1 & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$
a	Satz an Information über die Eingangsgrößen, ihre Werte und ihre Beziehungen zur Ergebnisgröße
$\hat{y}$	bester Schätzwert der Messgröße
$u(\hat{y})$	Standardunsicherheit der Messgröße zugeordnet zum besten Schätzwert $\hat{y}$
y^*	Erkennungsgrenze der Messgröße
$y^\#$	Nachweisgrenze der Messgröße
y_r	Richtwert der Messgröße
$y^<, y^>$	untere bzw. obere des probabilistisch symmetrischen Überdeckungsintervalls der Messgröße
$y^{<}, y^{>}$	untere bzw. obere Grenze des kürzesten Überdeckungsintervalls der Messgröße
R_i	Zählrate als Eingangsgröße X_i
R_n	Nettoeffektzählrate
R_g	Bruttozählrate
R_0	Nulleffektzählrate

r_g, r_0	Schätzwerte der Brutto- bzw. Nulleffektzählrate
ρ_g, ρ_0	Integrationsvariablen möglicher wahrer Werte der Gesamt- und der Untergrundzählraten R_g, R_0
n_i	Anzahl der gezählten Impulse bei der Messung der Zählrate R_i
n_g, n_0	Anzahl der gezählten Impulse des Bruttoeffektes bzw. Nulleffektes
t_i	Messdauer der Zählrate R_i
t_g, t_0	Messdauer des Bruttoeffektes bzw. Nulleffektes
r_i	Schätzwert der Zählrate ρ_i
τ_g, τ_0	Dämpfungszeitkonstante eines Ratemeters bei der Messung des Bruttoeffektes bzw. Nulleffektes
α, β	Wahrscheinlichkeit einer falsch positive bzw. falsch negative Entscheidung
$1-\gamma$	Wahrscheinlichkeit zum Überdeckungsintervall der Messgröße
q_p	Quantil einer Verteilung zur Wahrscheinlichkeit p

6 Auswertung einer Messung auf der Grundlage des GUM Supplement 1

6.1 Einleitung und zu fällende Entscheidungen

In dieser Norm beruhen die Verfahren zur Auswertung einer Messung ausschließlich auf den Festlegungen des GUM und GUM Supplement 1. Die Verfahren nach dem GUM und dem GUM Supplement 1 haben unterschiedliche historische Wurzeln und Anwendungsbereiche. Der GUM wurde auf einer unklaren statistischen Grundlage entwickelt, die frequentistische und Bayes-Statistik miteinander vermischte. Darüber hinaus war und ist die Anwendung des GUM beschränkt auf Modelle der Auswertung, die – zumindest lokal – linearisierbar sind. Der GUM nutzt dabei eine Taylorreihenentwicklung erster Ordnung. Trotz dieser Einschränkungen war der GUM erfolgreich für eine Vielzahl von Anwendungen, häufig auch für solche die die Grenzen seiner erklärten Anforderungen überschritten.

Eine eindeutige Feststellung zu den statistischen Grundlagen und Methoden sowie Festlegungen in Bezug auf die generelle Anwendbarkeit des GUM wurden erst im GUM Supplement 1 gegeben. Das GUM Supplement 1 stellt fest, dass die Methodik ausschließlich auf der Bayes-Statistik beruht und dass die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktionen, die die Unsicherheit vollständig beschreiben, mit Hilfe des Prinzips der maximalen Informationsentropie (en: Principle of Maximum Information Entropy; PME) [23] auf der Grundlage der verfügbaren Information abgeleitet werden.

ANMERKUNG 1 Der originale GUM ist im GUM Supplement 1 als der Spezialfall enthalten, dass die verfügbare Information lediglich $a=\{x, u(x_i)\}$ umfasst. Jedoch auch in diesem Fall hat das GUM Supplement 1 nicht die Einschränkungen bezgl. der Linearisierbarkeit des Modells der Auswertung und ist nicht länger eine Näherung.

ANMERKUNG 2 Ein aktueller (2015) Entwurf einer Revision des GUM stellt ebenfalls fest, dass die Bayes-Statistik die einzige Grundlage der GUM Methodik darstellt.

Daher sind die folgenden Entscheidungen durch den Anwender vorab zu treffen:

- Abhängig von der verfügbaren Information hat der Anwender zu entscheiden, ob nach dem GUM oder dem GUM Supplement 1 vorgegangen werden soll. Wenn die verfügbare Information lediglich aus $a=\{x, u(x)\}$ besteht, ist der GUM anzuwenden, vorausgesetzt, dass seine Anforderungen erfüllt sind.
- Der Anwender muss entscheiden, ob das Modell der Auswertung die Bedingungen des GUM Ansatzes erfüllt oder nicht.
- Wenn der GUM Ansatz benutzt wird und das primäre Messergebnis und die ihm zugeordnete Standardunsicherheit berechnet werden und wenn sich während der nachfolgenden Berechnungen der charakteristischen Grenzen herausstellt, dass keine Nachweisgrenze existiert, muss der Anwender entscheiden, ob dieser Mangel an Wissen akzeptabel ist oder nicht. Ist das nicht der Fall, muss der

Anwender das GUM Supplement 1 benutzen, das es auch gestattet, große relative Unsicherheiten zu berücksichtigen.

6.2 Allgemeines zur Messgröße und zum Modells der Auswertung

Als Ergebnisgröße soll eine nicht-negative Messgröße dem zu untersuchenden physikalischen Effekt gemäß der Messaufgabe zugeordnet sein. Die Messgröße soll den Effekt quantifizieren. Sie nimmt den Wert Null an, wenn der Effekt im speziellen Fall nicht vorliegt.

Eine Zufallsvariable Y wird der Messgröße als Schätzer zugeordnet. Das Symbol Y wird auch in diesem Abschnitt für die Messgröße selbst verwendet. Dann ist das Modell der Auswertung aufzustellen, dass die Ergebnisgröße mathematisch mit allen Eingangsgrößen X verbindet. Der Vektor $X = \{X_1, X_2, \dots, X_m\}$ bezeichnet auch die Zufallsvariablen X_i , die als Schätzer der Eingangsgrößen X_i dienen. Gleichung (1) ist das Modell der Auswertung.

$$Y = G(X_1, \dots, X_m) = G(X) \quad (1)$$

ANMERKUNG Im allgemeinen Modell nach Gleichung (1) ist X_1 die Bruttogröße der Messung.

Ein sehr allgemeines Modell der Auswertung bei Messungen ionisierender Strahlung, das in Teil 1 von DIN ISO 11929 eingehend behandelt wird, ist gegeben durch

$$Y = G(X_1, \dots, X_m) = (X_1 - X_2 X_3 - X_4) \cdot \frac{X_6 X_8 \dots}{X_5 X_7 \dots} = (X_1 - X_2 X_3 - X_4) \cdot W \quad (2)$$

mit dem Kalibrierfaktor

$$W = \frac{X_6 X_8 \dots}{X_5 X_7 \dots} \quad (3)$$

$X_1 = R_g = N_g / t_g$ ist die Bruttozählrate und $X_2 = R_0 = N_0 / t_0$ ist die Nulleffektzählrate. Die anderen Eingangsgrößen X_i sind Kalibrier-, Korrekptions- oder Einflussgrößen sowie Konversionsfaktoren, Emissions- oder Ansprechwahrscheinlichkeit, oder, im Besonderen, X_3 ein Abschirmfaktor und X_4 eine zusätzliche, durch eine Zählrate ausgedrückte Nulleffektkorrektur. Wenn einige der Eingangsgrößen nicht beteiligt sind, sind $x_i = 1$ ($i = 3; i > 4$), $x_4 = 0$ und $u(x_i) = 0$ für sie einzusetzen.

6.3 Aufstellen der Verteilungen

Auf der Grundlage der verfügbaren Information a werden PDFs $f_x(\tilde{x} | a)$ den Eingangsgrößen X_i gemäß den Festlegungen des GUM Supplement 1 zugeordnet. Dies geschieht mit Hilfe des Prinzips der maximalen Informationsentropie (PME) [23]; siehe auch [4, 5]. Es kann vorkommen, dass die verfügbare Information nicht ausreicht, eine sinnvolle Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_x(\tilde{x} | a)$ aufzustellen. Dies ist insbesondere der Fall, wenn große relative Unsicherheiten zu berücksichtigen sind. Dann muss unter Umständen weitere Information beschafft werden, sei es experimentell oder auf anderem Wege, die es erlaubt eine gewählte PDF als Schätzer eine Größe zu verwenden.

ANMERKUNG 1 Eine Menge an Information a enthält sowohl die Information X der Schätzwerte der Eingangsgrößen als auch jedwede sonstige Information über mögliche Werte $\tilde{x}$ von X .

ANMERKUNG 2 Das GUM Supplement 1 gestattet es, mehr und andere Information über die X_i als der GUM zu berücksichtigen und gibt Anleitungen, geeignete PDFs $f_x(\tilde{x} | a)$ mit Hilfe des PME aus der verfügbaren Information abzuleiten.

Häufig bei Messungen ionisierender Strahlung vorkommende PDFs sind die Normal- oder Gauß-Verteilung, die Gamma-Verteilung, die Rechteckverteilung und die logarithmische Normalverteilung (abgekürzt "Log-Normalverteilung").

Die **Normal- oder Gauß-verteilung** ist die exakte Lösung des PME, wenn die verfügbare Information lediglich aus einem Messwert x und der ihm zugeordneten Standardunsicherheit $u(x)$ besteht.

$$f_X(\tilde{x} | u(x)) = N(x, u(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot u(x)} \cdot \exp\left(\frac{-(\tilde{x} - x)^2}{2 \cdot u^2(x)}\right) \quad (4)$$

Diese PDF hat den Erwartungswert x und die Varianz $u^2(x)$.

ANMERKUNG 3 Wenn lediglich ein Schätzwert x und die ihm zugeordnete Standardunsicherheit $u(x)$ für eine Eingangsgröße X_i verfügbar ist, ist die PDF eine Gauß- (Normal-) Verteilung $f_{X_i}(x_i | x_i, u(x_i)) = N(x_i, u(x_i))$. Dies ist der Fall für alle Eingangsgrößen im GUM. Unter Benutzung einer Taylorreihenentwicklung erster Ordnung wird die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_Y(\tilde{y} | y)$ als eine Normalverteilung mit dem Erwartungswert y und der Standardabweichung $u(y)$ berechnet.

ANMERKUNG 4 In Teil 1 von DIN ISO 11929 wird lediglich vom Erwartungswert und der Varianz der Verteilung der Zählrate Gebrauch gemacht. Folglich wird dann eine Normalverteilung für die Zählrate benutzt. Diese ist eine hinreichende Näherung der Gamma-Verteilung für große Ereigniszahlen. Wenn kleine Ereigniszahlen zu berücksichtigen sind, ist Teil 2 von DIN ISO 11929 anzuwenden, wie es im Einzelnen in [Anhang A](#) von DIN ISO 11929-2 beschrieben ist.

Die **Gamma-Verteilung** ist die Lösung des Bayes-Theorems unter Benutzung eines Jeffrey-Priors wenn die Messgröße eine Zählrate R ist und die verfügbare Information aus der Anzahl n der während der Messdauer t gezählten Ereignisse besteht. Siehe [Anhang A](#) von DIN ISO 11929-2 für nähere Erläuterungen.

$$f_R(\tilde{r} | n, t) = \frac{t^n \cdot \tilde{r}^{n-1}}{(n-1)} \cdot \exp(-\tilde{r} \cdot t) \quad (5)$$

Die Gamma-Verteilung hat den Erwartungswert

$$r = E(f_R(\tilde{r} | n, t)) = \int_0^\infty \rho \cdot f_R(\rho | n, t) d\rho = n/t \quad (6)$$

und die Varianz

$$u^2(r) = \text{Var}(f_R(\tilde{r} | n, t)) = \int_0^\infty (\rho - r)^2 \cdot f_R(\rho | n, t) d\rho = n/t^2 \quad (7)$$

ANMERKUNG 5 Die PDF einer Zählrate, $X_i = R_i$, wird erhalten aus Ereigniszahlen, n_i , gezogen aus einem Poisson-Prozess während der Messdauer, t_i , ist eine Gamma-Verteilung; siehe [Anhang A](#) von DIN ISO 11929-2 und Literaturstellen [4, 5]. Diese Gamma-Verteilung ist insbesondere im Falle kleiner Ereigniszahlen zu benutzen, für die Abweichungen der Normalverteilung von der Gamma-Verteilung relevant sind. Für große Ereigniszahlen ist die Information, die in Teil 1 von DIN ISO 11929 benutzt wird, hinreichen, d.h. $x_i = n_i / t_i$ und $u^2(x_i) = n_i / t_i^2$ und die sich daraus ergebende Normalverteilung.

Die **Rechteckverteilung** ist die exakte Lösung des PME wenn die verfügbare Information auf die Kenntnis einer unteren Grenze a und einer oberen Grenze b beschränkt ist und sich x zwischen diesen Grenzen zufällig verhält.

$$f_X(\tilde{x} | a, b) = \frac{1}{(b-a)} \quad (8)$$

Diese Rechteckverteilung hat den Erwartungswert

$$x = E(f_X(\tilde{x} | a, b)) = \int_a^b \zeta \cdot f_X(\zeta | a, b) d\zeta = \frac{(a+b)}{2} \quad (9)$$

und die Varianz

$$u^2(x) = \text{Var}(f_X(\tilde{x} | a, b)) = \int_a^b (\zeta - x)^2 \cdot f_X(\zeta | a, b) d\zeta = \frac{(b-a)^2}{12} \quad (10)$$

ANMERKUNG 6 Wenn lediglich der Bereich möglicher Werte einer Größe X_i bekannt und sinnvoll ist, ist die PDF, die sich aus dem PME ergibt, eine Rechteckverteilung. Diese PDF folgt auch aus dem Indifferenzprinzip von Laplace. Wenn diese Größe X_i im Nenner des Modells der Auswertung steht und einen Bereich möglicher Werte $[x_L, x_U]$ besitzt, darf sie nicht durch eine Größe $1/X_i$ mit möglichen Werten $[1/x_U, 1/x_L]$ im Zähler der Modellfunktion ersetzt werden, da eine Rechteckverteilung im Nenner nicht durch eine Rechteckverteilung von $1/X_i$ im Zähler beschrieben wird.

Die **Log-Normalverteilung** ist die exakte Lösung des PME, wenn die Messgröße eine multifaktorielle Größe ist und die verfügbare Information aus dem Mittelwert $m(\ln(x))$ der Logarithmen der gemessenen Werte x und ihrer Standardabweichung $s(\ln(x))$ besteht.

$$f_X(x | m(\ln(x)), s(\ln(x))) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot s(\ln(x))} \cdot \exp\left(\frac{-(\ln(x) - m(\ln(x)))^2}{2 \cdot s^2(\ln(x))}\right) \quad (11)$$

Diese Log-Normalverteilung hat den Erwartungswert

$$x = E(f_X(\tilde{x} | m(\ln(x)), s(\ln(x)))) = \int_a^b \zeta \cdot f_X(\zeta | m(\ln(x)), s(\ln(x))) d\zeta = \exp\left(m\left(\ln(x) + \frac{s^2(\ln(x))}{2}\right)\right) \quad (12)$$

und die Varianz

$$\begin{aligned} u^2(x) &= \text{Var}(f_X(\tilde{x} | m(\ln(x)), s(\ln(x)))) = \int_a^b (\zeta - x)^2 \cdot f_X(\zeta | m(\ln(x)), s(\ln(x))) d\zeta \\ &= \exp\left(2 \cdot m(\ln(x)) + s^2(\ln(x))\right) \cdot \exp\left(s^2(\ln(x)) - 1\right) \end{aligned} \quad (13)$$

ANMERKUNG 7 Alternativ zum PME können auch andere Mittel wie das Bayes-Theorem oder das Erweiterungstheorem der Wahrscheinlichkeitstheorie benutzt werden, um bekannte Häufigkeiten oder Parameterverteilungen zu berücksichtigen. Wenn mehr Information über die Ergebnisgröße verfügbar ist, als in dieser Norm angenommen, kann diese in Form eines geeigneten Modellpriors im Bayes-Theorem berücksichtigt werden.

6.4 Fortpflanzung von Verteilungen

Nach dem Aufstellen der PDFs aller Eingangsgrößen ist die gemeinsame PDF $f_X(\tilde{x} | a)$ zu bilden. Im Falle voneinander unabhängiger Eingangsgrößen ist die gemeinsame PDF

$$f_X(\tilde{x} | a) = \prod_{i=1}^m f_{X_i}(\tilde{x}_i | a_i) \quad (14)$$

wobei a_i eine Untermenge der verfügbaren Information zu den X_i ist. Eine gemeinsame PDF ist denjenigen X_i zuzuordnen, die nicht voneinander unabhängig sind, und ist in Gleichung (14) für die entsprechenden Eingangsgrößen einzusetzen.

Die posterior PDF $f_Y(\tilde{y} | a)$ wird aus der gemeinsamen PDF $f_Y(\tilde{x} | a)$ unter Benutzung der Modellgleichung $Y = G(X)$ mit Hilfe der sogenannten Markov Formel zu berechnen:

$$f_Y(\tilde{y} | a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(\zeta | a) \cdot \delta(\tilde{y} - G(\zeta)) d\zeta \quad (15)$$

Das GUM Supplement 1 empfiehlt die Anwendung von Monte Carlo Methoden für die Lösung von Gleichung (15) und zur Ableitung von $f_Y(\tilde{y} | a)$. Geeignete Numerik ist an anderem Ort [4] beschrieben.

Bei Benutzung des Monte Carlo Ansatzes sind $i = 1, \dots, n_M$ Monte Carlo Versuche durchzuführen, indem man Sätze $x_{1,i}, \dots, x_{n,i}$ aus den PDFs $f_{X_i}(\tilde{x}_i | a)$ zieht. Für jeden dieser Sätze berechnet man $y_i = G(x_{1,i}, \dots, x_{n,i})$. Der Vektor $\tilde{y}_M = \{y_1, \dots, y_{n_M}\}$ wird aufsteigend geordnet und Wahrscheinlichkeiten i/n_M werden den y_i des $\tilde{y}_M$ zugeordnet. So erhält man eine diskrete Darstellung der Verteilungsfunktion $F_Y(\tilde{y} | a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(\eta | a) d\eta$ von Y .

ANMERKUNG Wenn die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_X(\tilde{x} | a)$ explizit verfügbar ist, kann auch das Integral in Gleichung (15) eine explizite Lösung haben.

6.5 Auswertung des primären Messergebnisses

Das primäre Messergebnis y wird als Erwartungswert von $f_Y(\tilde{y} | a)$ berechnet.

$$y = E(f_Y(\tilde{y} | a)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \eta \cdot f_Y(\eta | a) d\eta \quad (16)$$

ANMERKUNG 1 Das primäre Messergebnis berücksichtigt nicht, dass die Messgröße nicht-negativ ist. Dies wird in den Abschnitten 9 und 10 bei der Berechnung des Überdeckungsintervalls und des besten Schätzwertes sowie der ihm zugeordneten Standardunsicherheit berücksichtigt werden.

Bei Benutzung des Monte Carlo Ansatzes wird das primäre Messergebnis y als arithmetischer Mittelwert $\tilde{y}_M = \{y_1, \dots, y_{n_M}\}$ der Elemente des Vektors $y = \frac{1}{n_M} \cdot \sum_{i=1}^{n_M} y_i$ berechnet.

ANMERKUNG 2 Quantile q_p zur Wahrscheinlichkeit p der PDF $f_Y(\tilde{y} | a)$ können bequem über den Vektor $\tilde{y}_M = \{y_1, \dots, y_{n_M}\}$ berechnet werden, indem man den Wert y_k mit $k/n_M = p$ sucht.

6.6 Die dem primären Messergebnis zugeordnete Standardunsicherheit

Die dem primären Messergebnis $u(y)$ zugeordnete Standardunsicherheit y wird als Quadratwurzel der Varianz von $f_Y(\tilde{y} | a)$ berechnet.

$$u^2(y) = \text{Var}(f_Y(\tilde{y} | a)) = \int_{-\infty}^{+\infty} (\eta - y)^2 \cdot f_Y(\eta | a) d\eta \quad (17)$$

Allgemein wird die Tatsache, dass die Messgröße nicht-negativ ist, nicht berücksichtigt. Daher kann das primäre Messergebnis y negativ sein, speziell dann, wenn die Messgröße einen Wert nahe Null besitzt. Das primäre Messergebnis y unterscheidet sich vom besten Schätzwert $\hat{y}$ der Messgröße, der in Abschnitt 10 berechnet wird. Für die Berechnung von $\hat{y}$ wird die Information, dass die Messgröße nicht-negativ ist, berücksichtigt. Die dem besten Schätzwert $\hat{y}$ zugeordnete Standardunsicherheit $u(\hat{y})$ ist dann kleiner als $u(y)$.

Bei Benutzung des Monte Carlo Ansatzes wird die dem primären Messergebnis y zugeordnete Standardunsicherheit $u(y)$ als Standardabweichung $u(y) = \sqrt{\frac{1}{n_M - 1} \cdot \sum_{i=1}^{n_M} (y_i - \bar{y})^2}$ der Elemente des Vektors $\bar{y}_M = \{y_1, \dots, y_{n_M}\}$ berechnet.

7 Standardunsicherheit als Funktion eines angenommenen wahren Wertes der Messgröße

Für die Festlegung und numerische Berechnung der Erkennungsgrenze in [Abschnitt 8.2](#) der Nachweisgrenze in [Abschnitt 8.3](#) wird die Standardunsicherheit als Funktion angenommener wahrer Werte der Messgröße benötigt. In Teil 1 von DIN ISO 11929, in dem die GUM Methodik benutzt wird, kann die Standardunsicherheit als Funktion eines angenommenen wahren Wertes der Messgröße explizit angegeben werden. Das ist nicht möglich bei Anwendung des GUM Supplement 1, aber Standardabweichungen für einzelne angenommene wahre Werte können in ähnlicher Weise berechnet werden wie $u(y)$ bei der Auswertung von Messungen auf der Grundlage des GUM Supplement 1; siehe auch [1, 2].

Im Ansatz nach dem GUM Supplement 1 kann die Standardunsicherheit als Funktion eines angenommenen wahren Wertes als Näherung erhalten werden durch wiederholte numerische Berechnungen für einen angenommenen wahren Wert $\tilde{y}$ der Messgröße, was zu einer Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_Y(y | a')$ mit einem modifizierten Satz an Information a' führt, der die restliche Information von a enthält. Zu diesem Zweck ist die Bruttoeingangsgröße x_1 zu verändern. Die Standardunsicherheit für einen angenommenen wahren Wert der Messgröße ist dann als Quadratwurzel aus der Varianz der PDF $f_Y(y | a')$ zu ermitteln.

Für die Berechnung der Erkennungsgrenze und der Nachweisgrenze müssen iterative verfahren benutzt werden. Für jeden Iterationsschritt muss eine neue PDF $f_{X_1}(x_1 | a', x_1)$ mit einen modifizierten Wert x_1 der Bruttogröße X_1 erstellt werden. Dann werden $i = 1, \dots, n_M$ neue Monte Carlo Versuche durchgeführt, in dem Sätze $x_{1,j}, \dots, x_{n,i}$ von den PDFs $f_{X_1}(x_1 | a', x_1), f_{X_i}(x_i | a'), i = 2, \dots, n$ gezogen werden. Für jeden dieser Sätze berechnet man wieder $y_i = G(x_{1,i}, \dots, x_{n,i})$. Der neue Vektor $\bar{y}_M(a') = \{y_1, \dots, y_{n_M}\}$ wird aufsteigend geordnet und den Elementen y_i von $\bar{y}_M(a')$ werden Wahrscheinlichkeiten i/n_M zugeordnet und so eine diskrete

Darstellung der Verteilungsfunktion $F_Y(\tilde{y} | a', x_1) = \int_{-\infty}^{\tilde{y}} f_Y(\eta | a', x_1) d\eta$ von Y erhalten.

8 Erkennungsgrenze, Nachweisgrenze und Beurteilungen

8.1 Vorgaben

Die Wahrscheinlichkeit α einer falsch positiven Entscheidung, die Wahrscheinlichkeit β einer falsch negativen Entscheidung und die Überdeckungswahrscheinlichkeit $1 - \gamma$ zum Überdeckungsintervall müssen vorgegeben werden. Die Wahl der geeigneten Werte hängt von der jeweiligen Anwendung ab. Häufig werden $\alpha = \beta$ und der Wert 0,05 für α und β gesetzt. Für die Überdeckungswahrscheinlichkeit wird häufig für γ der Wert 0,05 gewählt.

Wenn beurteilt werden soll, ob ein Messverfahren für die Messgröße aus wissenschaftlichen, gesetzlichen oder anderen Gründen gestellten Anforderungen genügt, muss auch ein Richtwert y_r als Wert der Messgröße, z. B. als Aktivität, vorgegeben werden.

8.2 Erkennungsgrenze

Die Erkennungsgrenze y^* einer nicht-negativen Messgröße nach [Abschnitt 6.2](#), die einen untersuchten physikalischen Effekt quantifiziert, ist der Wert des Schätzers Y , der die Entscheidung erlaubt, dass dieser Effekt vorhanden ist, wenn das primäre Messergebnis y die Erkennungsgrenze y^* übersteigt. Wenn das primäre Messergebnis y kleiner ist als die Erkennungsgrenze y^* , kann das Ergebnis nicht dem physikalischen Effekt zugeschrieben werden, obwohl nicht geschlossen werden kann, dass der Effekt nicht vorhanden ist. Wenn der physikalische Effekt tatsächlich nicht vorhanden ist, ist die Wahrscheinlichkeit einer falschen Entscheidung, nämlich, dass der Effekt vorliegt, gleich der festgelegten Wahrscheinlichkeit α (Wahrscheinlichkeit der falschen Entscheidung, dass der Effekt vorliegt, obwohl dies tatsächlich nicht der Fall ist).

Ein erhaltenes primäres Messergebnis y einer nicht-negativen Messgröße weist nur dann signifikant auf einen wahren Wert der Messgröße größer null hin ($\tilde{y} > 0$), wenn das primäre Messergebnis größer ist als die Erkennungsgrenze.

$$P(y > y^* \mid \tilde{y} = 0) = \int_{y^*}^{\infty} f_Y(y' \mid \tilde{a}', \tilde{y} = 0) dy' = \alpha \quad (18)$$

Das Integral nach [Gleichung \(21\)](#) ist mittels Monte Carlo Verfahren zu berechnen. In [\[4\]](#) sind Einzelheiten einer sinnvollen Numerik gegeben.

Bei Benutzung des Monte Carlo Ansatzes wird die Erkennungsgrenze y^* durch Iteration berechnet in Form einer Nullstellensuche, die mittels Bisektionsverfahren, der *regula falsi* oder Interpolation erfolgen kann. Für jeden Iterationsschritt müssen neue PDFs $f_{X_1}(\tilde{x}_1 \mid a', x_1)$ mit modifizierten Werten x_1 der Bruttoeingangsgröße X_1 erstellt werden. Dann werden $i = 1, \dots, n_M$ neue Monte Carlo Versuche durchgeführt, indem Sätze $x_{1,i}, \dots, x_{n,i}$ von den PDFs $f_{X_1}(\tilde{x}_1 \mid a', x_1), f_{X_i}(\tilde{x}_i \mid a'), i = 2, \dots, n$ gezogen werden. Für jeden dieser Sätze berechnet man wieder $y_i = G(x_{1,i}, \dots, x_{n,i})$. Der neue Vektor $\tilde{y}_M(a') = \{y_1, \dots, y_{n_M}\}$ wird aufsteigend geordnet und danach werden den y_i von $\tilde{y}_M(a')$ die Wahrscheinlichkeiten i/n_M zugeordnet und so eine diskrete Darstellung der Verteilungsfunktion $F_Y(\tilde{y} \mid a', x_1) = \int_{-\infty}^{\tilde{y}} f_Y(\eta \mid a', x_1) d\eta$ von Y erhalten. Durch Iteration sucht man die Funktion $F_Y(\tilde{y} \mid a', x_1) = \int_{-\infty}^{\tilde{y}} f_Y(\eta \mid a', x_1) d\eta$ mit $E(f_Y(\tilde{y} \mid a', x_1)) = 0$. Von den jeweiligen $\tilde{y}_M(a') = \{y_1, \dots, y_{n_M}\}$ der PDF berechnet man die Wahrscheinlichkeit $P(y^* < y_k) = k/n_M$, indem man den größten Index k mit $y_k > y^*$ sucht. Dies Verfahren wird wiederholt, bis die Bedingung $P(y_i > y^*) - 1 + \alpha = 0$ erfüllt ist und man einen Vektor $\tilde{y}_M(a') = \{y_1, \dots, y_{n_M}\}$ erhält, der diese Bedingung erfüllt. Der arithmetische Mittelwert der Elemente des Vektors $\tilde{y}_M(a') = \{y_1, \dots, y_{n_M}\}$ ist die Erkennungsgrenze y^* .

Wenn die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f(y' \mid a', \tilde{y} = 0)$ explizit verfügbar ist, kann das Integral nach Gleichung (18) auch mit anderen Methoden berechnet werden.

8.3 Nachweisgrenze

Die Nachweisgrenze $y^\#$ ist der kleinste wahre Wert der Messgröße, für den bei Anwendung der Entscheidungsregel nach [Abschnitt 8.2](#) die Wahrscheinlichkeit dafür, fälschlich anzunehmen, dass der

physikalische Effekt nicht vorliegt (Fehler zweiter Art), höchstens gleich der vorzugebenden Wahrscheinlichkeit β ist.

Zur Prüfung, ob ein Messverfahren für den Messzweck geeignet ist, wird die Nachweisgrenze $y^\#$ mit dem vorzugebenden Richtwert y_r für die Messgröße verglichen. Die Nachweisgrenze $y^\#$ ist der kleinste wahre Wert der Messgröße, der mit dem anzuwendenden Messverfahren noch nachgewiesen werden kann. Sie liegt so hoch über der Erkennungsgrenze y^* , dass die Wahrscheinlichkeit des Fehlers zweiter Art höchstens gleich β ist. Die Nachweisgrenze $y^\#$ wird als die kleinste Lösung der Gleichung (19) erhalten:

$$P(y < y^* \mid \tilde{y} = y^\#) = \int_{-\infty}^{y^*} f_Y(y' \mid a', \tilde{y} = y^\#) dy' = \beta \quad (19)$$

Wenn die Unsicherheiten nach dem GUM Supplement 1 ausgewertet werden, kann das Integral nach Gleichung (19) mittels Monte Carlo Methoden berechnet werden. Siehe Literaturstelle [4] bzgl. Einzelheiten und geeigneter Numerik.

Bei Benutzung des Monte Carlo Ansatzes wird die Nachweisgrenze $y^\#$ durch Iteration in Form einer Nullstellensuche, die mittels Bisektionsverfahren, der *regula falsi* oder Interpolation erfolgen kann, berechnet. Für jeden Iterationsschritt müssen neue PDFs $f_{X_1}(\tilde{x}_1 \mid a', x_1)$ mit modifizierten Werten x_1 der Bruttoeingangsgröße X_1 erstellt werden. Dann werden $i = 1, \dots, n_M$ neue Monte Carlo Versuche durchgeführt, indem Sätze $x_{1,i}, \dots, x_{n,i}$ von den PDFs $f_{X_1}(\tilde{x}_1 \mid a', x_1), f_{X_i}(\tilde{x}_i \mid a'), i = 2, \dots, n$ gezogen werden. Für jeden dieser Sätze berechnet man wieder $y_i = G(x_{1,i}, \dots, x_{n,i})$. Der neue Vektor $\tilde{y}_M(a') = \{y_1, \dots, y_{n_M}\}$ aufsteigend geordnet ist eine diskrete Darstellung der Verteilungsfunktion $F_Y(\tilde{y} \mid a', x_1) = \int_{-\infty}^{\tilde{y}} f_Y(\eta \mid a', x_1) d\eta$ von Y erhalten. Durch Iteration sucht man die Funktion $F_Y(\tilde{y} \mid a', x_1) = \int_{-\infty}^{\tilde{y}} f_Y(\eta \mid a', x_1) d\eta$ mit $E(f_Y(\tilde{y} \mid a', x_1)) = 0$. Von den jeweiligen $\tilde{y}_M(a') = \{y_1, \dots, y_{n_M}\}$ der PDF berechnet man die Wahrscheinlichkeit $P(y_i < y^*) = k / n_M$, indem man den größten Index k mit $y_k < y^*$ sucht. Dies Verfahren wird wiederholt, bis die Bedingung $P(y_i < y^*) - \beta = 0$ erfüllt ist und man einen Vektor $\tilde{y}_M(a') = \{y_1, \dots, y_{n_M}\}$ erhält, der diese Bedingung erfüllt. Der arithmetische Mittelwert der Elemente des Vektors $\tilde{y}_M(a') = \{y_1, \dots, y_{n_M}\}$ ist die Nachweisgrenze $y^\#$.

8.4 Beurteilungen

Das ermittelte primäre Messergebnis y für die Messgröße ist mit der Erkennungsgrenze y^* zu vergleichen. Ist $y > y^*$, so gilt der durch die Messgröße quantifizierte physikalische Effekt als vorliegend erkannt. Andernfalls wird entschieden, dass der Effekt nicht vorliegt. In diesem Fall werden die Festlegungen in den Abschnitten 9 und 10 übergangen.

Die Entscheidung, ob ein anzuwendendes Messverfahren gestellten Anforderungen bezüglich des Nachweises des durch die Messgröße quantifizierten physikalischen Effektes genügt, wird durch Vergleich der Nachweisgrenze $y^\#$ mit dem vorgegebenen Richtwert y_r getroffen. Ist $y^\# > y_r$, so ist das Messverfahren für den vorgesehenen Messzweck hinsichtlich der Anforderungen nicht geeignet.

Um im Fall $y^\# > y_r$ Abhilfe zu schaffen, kann es oftmals genügen, im Messverfahren größere Messdauern bzw. Impulsanzahlen vorzuwählen, wodurch die Nachweisgrenze verkleinert wird.

9 Grenzen des Überdeckungsintervalls

9.1 Allgemeines

Die Grenzen des Überdeckungsintervalls sind zu einem nach 8.2 erkannten physikalischen Effekt so angegeben, dass das Überdeckungsintervall den wahren Wert der Messgröße mit der vorzugebenden Wahrscheinlichkeit $1-\gamma$ enthält (siehe 8.1). Die Grenzen des Überdeckungsintervalls berücksichtigen, dass die Messgröße nicht-negativ ist.

Es gibt keine eindeutige Definition des Überdeckungsintervalls, wenn nur die Festlegung $1-\gamma$ gegeben ist. Weitere Bedingungen sind erforderlich, die u.a. zu den Definitionen des probabilistisch symmetrischen Überdeckungsintervalls und des kürzesten Überdeckungsintervall führen. Diese Norm stellt Gleichungen zur Berechnung der Grenzen beider Arten des Überdeckungsintervalls zur Verfügung.

Wenn die Information, dass die Messgröße nicht-negativ ist, berücksichtigt wird, ist die posterior Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion gegeben durch:

$$f_Y(\tilde{y} | a, Y \geq 0) = \frac{1}{I_0} \cdot f_Y(\tilde{y} | a) \cdot H(\tilde{y}) \quad (20)$$

mit

$$I_0 = \int_0^{+\infty} f_Y(\eta | a) d\eta \quad (21)$$

und mit der Normalisierungskonstante $c = 1/I_0$.

9.2 Der probabilistisch symmetrische Überdeckungsintervall

Das probabilistisch symmetrische Überdeckungsintervall (Bild B.2) enthält für ein primäres Messergebnis y , das die Erkennungsgrenze y^* übersteigt, den wahren Wert der Messgröße mit der Wahrscheinlichkeit $1-\gamma$. Es wird durch die untere und obere Grenze $y^{\triangleleft}$ bzw. $y^{\triangleright}$ des probabilistisch symmetrischen Überdeckungsintervalls begrenzt, die als $(1-\gamma/2)$ -Quantile der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_Y(\tilde{y} | a)$ für den wahren Wert festgelegt sind gegeben das primäre Messergebnis und die Prior Information, dass die Messgröße nicht-negativ ist. Sie werden als unteres und oberes $\gamma/2$ Quantil der posterior PDF berechnet, die berücksichtigt, dass die Messgröße nicht-negativ ist; Gleichung (20):

$$\frac{1}{I_0} \cdot \int_{-\infty}^{y^{\triangleleft}} f_Y(\eta | a) \cdot H(\eta) d\eta = \gamma/2 \quad (22)$$

$$\frac{1}{I_0} \cdot \int_{y^{\triangleright}}^{\infty} f_Y(\eta | a) \cdot H(\eta) d\eta = \gamma/2 \quad (23)$$

mit I_0 nach Gleichung (21).

Wenn die Unsicherheiten nach dem GUM Supplement 1 ausgewertet werden, sind die Quantile der Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_Y(\tilde{y} | a)$ gemäß Gleichung (16) und (17) mittels Monte Carlo Berechnungen zu bestimmen. Siehe Literaturstelle [4] bzgl. Einzelheiten und geeigneter Numerik.

Bei Benutzung des Monte Carlo Ansatzes werden die Grenzen des probabilistisch symmetrischen Überdeckungsintervalls $y^{\triangleleft}$ und $y^{\triangleright}$ als $q_{\gamma/2}$ und $q_{1-\gamma/2}$ Quantile der PDF $f_Y(\tilde{y} | a)$ in der Darstellung des

Vektors $\vec{y}_M = \{y_1, \dots, y_{n_M}\}$ bestimmt, wobei berücksichtigt wird, dass die Messgröße nicht-negativ ist. Diese Quantile können leicht mit Hilfe des Vektors $\vec{y}_M = \{y_1, \dots, y_{n_M}\}$ berechnet werden, indem man die Werte $y_{k_1} = y^<$ und $y_{k_2} = y^>$ sucht unter den Bedingungen $y_i \geq 0$, $k_1/n_{M,1} = \gamma/2$ und $k_2/n_{M,1} = 1 - \gamma/2$; $n_{M,1}$ ist die Anzahl der $y_i \geq 0$.

Wenn die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_Y(\tilde{y} | a)$ explizit verfügbar ist, können die Quantile nach Gleichung (20) auch mit anderen geeigneten mathematischen Methoden ermittelt werden.

9.3 Der kürzeste Überdeckungsintervall

Der kürzeste Überdeckungsintervall $[y^<, y^>]$ (Bild B.2) enthält für eine primäres Messergebnis y , das die Erkennungsgrenze y^* übersteigt, den wahren Wert der Messgröße mit der Wahrscheinlichkeit $1 - \gamma$. Es wird durch die untere und obere Grenze des kürzesten Überdeckungsintervalls, $y^<$ und $y^>$ der posterior PDF begrenzt, die berücksichtigt, dass die Messgröße nicht-negativ ist; Gleichung (20):

$$\frac{1}{I_0} \cdot \int_{y^<}^{y^>} f_Y(\eta | a) \cdot H(\eta) d\eta = 1 - \gamma \quad \text{mit} \quad y^> - y^< = \min \quad (24)$$

Bei Benutzung des Monte Carlo Ansatzes werden die Grenzen des kürzesten Überdeckungsintervalls $y^<$ und $y^>$ als q_{p1} und q_{p2} Quantile der PDF $f_Y(\tilde{y} | a)$ in der Darstellung des Vektors $\vec{y}_M = \{y_1, \dots, y_{n_M}\}$ unter den Bedingungen $y_i \geq 0$, $p_1 + p_2 = 1 - \gamma$ und $|q_{p1} - q_{p2}| = \min$ berechnet. Diese Quantile können durch Iteration aus dem Vektor $\vec{y}_M = \{y_1, \dots, y_{n_M}\}$ mit den vorgenannten Bedingungen berechnet werden.

10 Bester Schätzwert und die ihm zugeordnete Standardunsicherheit

Das bestimmte primäre Messergebnis y der Messgröße muss mit der Erkennungsgrenze y^* verglichen werden. Wenn $y > y^*$ ist, wird der quantifizierte physikalische Effekt als vorhanden angesehen. Andernfalls wird entschieden, dass der Effekt nicht vorliegt.

Ist $y \geq y^*$, ergeben sich der beste Schätzwert $\hat{y}$ der Messgröße und die ihm zugeordnete Standardunsicherheit $u(\hat{y})$ als:

$$\hat{y} = E \left(\frac{1}{I_0} \cdot f_Y(\tilde{y} | a) \cdot H(\hat{y}) \right) = \frac{1}{I_0} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \eta \cdot f_Y(\eta | a) \cdot H(\eta) d\eta \quad (25)$$

$$u^2(\hat{y}) = \text{Var} \left(\frac{1}{I_0} \cdot f_Y(\tilde{y} | a) \cdot H(\hat{y}) \right) = \frac{1}{I_0} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (\eta - \hat{y})^2 \cdot f_Y(\eta | a) \cdot H(\eta) d\eta \quad (26)$$

Wenn die Unsicherheiten nach dem GUM Supplement 1 ausgewertet werden, sind der beste Schätzwert und die ihm zugeordnete Standardunsicherheit mittels Monte Carlo Berechnungen zu ermitteln, indem die Integrale der Gleichungen (25) und (26) explizit berechnet werden.

Wenn die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion $f_Y(\tilde{y} | a)$ explizit verfügbar ist, können die Integrale der Gleichungen (25) und (26) auch mit anderen geeigneten mathematischen Methoden ermittelt werden.

ANMERKUNG 1 Der beste Schätzwert und die ihm zugeordnete Standardunsicherheit sind unabhängig vom gewählten Überdeckungsintervall.

ANMERKUNG 2 Wenn der beste Schätzwert $\hat{y}$ und die ihm zugeordnete Standardunsicherheit $u(\hat{y})$ berechnet werden, kann auf die Dokumentation des primären Messergebnisses y und der ihm zugeordneten Standardunsicherheit $u(y)$ verzichtet werden.

Bei Benutzung des Monte Carlo Ansatzes werden der beste Schätzwert und die ihm zugeordnete Standardunsicherheit, wie bei der Berechnung der Grenzen des Überdeckungsintervalls, mittels der

ursprünglichen Satzes $\bar{y}_M = \{y_1, \dots, y_{n_M}\}$ zur Darstellung der Verteilungsfunktion $F_Y(\hat{y} | a) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_Y(\eta | a) d\eta$

nach [Abschnitt 6.4](#) berechnet, wobei berücksichtigt wird, dass die Messgröße nicht-negativ ist. Der beste Schätzwert und die ihm zugeordnete Standardunsicherheit werden als arithmetischer Mittelwert bzw. als Standardabweichung der Elemente $y_i \geq 0$ berechnet.

11 Prüfbericht

Der Inhalt des Prüfberichts hängt ab von der jeweiligen Anwendung und den Anforderungen des Auftraggebers oder der Behörde. Unabhängig davon muss die Information erhalten bleiben, um die Daten des Prüfberichts rechtfertigen und die Nachprüfbarkeit garantieren zu können. Das erfordert folgende Angaben:

- a) Hinweis auf die Ermittlung nach der vorliegenden Norm, z. B. DIN ISO 11929-1:2;
- b) betrachteter physikalischer Effekt, Messgröße und Modell der Auswertung;
- c) Wahrscheinlichkeiten α und β für falsch positive und falsch negative Entscheidungen und ggf. Richtwert y_T ;
- d) primäres Messergebnis y und y zugeordnete Standardunsicherheit $u(y)$;
- e) Erkennungsgrenze y^* ;
- f) Nachweisgrenze $y^\#$;
- g) ggf. Feststellung, ob das Messverfahren für den vorgesehenen Messzweck geeignet ist oder nicht;
- h) Feststellung, ob der physikalische Effekt erkannt ist oder nicht;

ANMERKUNG 1 Wenn der physikalische Effekt als nicht vorliegend festgestellt wird, d. h. wenn $y < y^*$, verlangen Behörden gelegentlich, dass anstelle des Messergebnisses y der Hinweis „($< y^\#$)“ dokumentiert wird. Solche Dokumentation kann sinnvoll sein, wenn der Vergleich mit dem Richtwert zeigt, dass das Messverfahren für den vorgesehenen Messzweck geeignet ist.

- i) falls der physikalische Effekt erkannt wurde, außerdem die untere Grenze des probabilistisch symmetrischen Überdeckungsintervalls $y^<$ und die obere Grenze des probabilistisch symmetrischen Überdeckungsintervalls $y^>$ zur Überdeckungswahrscheinlichkeit $1-\gamma$, der bester Schätzwert $\hat{y}$ der Messgröße und die $\hat{y}$ zugeordnete Standardunsicherheit $u(\hat{y})$.

ANMERKUNG 2 Alternativ können die untere Grenze des kürzesten Überdeckungsintervalls $y^<$, und die obere Grenze des kürzesten Überdeckungsintervalls $y^>$ zur Überdeckungswahrscheinlichkeit $1-\gamma$, der beste Schätzwert $\hat{y}$ der Messgröße und die $\hat{y}$ zugeordnete Standardunsicherheit $u(\hat{y})$ dokumentiert werden.