

DIN ISO 9276-2

ICS 19.120

Einsprüche bis 2018-02-15
Vorgesehen als Ersatz für
DIN ISO 9276-2:2006-02

Entwurf

**Darstellung der Ergebnisse von Partikelgrößenanalysen –
Teil 2: Berechnung von mittleren Partikelgrößen/-durchmessern und
Momenten aus Partikelgrößenverteilungen (ISO 9276-2:2014);
Text Deutsch und Englisch**

Representation of results of particle size analysis –
Part 2: Calculation of average particle sizes/diameters and moments from particle size
distributions (ISO 9276-2:2014);
Text in German and English

Représentation de données obtenues par analyse granulométrique –
Partie 2: Calcul des tailles/diamètres moyens des particules et des moments à partir de
distributions granulométriques (ISO 9276-2:2014);
Texte en allemand et anglais

Anwendungswarnvermerk

Dieser Norm-Entwurf mit Erscheinungsdatum 2017-12-15 wird der Öffentlichkeit zur Prüfung und
Stellungnahme vorgelegt.

Weil die beabsichtigte Norm von der vorliegenden Fassung abweichen kann, ist die Anwendung dieses Entwurfs
besonders zu vereinbaren.

Stellungnahmen werden erbeten

- vorzugsweise online im Norm-Entwurfs-Portal von DIN unter www.din.de/go/entwuerfe bzw. für Norm-
Entwürfe der DKE auch im Norm-Entwurfs-Portal der DKE unter www.entwuerfe.normenbibliothek.de,
sofern dort wiedergegeben;
- oder als Datei per E-Mail an nabau@din.de möglichst in Form einer Tabelle. Die Vorlage dieser Tabelle kann
im Internet unter www.din.de/go/stellungnahmen-norm-entwuerfe oder für Stellungnahmen zu Norm-
Entwürfen der DKE unter www.dke.de/stellungnahme abgerufen werden;
- oder in Papierform an den DIN-Normenausschuss Bauwesen (NABau), 10772 Berlin, Burggrafenstr. 6,
10787 Berlin.

Die Empfänger dieses Norm-Entwurfs werden gebeten, mit ihren Kommentaren jegliche relevanten
Patentrechte, die sie kennen, mitzuteilen und unterstützende Dokumentationen zur Verfügung zu stellen.

Gesamtumfang 65 Seiten

DIN-Normenausschuss Bauwesen (NABau)

Inhalt

	Seite
Nationales Vorwort.....	4
Nationaler Anhang NA (informativ) Literaturhinweise	4
Vorwort	5
Einleitung	6
1 Anwendungsbereich.....	7
2 Normative Verweisungen	7
3 Symbole und Abkürzungen.....	8
4 Die Moment-Notation.....	9
4.1 Definition von Momenten nach der Moment-Notation.....	9
4.2 Definition von mittleren Partikelgrößen nach der Moment-Notation	10
4.2.1 Terminologie für mittlere Partikelgrößen in der Moment-Notation x_k, r	11
4.2.2 Arithmetische mittlere Partikelgrößen	11
4.2.3 Gewichtete mittlere Partikelgröße	11
4.2.4 Geometrische mittlere Partikelgrößen	12
4.2.5 Harmonische mittlere Partikelgrößen	13
4.3 Berechnung von Momenten und mittleren Partikelgrößen aus einer gegebenen Größenverteilung	13
4.3.1 Die Berechnung von $M_{k,r}$ und der mittleren Partikelgrößen aus einer anzahl- oder volumenbasierten Größenverteilung	13
4.3.2 Berechnung von $M_{k,r}$ aus einer Partikelgrößenverteilung, angegeben als ein Histogramm	14
4.4 Varianz und Standardabweichung einer Partikelgrößenverteilung.....	15
4.5 Berechnung von Momenten und mittleren Partikelgrößen aus einer logarithmischen Normalverteilung	16
4.6 Berechnung der volumenspezifischen Oberfläche und des mittleren Sauterdurchmessers.....	17
5 Die Momentenverhältnis-Notation	17
5.1 Definition von Momenten nach der Momentenverhältnis-Notation	17
5.2 Definition von mittleren Partikelgrößen nach der Momentenverhältnis-Notation.....	18
5.2.1 Terminologie für mittlere Partikelgrößen in der Momentenverhältnis-Notation Dp, q	18
5.2.2 Geometrische mittlere Partikelgrößen	19
5.2.3 Harmonische mittlere Partikelgrößen	19
5.3 Berechnung von mittleren Partikelgrößen aus einer gegebenen Größenverteilung	20
5.4 Varianz und Standardabweichung einer Partikelgrößenverteilung.....	20
5.5 Zusammenhang zwischen mittleren Partikelgrößen.....	22
5.6 Berechnung der volumenspezifischen Oberfläche und des mittleren Sauterdurchmessers.....	23
6 Zusammenhang zwischen Moment-Notation und Momentenverhältnis-Notation.....	23
7 Genauigkeit der berechneten Parameter der Partikelgrößenverteilung	25
Anhang A (informativ) Zahlenbeispiel für die Berechnung von mittleren Partikelgrößen und der Standardabweichung aus einem Histogramm einer volumenbasierten Größenverteilung	26

Anhang B (informativ) Zahlenbeispiel für die Berechnung von mittleren Partikelgrößen und der Standardabweichung aus einem Histogramm einer volumenbasierten Größenverteilung	29
Anhang C (informativ) Genauigkeit der berechneten Parameter der Partikelgrößenverteilung	32
Literaturhinweise.....	34

Nationales Vorwort

Dieses Dokument enthält die deutsche Übersetzung der Internationalen Norm ISO 9276-2:2014 „Representation of results of particle size analysis — Part 2: Calculation of average particle sizes/diameters and moments from particle size distributions“, die vom Technischen Komitee ISO/TC 24 „Particle characterization including sieving“, Unterkomitee SC 4 „Particle characterization“, dessen Sekretariat von DIN (Deutschland) gehalten wird, erarbeitet wurde.

Das zuständige nationale Normungsgremium ist der Arbeitsausschuss NA 005-11-42 AA „Partikelmesstechnik (SpA zu ISO/TC 24/SC 4)“ im DIN-Normenausschuss Bauwesen (NABau).

DIN ISO 9276 besteht mit dem Haupttitel *Darstellung der Ergebnisse von Partikelgrößenanalysen* aus den folgenden Teilen:

- Teil 1: *Grafische Darstellung*
- Teil 2: *Berechnung von mittleren Partikelgrößen/-durchmessern und Momenten aus Partikelgrößenverteilungen*
- Teil 4: *Charakterisierung eines Trennprozesses*
- Teil 6: *Deskriptive und quantitative Darstellung der Form und Morphologie von Partikeln*

Um Zweifelsfälle in der Übersetzung auszuschließen, ist die englische Originalfassung beigelegt. Die Nutzungsbedingungen für den deutschen Text des Norm-Entwurfes gelten gleichermaßen auch für den englischen Text.

Für die in diesem Dokument normativ zitierte Internationale Norm wird im Folgenden auf die entsprechende Deutsche Norm hingewiesen:

ISO 9276-1 siehe DIN ISO 9276-1

Änderungen

Gegenüber DIN ISO 9276-2:2006-02 wurden folgende Änderungen vorgenommen:

- a) das Dokument wurde umfangreich in allen Abschnitten technisch überarbeitet;
- b) das Dokument wurde redaktionell überarbeitet.

Nationaler Anhang NA (informativ)

Literaturhinweise

DIN ISO 9276-1, *Darstellung der Ergebnisse von Partikelgrößenanalysen — Teil 1: Grafische Darstellung*

Vorwort

Die ISO (Internationale Organisation für Normung) ist eine weltweite Vereinigung von nationalen Normungsorganisationen (ISO-Mitgliedsorganisationen). Die Erstellung von Internationalen Normen wird in der Regel von Technischen Komitees der ISO durchgeführt. Jede Mitgliedsorganisation, die Interesse an einem Thema hat, für das ein Technisches Komitee gegründet wurde, hat das Recht, in diesem Komitee vertreten zu sein. Internationale Organisationen, staatlich und nicht-staatlich, in Liaison mit der ISO, nehmen ebenfalls an der Arbeit teil. Die ISO arbeitet eng mit der Internationalen Elektrotechnischen Kommission (IEC) bei allen elektrotechnischen Themen zusammen.

Die Verfahren, die bei der Entwicklung dieses Dokuments angewendet wurden und die für die weitere Pflege vorgesehen sind, sind in den ISO/IEC-Direktiven, Teil 1, beschrieben. Im Besonderen sollten die für die verschiedenen ISO-Dokumentenarten notwendigen Annahmekriterien beachtet werden. Dieses Dokument wurde in Übereinstimmung mit den Gestaltungsregeln der ISO/IEC-Direktiven, Teil 2, erarbeitet (siehe www.iso.org/directives).

Es wird auf die Möglichkeit hingewiesen, dass einige Elemente dieses Dokuments Patentrechte berühren können. Die ISO ist nicht dafür verantwortlich, einige oder alle diesbezüglichen Patentrechte zu identifizieren. Details zu allen während der Entwicklung des Dokuments identifizierten Patentrechten finden sich in der Einleitung und/oder in der ISO-Liste der eingegangenen Patenterklärungen (siehe www.iso.org/patents).

Jeglicher in diesem Dokument verwendete Handelsname ist als Information zum Nutzen der Anwender angegeben und stellt keine Anerkennung dar.

Eine Erläuterung der Bedeutung ISO-spezifischer Benennungen und Ausdrücke, die sich auf die Konformitätsbewertung beziehen, sowie Informationen über die Beachtung der WTO-Grundsätze zu technischen Handelshemmnissen (TBT, en: Technical Barriers to Trade) durch die ISO enthält der folgende Link: Foreword - Supplementary Information.

Das für dieses Dokument zuständige Komitee ist ISO/TC 24, *Particle characterization including sieving*, Unterkomitee SC 4, *Particle characterization*.

Diese zweite Ausgabe ersetzt die erste Ausgabe (ISO 9276-2:2001), die technisch überarbeitet wurde.

ISO 9276 besteht aus folgenden Teilen unter dem Haupttitel *Representation of results of particle size analysis*:

- *Teil 1: Graphical representation*
- *Teil 2: Calculation of average particle sizes/diameters and moments from particle size distributions*
- *Teil 3: Adjustment of an experimental curve to a reference model*
- *Teil 4: Characterization of a classification process*
- *Teil 5: Methods of calculation relating to particle size analyses using logarithmic normal probability distribution*
- *Teil 6: Descriptive and quantitative representation of particle shape and morphology*

Einleitung

Partikelgrößenanalysen werden häufig zur Charakterisierung von Partikeln eingesetzt. Der Zusammenhang zwischen den physikalischen Eigenschaften der Partikel, wie Pulverfestigkeit, Fließfähigkeit, Auflösungsgeschwindigkeit, Emulsionsbeständigkeit/Suspensionsstabilität und Partikelgrößen, ist immer Grund für eine solche Charakterisierung. Bei Materialien mit einer Partikelgrößenverteilung ist es wichtig, den entsprechenden Parameter, eine bestimmte mittlere Partikelgröße, gewichtet nach zum Beispiel Anzahl, Fläche oder Volumen, im Zusammenhang mit den physikalischen Eigenschaften zu verwenden.

Dieser Teil von ISO 9276 beschreibt zwei Verfahren zur Verwendung von Momenten für die Berechnung von mittlerer Größe, Streuung und anderer statistischer Messgrößen einer Partikelgrößenverteilung.

Die erste Methode wird als Moment-Notation bezeichnet. Der konkrete Nutzen der Moment-Notation ist die Charakterisierung der Größenverteilungen nach Momenten und mittleren Größen. Die Moment-Notation nimmt Bezug auf Gewichtungssätze aus der Physik, insbesondere dem Maschinenbau, und umfasst arithmetische Mittelwerte aus anzahlbasierten Verteilungen nur als einen Teil^{[1][2]}.

Die zweite Methode wird als Momentenverhältnis-Notation (Moment-Ratio-Notation) bezeichnet. Die Momentenverhältnis-Notation basiert auf einem Ansatz mit Anzahlstatistik und Häufigkeiten, umfasst aber auch die Umrechnung in andere Arten von Mengen^{[3][4]}.

Wichtig ist, dass sich die Bedeutung der Indizes von bei der Moment-Notation definierten mittleren Größen von den Indizes von bei der Momentenverhältnis-Notation definierten mittleren Größen unterscheidet. Beide Notationen sind durch eine einfache Beziehung miteinander verbunden, die in Abschnitt 6 beschrieben wird.

Beide Notationen sind geeignet für die Ableitung und/oder Auswahl mittlerer Größen in Zusammenhang mit physikalischen Produkt- und Prozesseigenschaften für sogenannte Eigenschaftsfunktionen und Prozessfunktionen. Die Art der zu bevorzugenden mittleren Größe sollte einen kausalen Zusammenhang mit der entsprechenden physikalischen Produkt- oder Prozesseigenschaft haben.

Die Gemeinschaft für Partikelcharakterisierung umfasst ein weites Spektrum an Wissenschaftsdisziplinen. Die Notation der eingesetzten Größenverteilung wurde durch den Industriezweig und die Anwendung beeinflusst und daher wird keine einzelne Notation allgemein bevorzugt.

Es gibt einige partikelgrößenabhängige Eigenschaften, wie Lichtstreuung in bestimmten Partikelgrößenbereichen, die nicht durch Partikelgrößen charakterisiert werden können, welche aus einfachen Potenzansätzen der Notationssysteme abgeleitet wurden^[5].

1 Anwendungsbereich

Dieser Teil von ISO 9276 enthält relevante Gleichungen und einheitliche Nomenklaturen für die Berechnung von Momenten, mittleren Partikelgrößen und Standardabweichungen aus einer vorgegebenen Partikelgrößenverteilung. Es werden zwei übliche Notationssysteme beschrieben. Eins ist die Momentenmethode, während das zweite die Momentenverhältnismethode beschreibt. Die Größenverteilung kann als Histogramm oder als eine analytische Funktion verfügbar sein.

Der Äquivalentdurchmesser eines Partikels mit einer beliebigen Form wird als Größe dieses Partikels genommen. Partikelformfaktoren werden nicht berücksichtigt. Es ist von äußerster Wichtigkeit, dass das Messverfahren angesichts der Abhängigkeit der Größenbestimmungsergebnisse des Messprinzips im Bericht angegeben wird. Gemessene Partikelproben sollen repräsentativ für die Grundgesamtheit von Partikeln sein.

Für beide Notationssysteme werden Zahlenbeispiele für die Berechnung der mittleren Partikelgrößen und der Standardabweichung aus Histogrammdaten in einem Anhang dargestellt.

Die Genauigkeit der mittleren Partikelgröße darf verringert werden, wenn eine unvollständige Verteilung bewertet wird. Die Genauigkeit darf auch verringert werden, wenn eine sehr eingeschränkte Anzahl von Größenklassen eingesetzt wird.

2 Normative Verweisungen

Die folgenden Dokumente, die in diesem Dokument teilweise oder als Ganzes zitiert werden, sind für die Anwendung dieses Dokuments erforderlich. Bei datierten Verweisungen gilt nur die in Bezug genommene Ausgabe. Bei undatierten Verweisungen gilt die letzte Ausgabe des in Bezug genommenen Dokuments (einschließlich aller Änderungen).

ISO 9276-1:1998, *Representation of results of particle size analysis — Part 1: Graphical representation*

ISO 9276-5:2005, *Representation of results of particle size analysis — Part 5: Methods of calculation relating to particle size analyses using logarithmic normal probability distribution*

3 Symbole und Abkürzungen

Falls erforderlich, werden verschiedene Symbole für die Moment-Notation (M) und die Momentenverhältnis-Notation (MV) angegeben. Dies dient zum Zweck einer deutlichen Unterscheidung zwischen den beiden Systemen. Für beide Notationssysteme wurde in die entsprechenden Abschnitte die Terminologie spezifischer mittlerer Partikelgrößen eingefügt: Abschnitt 4 bzw. Abschnitt 5.

M-Notation	MV-Notation	Beschreibung
i	i	Anzahl der Größenklassen mit oberer Partikelgröße $x_i(M)$ oder Partikelgrößenmittelwert $D_i(M-R)$
k		Potenz von x
m	m	Anzahl der Größenklassen
r	r	Mengenart einer Verteilung (allgemeine Beschreibung) $r = 0$, Mengenart: Anzahl $r = 1$, Mengenart: Länge $r = 2$, Mengenart: Oberfläche oder Projektionsfläche $r = 3$, Mengenart: Volumen oder Masse
$M_{k,r}$		vollständiges k -tes Moment einer Probenverteilung $q_r(x)$
$m_{k,r}$		vollständiges k -tes zentrales Moment einer Probenverteilung $q_r(x)$
	M_p	p -tes Moment einer Anzahlverteilungsdichte
	m_p	p -tes zentrales Moment einer Anzahlverteilungsdichte
	N	Gesamtanzahl der Partikel in einer Probe
	O	Ordnung einer mittleren Partikelgröße ($O = p + q$)
	p, q	Potenzen von D in Momenten oder Indizes, die das gleiche angeben
$q_r(x)$	$q_r(D)$	Verteilungsdichte der Art der Partikelmenge r
$\bar{q}_{r,i}$		mittlere Höhe einer Verteilungsdichte im i -ten Partikelgrößenintervall Δx_i
$Q_r(x)$	$Q_r(D)$	Summenverteilung der Mengenart r
$\Delta Q_{r,i}$		Differenz zwischen zwei Werten der Summenverteilung, d. h. relativer Betrag im i -ten Partikelgrößenintervall Δx_i
s_r	s_r	Standardabweichung einer Verteilung $q_r(x)$ und $q_r(D)$
s_g	s_g	geometrische Standardabweichung einer Verteilung
s	s	Standardabweichung einer logarithmischen Normalverteilung ($s = \ln s_g$)
S	S	Oberfläche
S_V	S_V	volumenspezifische Oberfläche
V	V	Partikelvolumen
$\bar{V}$		mittleres Partikelvolumen
x	D	Partikelgröße, Durchmesser einer äquivalenten Kugel

M-Notation	MV-Notation	Beschreibung
x_i		obere Partikelgröße des i -ten Partikelgrößenintervalls
x_{i-1}		untere Partikelgröße des i -ten Partikelgrößenintervalls
	D_i	Größenmittelwert der i -ten Größenklasse
$x_{\min}$		Partikelgröße, unterhalb der es keine Partikel mit einer gegebenen Größenverteilung gibt
$x_{\max}$		Partikelgröße, oberhalb der es keine Partikel mit einer gegebenen Größenverteilung gibt
$\bar{x}_{k,r}$	$\bar{D}_{p,q}$	mittlere Partikelgröße (allgemeine Beschreibung)
	$\bar{D}_{p,p}$	geometrische mittlere Partikelgrößen
$\bar{x}_{k,0}$		arithmetische mittlere Partikelgröße
$\bar{x}_{k,r}$		gewichtete mittlere Partikelgröße
$\bar{x}_{\text{geo},r}$		geometrische mittlere Partikelgröße
$\bar{x}_{\text{har},r}$		harmonische mittlere Partikelgröße
$x_{50,3}$		Median-Partikelgröße einer Volumensummenverteilung
$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$		Breite des i -ten Partikelgrößenintervalls

4 Die Moment-Notation

Momente sind die Grundlage zur Bestimmung von mittleren Größen und Standardabweichungen von Partikelgrößenverteilungen. Eine Stichprobe mit einer begrenzten Anzahl an Partikeln aus einer großen *Grundgesamtheit* von Partikelgrößen wird zur Schätzung der Momente der Größenverteilung dieser Grundgesamtheit verwendet. Die Schätzung befasst sich mit dem Rückschluss von den Zahlenwerten der Probe auf die Zahlenwerte der unbekannten Grundgesamtheit. Partikelgrößenmessungen erfolgen immer mit diskreten Proben und umfassen eine Reihe an diskreten Größenklassen. Aus diesem Grund werden in diesem Teil von ISO 9276 nur auf Proben bezogene Momente behandelt.

4.1 Definition von Momenten nach der Moment-Notation

Das vollständige k -te Moment einer Verteilungsdichte^[1] wird durch Integrale nach Gleichung (1) dargestellt. M steht für das Moment. Der erste Index, k , von M gibt die Potenz der Partikelgröße x an, der zweite Index, r , von M beschreibt die Mengenart der Verteilungsdichte.

$$M_{k,r} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^k q_r(x) dx \quad (1)$$

Wenn $r = 0$, stellt $q_0(x)$ eine Anzahlverteilungsdichte dar, wenn $r = 3$, stellt $q_3(x)$ eine Volumen- oder Massenverteilungsdichte dar.

Gleichung (1) beschreibt ein *vollständiges Moment*, wenn die Integralgrenzen durch die minimale Partikelgröße ($x_{\min}$) und die maximale Partikelgröße ($x_{\max}$) dargestellt werden.

Ein besonderes vollständiges Moment wird durch $M_{0,r}$ dargestellt:

$$M_{0,r} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^0 q_r(x) dx = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} q_r(x) dx = Q_r(x_{\max}) - Q_r(x_{\min}) = 1 \quad (2)$$

Dabei ist

$$Q_r(x_i) = \int_{x_{\min}}^{x_i} q_r(x) dx \quad (3)$$

Ein Moment ist *unvollständig*, wenn die Integration zwischen zwei beliebigen Partikeldurchmessern x_{i-1} und x_i innerhalb des gegebenen Größenbereichs einer Verteilung erfolgt:

$$x_{\min} < x_{i-1} < x < x_i < x_{\max}$$

$$M_{k,r}(x_{i-1}, x_i) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} x^k q_r(x) dx \quad (4)$$

Neben den auf den Ursprung der Partikelgrößenachse bezogenen und in den Gleichungen (1) und (4) gezeigten Momenten kann das sogenannte *k-te zentrale Moment* einer Verteilungsdichte $q_r(x)$, $m_{k,r}$, von einer gegebenen Verteilungsdichte abgeleitet werden. Es hängt zusammen mit der gewichteten mittleren Partikelgröße $\bar{x}_{k,r}$ [siehe Gleichung (11)].

Das *vollständige k-te zentrale Moment* ist definiert als:

$$m_{k,r} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x - \bar{x}_{1,r})^k q_r(x) dx \quad (5)$$

4.2 Definition von mittleren Partikelgrößen nach der Moment-Notation

Alle *mittleren Partikelgrößen* werden durch Gleichung (6) definiert:

$$\bar{x}_{k,r} = \sqrt[k]{M_{k,r}} \quad (6)$$

Abhängig von den gewählten Anzahlen für die Indizes k und r können verschiedene mittlere Partikelgrößen definiert sein. Da die über Gleichung (6) ermittelten mittleren Partikelgrößen erheblich voneinander abweichen können, sollten die Indizes k und r immer angegeben werden.

Es gibt zwei Gruppen von mittleren Partikelgrößen, die bevorzugt verwendet werden sollten, und zwar arithmetische mittlere Partikelgrößen und gewichtete mittlere Partikelgrößen.

4.2.1 Terminologie für mittlere Partikelgrößen in der Moment-Notation $\bar{x}_{k,r}$

In Tabelle 1 sind Terminologiebeispiele für mittlere Größen aufgeführt.

Tabelle 1 — Terminologie für mittlere Partikelgrößen $\bar{x}_{k,r}$

Systematischer Code	Terminologie
$\bar{x}_{1,0}$	arithmetische mittlere Größe
$\bar{x}_{2,0}$	arithmetische mittlere Flächengröße
$\bar{x}_{3,0}$	arithmetische mittlere Volumengröße
$\bar{x}_{1,1}$	größengewichtete mittlere Größe
$\bar{x}_{1,2}$	flächengewichtete mittlere Größe, mittlerer Sauterdurchmesser
$\bar{x}_{1,3}$	volumengewichtete mittlere Größe

4.2.2 Arithmetische mittlere Partikelgrößen

Die arithmetische mittlere Größe ist eine anzahlgewichtete mittlere Größe, die aus einer Anzahlverteilungsdichte $q_0(x)$ berechnet wird:

$$\bar{x}_{k,0} = \sqrt[k]{M_{k,0}} \quad (7)$$

Das Zählen einzelner Partikel auf einer Mikroskopaufnahme ist ein typisches Beispiel zur Ermittlung der Anzahlanteile ($r = 0$) als Grundlage der Mittelwertbildung.

In Übereinstimmung mit Referenzdokument [2] sind Folgende die empfohlenen mittleren Partikelgrößen:

arithmetische mittlere Größe (entspricht der arithmetischen mittleren längengewichteten Größe):

$$\bar{x}_{1,0} = M_{1,0} \quad (8)$$

arithmetische mittlere Flächengröße (Heywood^[2]: mittlerer Oberflächendurchmesser):

$$\bar{x}_{2,0} = \sqrt[2]{M_{2,0}} \quad (9)$$

arithmetische mittlere Volumengröße (Heywood^[2]: mittlerer gewichteter Durchmesser):

$$\bar{x}_{3,0} = \sqrt[3]{M_{3,0}} \quad (10)$$

4.2.3 Gewichtete mittlere Partikelgröße

Gewichtete mittlere Partikelgrößen werden definiert durch:

$$\bar{x}_{k,r} = \sqrt[k]{M_{k,r}} \quad (11)$$

Das Wägen von Sieben vor und nach dem Sieben ist ein typisches Beispiel zur Ermittlung der Massenanteile ($r = 3$) als Grundlage der Mittelwertbildung. Gewichtete mittlere Partikelgrößen werden auf der Abszisse des Schwerpunkts einer Verteilung $q_r(x)$ dargestellt. Die empfohlenen gewichteten mittleren Partikelgrößen werden durch die Gleichungen (12) bis (15) dargestellt.

Die gewichtete mittlere Partikelgröße einer Anzahlverteilungsdichte $q_0(x)$ ist äquivalent zu der arithmetischen mittleren längengewichteten Größe [siehe Gleichung (8)]. Sie wird dargestellt durch:

arithmetische mittlere Größe (Heywood^[6]: mittlerer numerischer Durchmesser):

$$\bar{x}_{1,0} = M_{1,0} \quad (12)$$

Die gewichtete mittlere Partikelgröße einer Längenverteilungsdichte $q_1(x)$ ist gegeben durch:

größengewichtete mittlere Größe (Heywood^[6]: mittlerer linearer Durchmesser):

$$\bar{x}_{1,1} = M_{1,1} \quad (13)$$

Die gewichtete mittlere Partikelgröße einer Flächenverteilungsdichte $q_2(x)$ ist gegeben durch:

flächengewichtete mittlere Größe (Heywood^[6]: mittlerer Oberflächendurchmesser):

$$\bar{x}_{1,2} = M_{1,2} \quad (14)$$

Die gewichtete mittlere Partikelgröße einer Volumenverteilungsdichte $q_3(x)$ ist gegeben durch:

volumengewichtete mittlere Größe (Heywood^[6]: mittlerer gewichteter Durchmesser):

$$\bar{x}_{1,3} = M_{1,3} \quad (15)$$

4.2.4 Geometrische mittlere Partikelgrößen

Wenn eine Partikelgrößenverteilung zufriedenstellend einer logarithmischen Größennormalverteilung (siehe ISO 9276-5) entspricht, charakterisiert die geometrische mittlere Partikelgröße den Mittelwert des Logarithmus von x . Der Median einer logarithmischen Normalverteilung hat den gleichen Wert wie die geometrische mittlere Größe.

Statt eines arithmetischen Mittelwerts, der aus der Summe von n Werten geteilt durch ihre Anzahl n berechnet wird, ist der geometrische Mittelwert die n -te Wurzel des Produkts von n Werten. In Form von Logarithmen wird der Logarithmus des geometrischen Mittelwerts aus der Summe der Logarithmen von n Werten geteilt durch ihre Anzahl n berechnet. Der arithmetische Mittelwert ist größer als der geometrische, und diese Ungleichheit nimmt zu, je größer die Dispersion unter den Werten ist.

Die mathematische Grenzwertanalyse aus Gleichung (6) mit k gegen Null (siehe auch Ableitung für $p = q$ in der Momentenverhältnis-Notation^[3]) führt zur geometrischen mittleren Größe:

$$\bar{x}_{0,r} = e^{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \ln x q_r(x) dx} = \bar{x}_{\text{geo},r} \quad (16)$$

oder in Form von Logarithmen:

$$\ln \bar{x}_{0,r} = \ln \bar{x}_{\text{geo},r} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \ln x q_r(x) dx \quad (17)$$

Basierend auf den Daten aus einem Histogramm ergibt sich die r -gewichtete geometrische mittlere Größe:

$$\bar{x}_{0,r} = \exp \left(\sum_{i=1}^m \ln \bar{x}_i \bar{q}_{r,i} \Delta x_i \right) = \exp \left(\sum_{i=1}^m \ln \bar{x}_i \Delta Q_{r,i} \right) = \bar{x}_{\text{geo},r} \quad (18)$$

4.2.5 Harmonische mittlere Partikelgrößen

Der harmonische Mittelwert einer Reihe von Werten ist der Kehrwert des arithmetischen Mittelwerts ihrer Kehrwerte^[7]. Der harmonische Mittelwert ist kleiner als der geometrische, und diese Ungleichheit nimmt zu, je größer die Dispersion unter den Werten ist. Aus diesem Grund kann die r -gewichtete harmonische mittlere Größe über folgende Gleichung berechnet werden:

$$\bar{x}_{har,r} = \frac{1}{\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{1}{x} q_r(x) dx} = \frac{1}{M_{-1,r}} \quad (19)$$

oder basierend auf den Daten aus einem Histogramm:

$$\bar{x}_{har,r} = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\bar{x}_i} \bar{q}_{r,i} \Delta x_i} = \frac{1}{\sum_{i=1}^m \frac{1}{\bar{x}_i} \Delta Q_{r,i}} \quad (20)$$

4.3 Berechnung von Momenten und mittleren Partikelgrößen aus einer gegebenen Größenverteilung

4.3.1 Die Berechnung von $M_{k,r}$ und der mittleren Partikelgrößen aus einer anzahl- oder volumenbasierten Größenverteilung

In vielen praktischen Anwendungsfällen werden die gemessenen Daten entweder durch eine Anzahlverteilungsdichte, $q_0(x)$, dargestellt oder durch eine Volumenverteilungsdichte, $q_3(x)$. Die oben beschriebene Berechnung der mittleren Partikelgrößen kann dann nach Gleichung (21)^[1] durchgeführt werden:

$$\bar{x}_{k,r} = \sqrt[k]{M_{k,r}} = \sqrt[k]{\frac{M_{k+r,0}}{M_{r,0}}} = \sqrt[k]{\frac{M_{k+r-3,3}}{M_{r-3,3}}} \quad (21)$$

Dies führt zu:

$$\bar{x}_{2,0} = \sqrt{M_{2,0}} = \sqrt{\frac{M_{-1,3}}{M_{-3,3}}} \quad (22)$$

$$\bar{x}_{3,0} = \sqrt[3]{M_{3,0}} = \sqrt[3]{\frac{1}{M_{-3,3}}} \quad (23)$$

$$\bar{x}_{1,1} = M_{1,1} = \frac{M_{2,0}}{M_{1,0}} = \frac{M_{-1,3}}{M_{-2,3}} \quad (24)$$

$$\bar{x}_{1,2} = M_{1,2} = \frac{M_{3,0}}{M_{2,0}} = \frac{1}{M_{-1,3}} \quad (25)$$

$$\bar{x}_{1,3} = M_{1,3} = \frac{M_{4,0}}{M_{3,0}} \quad (26)$$

Aus den Gleichungen (21) bis (26) lässt sich erkennen, dass die folgenden Momente erforderlich sind, wenn die oben definierten mittleren Partikelgrößen zu berechnen sind:

aus einer gegebenen Anzahlverteilungsdichte, $q_0(x)$: $M_{1,0}$; $M_{2,0}$; $M_{3,0}$; $M_{4,0}$

aus einer gegebenen Volumenverteilungsdichte, $q_3(x)$: $M_{1,3}$; $M_{-1,3}$; $M_{-2,3}$; $M_{-3,3}$

Gleichung (21) zeigt, dass jede mittlere Partikelgröße oder jedes Moment einer gegebenen Mengenart als Verhältnis zweier anzahlbasierter Momente ausgedrückt werden kann, das als Hauptansatz der Momentenverhältnis-Notation verwendet wird.

4.3.2 Berechnung von $M_{k,r}$ aus einer Partikelgrößenverteilung, angegeben als ein Histogramm

Wenn eine Verteilungsdichte als ein Histogramm angegeben ist, ist $q_r(x_{i-1}, x_i)$ im Partikelgrößenintervall $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ konstant.

Gleichung (1) kann daher wie folgt umformuliert werden:

$$M_{k,r} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^k q_r(x) dx = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i^k \bar{q}_{r,i} \Delta x_i \quad (27)$$

Es ergibt sich aus

$$\bar{q}_{r,i} = \frac{\Delta Q_{r,i}}{x_i - x_{i-1}} \quad (28)$$

$$M_{k,r} = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} x^k q_r(x) dx = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i^k \Delta Q_{r,i} \quad (29)$$

Der annähernde Mittelwert $\bar{x}_i^k$ innerhalb einer Größenklasse kann als arithmetischer Mittelwert in jeder Größenklasse berechnet werden

$$\bar{x}_i^k = \left(\frac{x_i + x_{i-1}}{2} \right)^k \quad (30)$$

Alternative annähernde Mittelwerte wie der geometrische Mittelwert oder ein integraler Mittelwert haben keinen besonderen Vorteil. Verschiedene Untersuchungen (siehe z. B. Referenzdokument [8]) haben gezeigt, dass keine der möglichen Verteilungsarten allgemein bevorzugt wird.

Die diskrete Art der Histogrammdaten führt zu Unsicherheiten von bis zu wenigen Prozent bei den berechneten Momenten und mittleren Größen, die sich auf die Breite der Größenklassen und die entsprechende Unsicherheit bei der Menge der Partikel, die aus der geschätzten mittleren Größe in jeder Klasse abgeleitet wurde, beziehen. Verfahren zur Verbesserung der Größenauflösung bei der Darstellung der Messung durch Beobachtung von mehr Größenklassen werden in ISO 9276-3 beschrieben.

Die Momente $M_{1,0}$, $M_{2,0}$, $M_{3,0}$, $M_{4,0}$, $M_{1,3}$, $M_{-1,3}$, $M_{-2,3}$ und $M_{-3,3}$ können daher über die Gleichungen (31) bis (38) berechnet werden:

$$M_{1,0} = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i^1 \bar{q}_{0,i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i^1 \Delta Q_{0,i} \quad (31)$$

$$M_{2,0} = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i^2 \bar{q}_{0,i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i^2 \Delta Q_{0,i} \quad (32)$$

$$M_{3,0} = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i^3 \bar{q}_{0,i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i^3 \Delta Q_{0,i} \quad (33)$$

$$M_{4,0} = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i^4 \bar{q}_{0,i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i^4 \Delta Q_{0,i} \quad (34)$$

$$M_{1,3} = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i^1 \bar{q}_{3,i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i^1 \Delta Q_{3,i} \quad (35)$$

$$M_{-1,3} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\bar{x}_i^1} \bar{q}_{3,i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\bar{x}_i^1} \Delta Q_{3,i} \quad (36)$$

$$M_{-2,3} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\bar{x}_i^2} \bar{q}_{3,i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\bar{x}_i^2} \Delta Q_{3,i} \quad (37)$$

$$M_{-3,3} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\bar{x}_i^3} \bar{q}_{3,i} \Delta x_i = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\bar{x}_i^3} \Delta Q_{3,i} \quad (38)$$

4.4 Varianz und Standardabweichung einer Partikelgrößenverteilung

Die Streuung einer Größenverteilung kann durch ihre Varianz dargestellt werden, die das Quadrat der Standardabweichung s_r ist. Die Varianz s_r^2 einer Verteilung $q_r(x)$ ist definiert als:

$$s_r^2 = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} (x - \bar{x}_{1,r})^2 q_r(x) dx \quad (39)$$

Durch Einbeziehung vollständiger Momente kann die Varianz berechnet werden (Referenzdokument [3]) aus:

$$s_r^2 = m_{2,r} = M_{2,r} - (M_{1,r})^2 \quad (40)$$

oder basierend auf den Daten aus einem Histogramm:

$$s_r^2 = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i^2 \bar{q}_{r,i} \Delta x_i - \left(\sum_{i=1}^m \bar{x}_i \bar{q}_{r,i} \Delta x_i \right)^2 = \sum_{i=1}^m \bar{x}_i^2 \Delta Q_{r,i} - \left(\sum_{i=1}^m \bar{x}_i \Delta Q_{r,i} \right)^2 \quad (41)$$

Ein Zahlenbeispiel für die Berechnung von s_r^2 kann Anhang A entnommen werden.

Für eine logarithmische Normalverteilung $q_r(x)$ kann die Standardabweichung s berechnet werden aus:

$$s = \ln(x_{84,r}/x_{50,r}) = \ln(x_{50,r}/x_{16,r}) \quad (42)$$

Die geometrische Standardabweichung s_g ergibt sich aus:

$$s_g = \exp(s) \quad (43)$$

Somit gilt:

$$s_g = x_{84,r}/x_{50,r} = x_{50,r}/x_{16,r} \quad (44)$$

4.5 Berechnung von Momenten und mittleren Partikelgrößen aus einer logarithmischen Normalverteilung

Das *vollständige* k -te Moment einer lognormalen Wahrscheinlichkeitsverteilung $q_r(x)$ ergibt

$$M_{k,r} = x_{50,r}^k e^{0,5 k^2 s^2} = e^{k \ln x_{50,r} + 0,5 k^2 s^2} \quad (45)$$

Eine Reihe von mittleren Partikelgrößen kann aus der k -ten Wurzel des k -ten Moments in Gleichung (45) oder aus dem Median (und geometrischen Mittelwert) $x_{50,r}$ und der Standardabweichung dieser Verteilung mittels Gleichung (46) berechnet werden:

$$\bar{x}_{k,r} = x_{50,r} e^{0,5 k s^2} = e^{\ln x_{50,r} + 0,5 k s^2} \quad (46)$$

Der Median $x_{50,r}$ einer logarithmischen Normalverteilung hat den gleichen Wert wie die geometrische mittlere Größe $\bar{x}_{0,r}$.

4.6 Berechnung der volumenspezifischen Oberfläche und des mittleren Sauterdurchmessers

Aus Verteilungen jeder Mengenart können Momente bei der Berechnung der *volumenspezifischen Oberfläche* S_V verwendet werden, da S_V umgekehrt proportional zu der flächengewichteten mittleren Größe, dem mittleren Sauterdurchmesser, $\bar{x}_{1,2}$ ist (Gleichung 14). Sie ist gegeben durch:

$$S_V = \frac{6}{\bar{x}_{1,2}} \quad (47)$$

Unter Berücksichtigung von Gleichung (25) ergibt sich aus Oberflächen-, Anzahl- oder Volumenverteilungen:

$$S_V = \frac{6}{M_{1,2}} = 6 \frac{M_{2,0}}{M_{3,0}} = 6 \cdot M_{-1,3} \quad (48)$$

Für Partikel außer Kugeln muss ein Formfaktor eingeführt werden.

5 Die Momentenverhältnis-Notation

Momente sind die Grundlage zur Bestimmung von mittleren Größen und Standardabweichungen von Partikelgrößenverteilungen. Eine *Stichprobe* mit einer begrenzten Anzahl an Partikeln aus einer großen *Grundgesamtheit* von Partikelgrößen wird zur Schätzung der Momente der Größenverteilung dieser Grundgesamtheit verwendet. Die Schätzung befasst sich mit dem Rückschluss von den Zahlenwerten der Probe auf die Zahlenwerte der unbekannten Grundgesamtheit. Partikelgrößenmessungen erfolgen immer mit diskreten Proben und umfassen eine Reihe an diskreten Größenklassen. Aus diesem Grund werden in diesem Teil von ISO 9276 nur auf Proben bezogene Momente behandelt.

ANMERKUNG Verteilungsdichte und Summenverteilung werden in der Normenreihe ISO 9276 durch q und Q dargestellt, in der Literatur (Referenzdokumente [3], [4], [7]–[9]) werden jedoch auch die Symbole f und F verwendet.

5.1 Definition von Momenten nach der Momentenverhältnis-Notation

Es dürfen zwei verschiedene Arten von Momenten verwendet werden, und zwar *Momente* und *zentrale Momente*. Momente konzentrieren sich im Bereich um den Ursprung der Partikelgrößenachse und zentrale Momente um die arithmetische mittlere Partikelgröße.

Das p -te *Moment* einer Probe, bezeichnet als M_p , ist definiert als:

$$M_p = N^{-1} \sum_i n_i D_i^p \quad (49)$$

Dabei ist

$N = \sum_i n_i$ die Gesamtzahl der Partikel aus der Messung;

D_i die i -te Größenklassenmitte [siehe auch Kommentare zu Gleichung (30)];

n_i die Anzahl der Partikel in der i -ten Größenklasse (d. h. die Klassenhäufigkeit der Anzahlverteilungsdichte).

Das erste *Moment*, der (arithmetische) Probenmittelwert M_1 der Partikelgrößen D wird meistens durch $\bar{D}$ dargestellt. Das zweite und dritte *Moment* ist proportional zur mittleren Oberfläche bzw. zum mittleren Volumen der Partikel in einer Probe.

Das p -te zentrale Moment um den Mittelwert $\bar{D}$, bezeichnet als m_p , ist definiert als:

$$m_p = N^{-1} \sum_i n_i (D_i - \bar{D})^p \quad (50)$$

Zentrale Momente von Partikelgrößen D hängen zusammen mit Abweichungen vom Mittelwert. Das bekannteste Beispiel ist die Stichprobenvarianz m_2 .

5.2 Definition von mittleren Partikelgrößen nach der Momentenverhältnis-Notation

Die mittlere Partikelgröße $\bar{D}_{p,q}$ einer Probe von Partikelgrößen ist die $1/(p - q)$ -te Potenz des Verhältnisses des p -ten und des q -ten Moments der Anzahlverteilungsdichte der Probe von Partikelgrößen (siehe Referenzdokument [5]):

$$\bar{D}_{p,q} = \left[\frac{M_p}{M_q} \right]^{1/(p-q)}, \text{ wenn } p \neq q \quad (51)$$

Mithilfe von Gleichung (49) kann Gleichung (51) umformuliert werden zu:

$$\bar{D}_{p,q} = \left[\frac{\sum_i n_i D_i^p}{\sum_i n_i D_i^q} \right]^{1/(p-q)}, \text{ wenn } p \neq q \quad (52)$$

Haben p und q den gleichen Wert, ist Gleichung (53) anwendbar (siehe Referenzdokument [5]):

$$\bar{D}_{p,p} = \exp \left[\frac{\sum_i n_i D_i^p \ln D_i}{\sum_i n_i D_i^p} \right] \quad (53)$$

Die Potenzen p und q können jeden beliebigen Zahlenwert annehmen. Die Art der zu bevorzugenden mittleren Größe sollte einen kausalen Zusammenhang mit der entsprechenden physikalischen Produkt- oder Prozesseigenschaft haben^{[4],[10]}.

5.2.1 Terminologie für mittlere Partikelgrößen in der Momentenverhältnis-Notation $\bar{D}_{p,q}$

In Tabelle 2 ist die Momentenverhältnis-Terminologie für mittlere Größen aufgeführt^[9].

Tabelle 2 — Terminologie für mittlere Partikelgrößen $\bar{D}_{p,q}$

Systematischer Code	Terminologie
$\bar{D}_{-3,0}$	arithmetische harmonische mittlere Volumengröße
$\bar{D}_{-2,1}$	größengewichtete harmonische mittlere Volumengröße
$\bar{D}_{-1,2}$	flächengewichtete harmonische mittlere Volumengröße
$\bar{D}_{-2,0}$	arithmetische harmonische mittlere Flächengröße
$\bar{D}_{-1,1}$	größengewichtete harmonische mittlere Flächengröße
$\bar{D}_{-1,0}$	arithmetische harmonische mittlere Größe
$\bar{D}_{0,0}$	arithmetische geometrische mittlere Größe
$\bar{D}_{1,1}$	größengewichtete geometrische mittlere Größe
$\bar{D}_{2,2}$	flächengewichtete geometrische mittlere Größe
$\bar{D}_{3,3}$	volumengewichtete geometrische mittlere Größe
$\bar{D}_{1,0}$	arithmetische mittlere Größe
$\bar{D}_{2,1}$	größengewichtete mittlere Größe
$\bar{D}_{3,2}$	flächengewichtete mittlere Größe, mittlerer Sauterdurchmesser
$\bar{D}_{4,3}$	volumengewichtete mittlere Größe
$\bar{D}_{2,0}$	arithmetische mittlere Flächengröße
$\bar{D}_{3,1}$	größengewichtete mittlere Flächengröße
$\bar{D}_{4,2}$	flächengewichtete mittlere Flächengröße
$\bar{D}_{5,3}$	volumengewichtete mittlere Flächengröße
$\bar{D}_{3,0}$	arithmetische mittlere Volumengröße
$\bar{D}_{4,1}$	größengewichtete mittlere Volumengröße
$\bar{D}_{5,2}$	flächengewichtete mittlere Volumengröße
$\bar{D}_{6,3}$	volumengewichtete mittlere Volumengröße

5.2.2 Geometrische mittlere Partikelgrößen

Tabelle 2 zeigt, dass die Menge der mittleren Größen $\bar{D}_{p,p}$ geometrische mittlere Partikelgrößen^[9] sind. Ein Beispiel ist der geometrische mittlere Oberflächendurchmesser $\bar{D}_{2,2}$ für die visuelle Einstufung von Fotografien von Luftblasengrößenverteilungen in eine Rangordnung^[4].

5.2.3 Harmonische mittlere Partikelgrößen

Tabelle 2 zeigt, dass die Menge der mittleren Größen $\bar{D}_{p,q}$ mit negativen Werten für p harmonische mittlere Partikelgrößen^[9] sind. Ein theoretisches Beispiel, und zwar die Wärmeübertragung zu oder von Partikeln, ist dem Referenzdokument [4] zu entnehmen.

5.3 Berechnung von mittleren Partikelgrößen aus einer gegebenen Größenverteilung

Die mittleren Größen $\bar{D}_{p,q}$ einer Probe können nach Gleichungen entsprechend der Gleichungen (52) und (53) aus einer beliebigen Größenverteilung $q_r(D)$ geschätzt werden:

$$\bar{D}_{p,q} = \left[\frac{\sum_i^m q_r(D_i) D_i^{p-r}}{\sum_i^m q_r(D_i) D_i^{q-r}} \right]^{\frac{1}{p-q}}, \text{ wenn } p \neq q \quad (54)$$

Und

$$\bar{D}_{p,p} = \exp \left[\frac{\sum_i^m q_r(D_i) D_i^{p-r} \ln D_i}{\sum_i^m q_r(D_i) D_i^{p-r}} \right], \text{ wenn } p = q \quad (55)$$

Dabei ist

$q_r(D_i)$ die Partikelmenge in der i -ten Klasse;

D_i der Mittelwert des i -ten Klassenintervalls;

r entspricht 0, 1, 2 oder 3 und steht für die Mengenart, und zwar Anzahl, Durchmesser, Fläche bzw. Volumen (oder Masse);

m die Anzahl der Klassen.

Es ist nicht erforderlich, dass die Partikelmenge $q_r(D_i)$ eine normalisierte Menge ist. Die Menge kann jedoch wie folgt normalisiert werden: $\sum q_r(D_i) = 1$. Die Gleichungen (54) und (55) werden zur gewohnten Form von Gleichung (52) und (53) vereinfacht, wenn $r = 0$ und $n_i = q_0(D_i)$, d. h. für eine Anzahlverteilungsdichte.

Die diskrete Art der Histogrammdaten führt zu Unsicherheiten von bis zu wenigen Prozent bei den berechneten Momenten und mittleren Durchmessern, die sich auf die Breite der Größenklassen und die entsprechende Unsicherheit bei der Menge der Partikel, die aus der geschätzten mittleren Größe in jeder Klasse abgeleitet wurde, beziehen. Weitere Informationen siehe Abschnitt 7.

5.4 Varianz und Standardabweichung einer Partikelgrößenverteilung

Der *zentrale Moment* m_2 , bezeichnet als Varianz einer Anzahlverteilungsdichte ($r = 0$), ist definiert als:

$$m_2 = N^{-1} \sum_i n_i (D_i - \bar{D}_{1,0})^2 \quad (56)$$